Blätter DGVFM
DOI 10.1007/s11857-007-0026-y

ACTUARIAL EXAMS

Bericht zur Mathematischen Eingangsprüfung der DAV im Mai 2007

Günter Last · Martin Folkers · Bruno Ebner

Received: 8 Juli 2007

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Für jedes $t > 0$ sei eine Funktion $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_t(x) := t^2 \cdot \left(x + \frac{1}{t}\right) \cdot e^{-t \cdot x} .$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t > 0$ die lokalen Maximal- und Minimalstellen der Funktion f_t.
b) Zeigen Sie, dass die Funktion f_t ($t > 0$) genau einen Wendepunkt besitzt, und bestimmen Sie diesen.
c) Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente, also die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f_t im Wendepunkt.
d) Die Wendetangente bildet zusammen mit den beiden Koordinatenachsen ein (rechtwinkliges) Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt F dieses Dreiecks.
e) Berechnen Sie für jedes $t > 0$ das Integral

$$I := \int_0^{\frac{1}{t}} f_t(x)\, dx .$$

Lösung:

Zu a)
Es gilt

$$f_t'(x) = t^2 \cdot e^{-t \cdot x} + t^2 \cdot \left(x + \frac{1}{t}\right) \cdot e^{-t \cdot x} \cdot (-t) = -t^3 \cdot x \cdot e^{-t \cdot x} .$$

Martin Folkers, Karlsruhe, Deutschland, e-mail: martin.folkers@math.uni-karlsruhe.de

Folglich besitzt die Funktion f_t genau einen stationären Punkt, nämlich $x_0 = 0$, und da die Ableitung f_t' beim Durchgang durch den Punkt $x_0 = 0$ ihr Vorzeichen von $+$ auf $-$ wechselt, liegt im Punkt $x_0 = 0$ eine lokale Maximalstelle vor.

Zu b)

Es gilt

$$f_t''(x) = -t^3 \cdot e^{-t\cdot x} - t^3 \cdot x \cdot e^{-t\cdot x} \cdot (-t) = t^3 \cdot e^{-t\cdot x} \cdot (t\cdot x - 1)\,.$$

Folglich besitzt die zweite Ableitung f_t'' genau eine Nullstelle, nämlich $x_t := \frac{1}{t}$, und da die zweite Ableitung f_t'' beim Durchgang durch den Punkt $x_t = \frac{1}{t}$ ihr Vorzeichen von $-$ auf $+$ wechselt, liegt im Punkt $x_t = \frac{1}{t}$ ein Wendepunkt vor.

Zu c)

Es gilt

$$f_t(x_t) = f_t\left(\frac{1}{t}\right) = 2\cdot t\cdot e^{-1} \quad \text{und} \quad f_t'(x_t) = f_t'\left(\frac{1}{t}\right) = -t^2\cdot e^{-1}\,.$$

Damit lautet die Gleichung der Wendetangente

$$y = 2\cdot t\cdot e^{-1} - t^2\cdot e^{-1}\cdot\left(x - \frac{1}{t}\right) = t\cdot e^{-1}\cdot(3 - t\cdot x)\,.$$

Zu d)

Der Schnittpunkt der Wendetangente mit der x-Achse ($y = 0$) lautet: $(\frac{3}{t}, 0)$, der Schnittpunkt der Wendetangente mit der y-Achse ($x = 0$) lautet : $(0, 3\cdot t\cdot e^{-1})$. Damit lautet der Flächeninhalt des (rechtwinkligen) Dreiecks

$$F = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{t}\cdot 3\cdot t\cdot e^{-1} = \frac{9}{2}\cdot e^{-1}\,.$$

Zu e)

Für $t \in \mathbb{R}$ gilt mit Hilfe partieller Integration

$$\begin{aligned} I_1 := \int_0^{\frac{1}{t}} t^2\cdot x\cdot e^{-t\cdot x}dx &= \left[t^2\cdot x\cdot e^{-t\cdot x}\cdot\left(-\frac{1}{t}\right)\right]_0^{\frac{1}{t}} - \int_0^{\frac{1}{t}} t^2\cdot\left(-\frac{1}{t}\right)\cdot e^{-t\cdot x}dx \\ &= -e^{-1} + \left[-e^{-t\cdot x}\right]_0^{\frac{1}{t}} \\ &= -e^{-1} - e^{-1} + 1 \\ &= -2\cdot e^{-1} + 1\,. \end{aligned}$$

Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned}
I = \int_0^{\frac{1}{t}} f_t(x)dx &= \int_0^{\frac{1}{t}} t^2 \cdot \left(x + \frac{1}{t}\right) \cdot e^{-t\cdot x} dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{t}} t^2 \cdot x \cdot e^{-t\cdot x} dx + \int_0^{\frac{1}{t}} t \cdot e^{-t\cdot x} dx \\
&= I_1 + \left[-e^{-t\cdot x}\right]_0^{\frac{1}{t}} \\
&= -2 \cdot e^{-1} + 1 - e^{-1} + 1 \\
&= 2 - 3 \cdot e^{-1} .
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

a) Vorgegeben sei die durch

$$f(x, y) := \int_0^x y \cdot e^{-\frac{y^2 \cdot t^2}{2}} dt$$

definierte Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(i) Berechnen Sie die Ableitung (d.h. den Gradienten) $f'(x, y)$. *H*inweis: Sie können ohne Beweis die folgende Formel benutzen:

$$\int (1 - u^2) \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} du = u \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} + \text{const.}, \quad u \in \mathbb{R} .$$

(ii) Bestimmen Sie die stationären Punkte von f.

