Bericht zur Mathematischen Zulassungsprüfung im Mai 2016

Heinz-Willi Goelden, Wolfgang Lauf, Martin Pohl

Am 7. Mai 2016 fand die Mathematische Zulassungsprüfung statt. Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der 5 Aufgaben gestellt wurden. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 36 von 90 möglichen Punkten erzielt werden. Von den 17 Teilnehmerinnen und Teilnehmern haben 10 Teilnehmer die Prüfung bestanden. Zugelassen waren ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur.

Aufgabe 1 (19 Punkte)
Es sei die folgende Matrix gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ 0 & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie A^{2n} für $n \in \mathbb{N}$. Ermitteln Sie anhand des Ergebnisses die Matrix A^{-1}.

(c) Berechnen Sie $\left(\left(3 \cdot A^{2016} + A^{-1}\right)^2\right)^T$.

Lösung:

(a) Induktionsanfang:
Für $n = 1$ ist die Gleichung offensichtlich korrekt.
Induktionsschritt:
Induktionsannahme: *Die Gleichung gilt für ein* $n \in \mathbb{N}$.
Für $n + 1$ folgt dann

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A^n \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ 0 & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \\ 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} & \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \\ 0 & \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} & \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

also die Gleichung für $n + 1$. $\square$

(b) Es gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$A^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^{2n}}{2} & \frac{1-(-1)^{2n}}{2} \\ 0 & \frac{1-(-1)^{2n}}{2} & \frac{1+(-1)^{2n}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3,$$

also ist insbesondere $A \cdot A = E_3$ und damit A invertierbar mit der Inversen $A^{-1} = A$.

(c) Mit (b) folgt:

$$\begin{aligned} \left(\left(3 \cdot A^{2016} + A^{-1}\right)^2\right)^T &= \left((3 \cdot E_3 + A)^2\right)^T = \left(9 \cdot E_3 + 6 \cdot A + A^2\right)^T \\ &= 2 \cdot (5 \cdot E_3 + 3 \cdot A)^T = 2 \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (18 Punkte)
Zu einer unbekannten reellen 3×3-Matrix A liegen folgende Informationen vor:

- A hat genau die Eigenwerte -1 und 2.
- $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert -1.
- $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren zum Eigenwert 2.

Anhand dieser Informationen soll nun die Matrix A mit den folgenden Schritten bestimmt werden.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Begründen Sie ohne Rechnung, warum A ähnlich zu der folgenden Diagonalmatrix D ist:
$$D := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Es sei
$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
die aus den Vektoren v_1, v_2, v_3 gebildete Matrix. Leiten Sie mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus her, dass für die Inverse von S gilt:
$$S^{-1} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Berechnen Sie mit Hilfe der vorhergehenden Teilaufgaben die Matrix A.

Lösung:

(a) Offensichtlich sind v_2 und v_3 linear unabhängig. Weiterhin sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stets linear unabhängig, so dass dann sogar alle drei Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind.

(b) Da nach (a) die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A bilden, ist A zu einer Diagonalmatrix ähnlich, auf deren Diagonale genau die Eigenwerte -1 und 2 von A mit ihrer (geometrischen = algebraischen) Vielfachheit stehen.

(c) Elementare Zeilenumformungen liefern:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \dashrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

(d) Wegen

$$ASe_j = Av_j = \lambda_j v_j = \lambda_j Se_j$$

für die j-ten Einheitsvektoren e_j, $j \in \{1, 2, 3\}$, mit $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_j = 2$ für $j \in \{2, 3\}$ ergibt sich:

$$A = SDS^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -6 & 10 & -6 \\ -9 & 9 & -5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (15 Punkte)

(a) Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgende Aussage:

Für alle $a,\, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ gilt

$$\frac{b-a}{1+b^2} \;<\; \arctan(b) - \arctan(a) \;<\; \frac{b-a}{1+a^2}$$

(b) Folgern Sie aus dieser Ungleichung die Gültigkeit der Aussage

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} \;<\; \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \;<\; \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

Hinweis: $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Lösung:

(a) Anwendung des Mittelwertsatzes auf die Funktion $f(x) = \arctan x$ im Intervall $[a,\, b]$ ergibt

$$\frac{\arctan b - \arctan a}{b-a} = \arctan'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$$

mit einem $\xi \in (a,\, b)$.
Aus $0 < a < \xi$ folgt $\frac{1}{1+\xi^2} < \frac{1}{1+a^2}$ und aus $0 < \xi < b$ folgt $\frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+\xi^2}$.
Daraus folgt

$$\frac{1}{1+b^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}.$$

Durch Multiplikation dieser Ungleichung mit $b-a$ ergibt sich die behauptete Ungleichung.

