Bericht zur Mathematischen Zulassungsprüfung im Oktober 2016

Heinz-Willi Goelden, Wolfgang Lauf, Martin Pohl

Am 14. Oktober 2016 fand die Mathematische Zulassungsprüfung statt. Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der 5 Aufgaben gestellt wurden. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 36 von 90 möglichen Punkten erzielt werden. Von den 10 Teilnehmerinnen und Teilnehmern hat 1 Teilnehmer die Prüfung bestanden. Zugelassen waren ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur.

Aufgabe 1 (16 Punkte)
Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem mit einem Parameter $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} t\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2\,x_1 & + & t\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}\ .$$

(a) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem

(i) eindeutig lösbar,

(ii) lösbar ist.

(b) Geben Sie zu jedem möglichen $t \in \mathbb{R}$ die Dimension des Lösungsraums des zugehörigen homogenen Gleichungssystems an.

Lösung:

(a) (i) Es gilt:

$$\det\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 2 & t & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 2 & t & 3 \\ 1-t & 0 & 0 \end{pmatrix} = (1-t)(3-t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = 3.$$

Also ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar für $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$.

(ii) 1. Fall $t = 1$:
Es ist

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2, \text{ da } \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0, \text{ und}$$

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2, \text{ da } \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Somit ist das Gleichungssystem lösbar.

2.Fall $t = 3$:
Es ist

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2, \text{ da } \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0, \text{ und}$$

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3,$$

$$\text{da } \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 6 \neq 0.$$

Somit ist das Gleichungssystem nicht lösbar.

Insgesamt ist damit das Gleichungssystem genau für $t \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ lösbar.

(b) Für den Lösungsraum L_t der zugehörigen homogenen Gleichungssysteme gilt:

$$\dim L_t = 0 \text{ für } t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\},$$

da nach (a) die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems für diese t vollen Rang, also nach Dimensionsformel einen trivialen Kern hat, und

$$\dim L_t = 1 \text{ für } t \in \{1, 3\},$$

da nach (a) die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems in diesem Fall den Rang 2 hat, also nach Dimensionsformel der Kern die Dimension 1 haben muss.

Aufgabe 2 (14 Punkte)
Es sei ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum V gegeben.
Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen über V richtig oder falsch sind.
Begründen Sie Ihre Entscheidung mit einer hinreichend genauen Herleitung oder einem geeigneten Gegenbeispiel.

(a) Wenn $B := \{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ ein Erzeugendensystem von V ist und $\{w_1, w_2, w_3\} \subset V$ eine linear unabhängige Teilmenge von V ist, dann ist B eine Basis von V.

(b) Wenn sowohl $B := \{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ als auch $\{w_1, w_2\} \subset V$ jeweils ein Erzeugendensystem von V ist, dann ist B linear abhängig.

(c) Wenn $B := \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset V$ ein Erzeugendensystem von V ist, dann gibt es für jedes $v \in V$ eindeutig bestimmte $u \in \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ und $u' \in \operatorname{span}\{v_3, v_4\}$ mit $v = u + u'$.

Lösung:

(a) Die Aussage ist richtig, denn:
Da $B := \{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ ein Erzeugendensystem von V ist, hat V höchstens die Dimension drei. Da $\{w_1, w_2, w_3\} \subset V$ eine linear unabhängige Teilmenge von V ist, hat V mindestens die Dimension drei. Damit hat V also genau die Dimension drei, d.h. jede Basis besteht aus genau drei Vektoren. Die Basen von V sind aber auch genau die minimalen Erzeugendensysteme von V. Das Erzeugendensystem B enthält genau drei Vektoren, ist also ein minimales Erzeugendensystem und damit zugleich auch eine Basis von V.

(b) Die Aussage ist richtig, denn:
Da $\{w_1, w_2\} \subset V$ ein Erzeugendensystem von V ist, hat V höchstens die Dimension zwei, d.h. jede Basis besteht aus höchstens zwei Vektoren. Die Basen von V sind aber auch genau die maximalen linear unabhängigen Mengen von V. B enthält jedoch mehr als zwei Vektoren, kann also nicht linear unabhängig sein.

(c) Die Aussage ist falsch, denn:
Es sei $V := \mathbb{R}$ und $v_j := j$ für $j = 1, \dots, 4$.
Dann gibt es für $v := 1$ offensichtlich unendlich viele Darstellungen der Form $v = u + u'$ mit $u \in \operatorname{span}\{1, 2\} = \mathbb{R}$ und $u' \in \operatorname{span}\{3, 4\} = \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (17 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die komplexe Zahlenfolge $\left(z_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$z_n := \left(1 - \frac{1}{2+i}\right)^n, \; n \in \mathbb{N}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Grenzwert.

(b) Ist die unendliche Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit

$$a_1 := 36,\; a_{n+1} = \frac{3n+9}{9n+3} a_n,\; n \in \mathbb{N}$$

konvergent?

(c) Ist das uneigentliche Integral $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$ konvergent?