(iii) Zeigen Sie, dass die Funktion f keine lokalen Extremalstellen (Maximal- oder Minimalstellen) besitzt.

b) Vorgegeben sei die durch

$$F(u) := \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

definierte Abbildung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die durch

$$y(u) := u \cdot F(u) + F'(u)$$

definierte Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Gleichung

$$y''(u) + u \cdot y'(u) - y(u) = 0, \quad u \in \mathbb{R}$$

genügt. (Dies ist eine lineare Differentialgleichung.)

Lösung:

Zu a)

a) Die partiellen Ableitungen der Abbildung f lassen sich wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= y \cdot e^{-\frac{y^2 \cdot x^2}{2}} \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \int_0^x e^{-\frac{y^2 \cdot t^2}{2}} dt + y \cdot \int_0^x \frac{\partial e^{-\frac{y^2 \cdot t^2}{2}}}{\partial y} dt \\
&= \int_0^x e^{-\frac{y^2 \cdot t^2}{2}} dt + y \cdot \int_0^x -t^2 \cdot y \cdot e^{-\frac{y^2 \cdot t^2}{2}} dt \\
&= \int_0^x (1 - y^2 \cdot t^2) \cdot e^{-\frac{y^2 \cdot t^2}{2}} dt \\
&\overset{\text{Hinweis}}{=} \frac{1}{y} \cdot \left[y \cdot t \cdot e^{-\frac{y^2 \cdot t^2}{2}} \right]_0^x \\
&= x \cdot e^{-\frac{y^2 \cdot x^2}{2}} .
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Ableitung $f'(x, y)$:

$$f'(x,y) = \left(y \cdot e^{-\frac{y^2 \cdot x^2}{2}}, x \cdot e^{-\frac{y^2 \cdot x^2}{2}} \right) .$$

b) Für die stationären Punkte der Abbildung f muss gelten:

$$f'(x,y) \overset{!}{=} (0,0) \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (0,0) .$$

c) Die Hessematrix H_f ist gegeben durch

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -y^3 \cdot x \cdot e^{-\frac{y^2 \cdot x^2}{2}} & \left(1 - y^2 \cdot x^2\right) \cdot e^{-\frac{y^2 \cdot x^2}{2}} \\ \left(1 - y^2 \cdot x^2\right) \cdot e^{-\frac{y^2 \cdot x^2}{2}} & -x^3 \cdot y \cdot e^{-\frac{y^2 \cdot x^2}{2}} \end{pmatrix} .$$

Insbesondere gilt also für den stationären Punkt aus (ii):

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Matrix $H_f(0, 0)$ ist indefinit, also handelt es sich nicht um ein Extremum.

Zu b)

Für $u \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
F'(u) &= e^{-\frac{u^2}{2}} , \\
F''(u) &= -u \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} = -u \cdot F'(u) .
\end{aligned}$$

Nach der Produktregel gilt für die ersten beiden Ableitungen von y:

$$y'(u) = F(u) + u \cdot F'(u) + F''(u) = F(u)$$

und

$$y''(u) = F'(u)\,.$$

Durch einsetzten von y' und y'' in die Differentialgleichung der Aufgabenstellung ergibt sich für alle $u \in \mathbb{R}$:

$$y''(u) + u \cdot y'(u) - y(u) = F'(u) + u \cdot F(u) - u \cdot F(u) - F'(u) = 0\,.$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ seien zwei Punkte A und C durch die beiden Ortsvektoren

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{0A} := \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{0C} := \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix},$$

definiert. Ferner seien für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine Gerade

$$g_t := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R} \right\},$$

vorgegeben.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt A auf der Gerade g_8 liegt.
b) Ermitteln Sie den Wert $t \in \mathbb{R}$, für den der Punkt C auf der zugehörigen Geraden g_t liegt.
c) Welche der Geraden g_t hat vom Koordinatenursprung den minimalen Abstand? Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung dieser Geraden.
d) Es existieren ein Punkt B auf der Geraden g_{-17} und ein Punkt D auf der Geraden g_8, so dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat mit der Diagonalen $\overline{AC}$ ist. Berechnen Sie die Ortsvektoren $\overrightarrow{0B}$ und $\overrightarrow{0D}$.

Lösung:

Zu a)

Wegen

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liegt der Punkt A auf der Geraden g_8.

Zu b)

Der Ansatz

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

$$-t - 3 \cdot r = -4, \quad 2 \cdot t + 4 \cdot r = -6\,.$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, die Lösung lautet

$$r = 7,\ t = -17\,,$$

und folglich liegt der Punkt C auf der Geraden g_{-17}.