(b) Mit $b = \frac{4}{3}$ und $a = 1$ wird aus der eben bewiesenen Ungleichung

$$\frac{3}{25} = \frac{4/3 - 1}{1 + (4/3)^2} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) - \underbrace{\arctan(1)}_{=\frac{\pi}{4}} < \frac{4/3 - 1}{1 + (1)^2} = \frac{1}{6}.$$

Daraus folgt sofort die behauptete Ausage.

Aufgabe 4 (18 Punkte)
Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$ ein Polynom P vom Grad 3 mit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - P(x)}{x^3} = 0$ und begründen Sie das Ergebnis.

(Hinweis: Satz von Taylor)

Lösung: Die Funktion f ist beliebig oft differenzierbar. Wir wollen zeigen, dass das zu f gehörige Taylorpolynom dritten Grades mit Entwicklungspunkt 0 die gewünschte Eigenschaft hat. Um das Taylorpolynom zu bestimmen, benötigen wir zunächst die Ableitungen der Funktion f:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \cdot \big(\sin x + \cos x\big),\; f''(x) = 2\,\mathrm{e}^x \cdot \cos x \;\text{ und }\; f'''(x) = 2\,\mathrm{e}^x \cdot \big(\cos x - \sin x\big).$$

Damit folgt $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$ und $f'''(0) = 2$. Für das Taylorpolynom P gilt somit

$$P(x) = 0 + 1 \cdot (x-0) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x-0)^2 + \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot (x-0)^3 = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Nach dem Satz von Taylor gibt es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein ξ zwischen 0 und x mit

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4.$$

Aus $x \to 0$ folgt $\xi \to 0$ und mit der Stetigkeit von $f^{(4)}$ ergibt sich schließlich

$$\frac{f(x) - P(x)}{x^3} = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x \to \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \cdot 0 = 0 \text{ für } x \to 0.$$

Aufgabe 5 (20 Punkte)
Durch die Gleichung $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{36}=1$ ist ein Ellipsoid E im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Die E einbeschriebenen Quader Q sind von der Form $Q=[-x,\,x]\times[-y,\,y]\times[-z,\,z]$ mit $(x,\,y,\,z)\in E$ und $x,\,y,\,z\geq 0$. Zeigen Sie, dass es unter diesen Quadern genau einen mit größtem Volumen gibt, und geben Sie dieses an.

Lösung: Setzen wir $g(x,\,y,\,z)=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{36}$, so ist $(x,\,y,\,z)\in E$ genau dann, wenn $g(x,\,y,\,z)=1$. Für

$$(x,\,y,\,z)\in\tilde{E}:=\big\{(x,\,y,\,z)\,:\,g(x,\,y,\,z)=1,\ x,\,y,\,z\geq 0\big\}$$

besitzt der Quader Q das Volumen

$$V(x,\,y,\,z)=2x\cdot 2y\cdot 2z=8xyz.$$

Da $\tilde{E}$ eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ ist und V auf $\tilde{E}$ stetig ist, nimmt V auf $\tilde{E}$ Minimum und Maximum an. Es ist $V(x,\,y,\,z)\geq 0$ und $V(x,\,y,\,z)=0$ genau dann, wenn $x=0$ oder $y=0$ oder $z=0$. Diese Stellen sind die Minima von V auf $\tilde{E}$. Für das gesuchte Maximum von V unter der Nebenbedingung $g(x,\,y,\,z)=1$ muss $x,\,y,\,z>0$ gelten. Der Ansatz $\nabla V=\lambda\nabla g$ mit dem Lagrange-Multiplikator λ liefert die Gleichungen

$$\begin{array}{rclcrcl}
8yz &=& \lambda\frac{2x}{9} & \text{und damit} & 4xyz &=& \lambda\frac{x^2}{9}\\
8xz &=& \lambda\frac{2y}{16} & & 4xyz &=& \lambda\frac{y^2}{16}\\
8xy &=& \lambda\frac{2z}{36} & & 4xyz &=& \lambda\frac{z^2}{36}
\end{array}$$

Aus $x,\,y,\,z>0$ folgt zunächst $\lambda\neq 0$ und somit

$$\frac{4xyz}{\lambda}=\frac{x^2}{9}=\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{36}.$$

Aus $g(x,\,y,\,z)=1$ folgt

$$\frac{x^2}{9}=\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{36}=\frac{1}{3}.$$

Die einzige mögliche Stelle für das gesuchte Maximum ist

$$x_0=\frac{3}{\sqrt{3}},\ y_0=\frac{4}{\sqrt{3}},\ z_0=\frac{6}{\sqrt{3}}.$$

Das maximale Volumen der in E einbeschriebenen Quader Q ist

$$V(x_0,\,y_0,\,z_0)=8x_0y_0z_0=64\sqrt{3}.$$