Lösung:

(a) Es ist $1 - \frac{1}{2+i} = 1 - \frac{2-i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$ und $\left|1 - \frac{1}{2+i}\right| = \sqrt{\frac{10}{25}} = \sqrt{\frac{2}{5}} < 1$.
Daraus folgt $\left|z_n\right| = \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^n \to 0$ für $n \to \infty$, also $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

(b) Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe konvergent, denn
$\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+9}{9n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+{}^9\!/n}{9+{}^3\!/n} = \frac{1}{3} < 1.$

(c) Für $1 < x \leq 2$ ist
$\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{(x-1)^{1/2}}$.
Da das Integral $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{1/2}}$ konvergent ist, ist auch das uneigentliche Integral $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$ konvergent.

Aufgabe 4 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,\ y,\ z) \mapsto f(x,\ y,\ z) = 2x^2 + y^4 + 2z^2 + 4yz.$$

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

(b) Zeigen Sie, dass im Punkt $(0,\ 0,\ 0)$ ein Sattelpunkt vorliegt.

Lösung:

(a) Für alle $(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$ ist

$$\nabla f(x,\ y,\ z) = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y^3 + 4z \\ 4z + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn

$$\begin{aligned} 4x &= 0 && (1) \\ 4y^3 + 4z &= 0 && (2) \\ 4z + 4y &= 0 && (3) \end{aligned}$$

Aus (1) folgt $x = 0$ und aus (3) folgt $y = -z$. Einsetzen in (2) ergibt

$$-4z^3 + 4z = 4z(1 - z^2) = 0$$

mit den Lösungen $z = 0$ und $z = \pm 1$. Dies liefert die kritischen Punkte $(0,\ 0,\ 0)$, $(0,\ -1,\ 1)$ und $(0,\ 1,\ -1)$.

(b) Das lokale Verhalten von f in der Nähe des kritischen Punktes $(0,\ 0,\ 0)$ beschreibt die Hessematrix $\mathcal{H}_f(x,\ y,\ z) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 12y^2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ an der Stelle $(0,\ 0,\ 0)$, also $\mathcal{H}_f(0,\ 0,\ 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Da diese Matrix symmetrisch ist, kann die Definitheit mit Hilfe der Eigenwerte festgestellt werden. Für das charakteristische Polynom der Matrix $\mathcal{H}_f(0,\ 0,\ 0)$ gilt

$$\chi(t) = \det\big(\mathcal{H}_f(0,\ 0,\ 0) - tE\big) = -(t-4)\big(t(t-4) - 16\big) = -(t-4)(t^2 - 4t - 16).$$

$\mathcal{H}_f(0,\ 0,\ 0)$ besitzt die Eigenwerte $4,\ 2 \pm \sqrt{20}$. Da zwei dieser Eigenwerte positiv sind und der dritte Eigenwert negativ ist, ist die Matrix $\mathcal{H}_f(0,\ 0,\ 0)$ indefinit. Also hat f in $(0,\ 0,\ 0)$ einen Sattelpunkt.

Aufgabe 5 (23 Punkte)
Gegeben sei die Menge

$$B = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1,\, (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\, y \geq 0\}$$

und eine stetige Funktion $f : B \to \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie die Menge B.

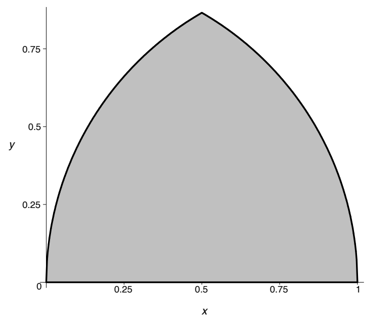
(b) Schreiben Sie das Integral $\iint\limits_B f(x,\, y)\, d(x,\, y)$ als iteriertes Integral

i. in kartesischen Koordinaten.

ii. in Polarkoordinaten.

Lösung:

(a) Das Bild zeigt den Integrationsbereich B



(b) Der Schnittpunkt der beiden Kreise ist $\left(\frac{1}{2},\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{3},\, \sin\frac{\pi}{3}\right)$. Der links von dem Schnittpunkt verlaufende obere Rand von B ist ein Teil des Kreises $(x-1)^2 + y^2 = 1$, der rechts von dem Schnittpunkt verlaufende obere Rand ist Teil des Kreises $x^2 + y^2 = 1$.

i. Die Kreisgleichungen lassen sich nach y auflösen. Aus $(x-1)^2 + y^2 = 1$ wird $y = \sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{2x - x^2}$ und aus $x^2 + y^2 = 1$ ergibt sich $y = \sqrt{1-x^2}$. Damit folgt

$$\iint\limits_B f(x,\, y)\, d(x,\, y) = \int_0^{1/2} \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,\, y)\, dy,\, dx + \int_{1/2}^{1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,\, y)\, dy\, dx$$

ii. In Polarkoordinaten ist $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$. Die Integrationsgrenzen der r-Integration ergeben sich durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Kreisgleichungen. Aus $(x-1)^2 + y^2 = 1 \iff x^2 + y^2 = 2x$

wird $r^2 = 2r\cos\varphi$ bzw. $r = 2\cos\varphi$ und aus $x^2 + y^2 = 1$ wird $r = 1$. Damit ergibt sich

$$\iint\limits_B f(x,\, y)\, d(x,\, y) =$$

$$\int\limits_0^{\pi/3}\int\limits_0^{1} f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi) r\, dr\, d\varphi + \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\int\limits_0^{2\cos\varphi} f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi) r\, dr\, d\varphi$$