Zu c)

Da die Geraden g_t für $t \in \mathbb{R}$ eine Ebene bilden, welche parallel zur x-y-Ebene liegt, muss diejenige Gerade den minimalen Abstand zum Koordinatenursprung haben, welche die z-Achse schneidet. Also ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieser Ansatz führt auf das Gleichungssystem

$$-t - 3 \cdot r = -1, \ \text{ und } \ 2 \cdot t + 4 \cdot r = 3\,,$$

welches als eindeutige Lösung $t = \frac{5}{2}$ und $r = -\frac{1}{2}$ besitzt. Also hat die Gerade $g_{\frac{5}{2}}$ den minimalen Abstand zum Koordinatenursprung und die Parameterdarstellung lautet:

$$g_{\frac{5}{2}} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zu d)

Da die Punkte B und C auf der Gerade g_{-17} liegen, gilt

$$\overrightarrow{0B} = \overrightarrow{0C} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $B, C \in g_{-17}$ muss der Vektor $\overrightarrow{AB}$ senkrecht stehen auf dem Vektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wegen

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A0} + \overrightarrow{0B} = -\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

muss also gelten

$$< \overrightarrow{AB}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} > = -50 + r_1 \cdot 25 = 0,$$

also

$$r_1 = 2 \text{ und } \overrightarrow{0B} = \overrightarrow{0C} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Da der Punkt D auf der Geraden g_8 liegt, gilt

$$\overrightarrow{0D} = \overrightarrow{0A} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\overrightarrow{CD}$ muss senkrecht auf dem Vektor

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

stehen, also wegen

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C0} + \overrightarrow{0D} = -\overrightarrow{0C} + \overrightarrow{0D} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

muss gelten

$$< \overrightarrow{CD}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} > = 50 + r_2 \cdot 25 = 0,$$

also

$$r_2 = -2 \text{ und } \overrightarrow{0D} = \overrightarrow{0A} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Vorgegeben sei die reelle (4×4)-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie den Kern der Matrix A.
b) Geben Sie die Eigenwerte der Matrix A an.
c) Welche der folgenden Vektoren sind Eigenvektoren der Matrix A. Geben Sie zu den Eigenvektoren jeweils den zugehörigen Eigenwert an.

Vektor	Eigenvektor ja	Eigenvektor nein	gehört zum Eigenwert
$\boldsymbol{a} := (-1, 1, 1, 0)'$	x		1
$\boldsymbol{b} := (1, 0, 1, 1)'$		x	
$\boldsymbol{c} := (-2, 1, 0, -1)'$		x	
$\boldsymbol{d} := (0, 0, 2, 1)'$	x		-1

d) Es gilt

$$\text{Kern}(A - E_4)^2 = \text{span}((-2, 1, 0, -1)',\ (1, 0, 1, 1)').$$

Dabei bezeichne E_4 die 4-dimensionale Einheitsmatrix. Diese Aussage sollen Sie nicht nachrechnen. Geben Sie eine reelle, reguläre (4×4)-Matrix T an mit

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Zu a)

Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\cdots}{\sim\text{Gauß}\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{span}((0,\,0,\,1,\,1)')\,.$$

Zu b)

Für das charakteristische Polynom der Matrix A ergibt sich

$$\begin{aligned} g_A(x) = {} & \det(A - x \cdot E_4) = \det\left(\begin{pmatrix} -x & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-x & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -2-x & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1-x \end{pmatrix}\right) \\ = {} & (-x \cdot (2-x) + 1) \cdot ((-2-x) \cdot (1-x) + 2) \\ = {} & (x^2 - 2 \cdot x + 1) \cdot (x^2 + x) \\ = {} & (x-1)^2 \cdot x \cdot (x+1)\,. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Eigenwerte (Nullstellen von $g_A(x)$)

$$\lambda_1 = +1,\;\; \lambda_2 = -1,\;\; \lambda_3 = 0\,.$$

Zu c)

Es gilt

$$\begin{aligned} A \cdot (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Demzufolge sind die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{d}$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Die Vektoren $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ sind keine Eigenvektoren der Matrix A.

Zu d)

Die reguläre Transformationsmatrix T lässt sich schreiben als

$$T := (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \, .$$

Dabei bezeichnen $\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{z}$ die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 0$ (siehe Aufgabenteile 1. und 3.). Des Weiteren ist 1 Eigenwert und der Vektor $\boldsymbol{a}$ aus Aufgabenteil 3. bildet einen zugehörigen Eigenvektor. Weiter gilt

$$\dim(\mathrm{Kern}(A - E_4)) = 1 \, .$$

Setzt man zum Beispiel $\boldsymbol{x}_1 := (1, 0, 1, 1)'$, so gilt $\boldsymbol{x}_2 := (A - E_4) \cdot \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{a}$. Folglich bildet die Matrix

$$T = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

eine gesuchte Transformationsmatrix T.