Mathematische Zulassungsprüfung 13.10.2017

Die Prüfung besteht aus fünf Aufgaben.
Insgesamt können maximal 90 Punkte erreicht werden. Die Prüfung ist bei Erreichen von 36 Punkten bestanden. Angegeben ist jeweils die maximale Punktzahl für die Aufgabe.
Zugelassen sind ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur.

Bitte verwenden Sie für jede Klausuraufgabe ein neues Blatt!

Aufgabe 1 (14 Punkte)
Es seien die folgenden beiden reellen 2×2-Matrizen gegeben:

$$Q := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix Q orthogonal ist.

(b) (i) Geben Sie eine reelle 2×2-Matrix A an, so dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$AQ^9 = Q^9 D.$$

(ii) Ist die Matrix A eindeutig bestimmt?

Lösung:

(a) Offensichtlich gilt:

$$Q^T Q = E_2.$$

Also sind die Spalten von Q orthonormal und damit ist Q eine orthogonale Matrix.

(b) (i) Q ist offenbar symmetrisch, d.h. $Q = Q^T$, so dass wegen (a) gerade $Q^2 = E_2$ und damit $Q^9 = Q$ ist.
Also folgt mit $Q = Q^{-1}$:

$$A = QDQ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Wegen der Invertierbarkeit von Q ist die Bestimmungsgleichung für A eindeutig nach A auflösbar und damit A selbst eindeutig festgelegt.

Aufgabe 2 (18 Punkte)
Eine symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, heißt *stark diagonaldominant* genau dann, wenn gilt:

$$\sum_{j=1, j\neq i} |a_{ij}| \; < \; |a_{ii}| \quad \text{für alle} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Es gilt dann die (von Ihnen nicht zu beweisende) Implikation:

$$A \;\text{ stark diagonaldominant } \;\Longrightarrow A \;\text{ positiv definit} \tag{1}$$

(a) Verifizieren Sie die Aussage (1) exemplarisch anhand der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie anhand der folgenden Matrix, dass sich die Aussage (1) nicht zu einer Äquivalenz ausbauen lässt:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Die Matrix A ist offensichtlich stark diagonaldominant.
Also ist für die Gültigkeit der Implikation (1) in diesem Beispiel zu zeigen, dass die Matrix A positiv definit ist. Dazu werden die Vorzeichen der Eigenwerte betrachtet:
Da A und damit auch $A - \lambda E_4, \lambda \in \mathbb{R}$, eine Blockdiagonalmatrix ist, lässt sich die Determinante als Produkt der Determinanten der Blöcke berechnen, d.h. für das charakteristische Polynom folgt:

$$\det(A - \lambda E_4) = \left((3-\lambda)^2 - 1\right)^2.$$

Weiterhin gilt für seine Nullstellen und damit für die Eigenwerte von A:

$$\left((3-\lambda)^2 - 1\right)^2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 4.$$

Da alle Eigenwerte von A positiv sind, ist die Matrix A positiv definit.

(b) Offensichtlich ist die Matrix B nicht stark diagonaldominant (betrachte die erste Zeile von B).
Die Eigenwerte von B sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\det(B - \lambda E_3) = (2-\lambda)(2 - 4\lambda + \lambda^2) = 0 \Longleftrightarrow \lambda \in \left\{2, 2 \pm \sqrt{2}\right\}$$

Da alle Eigenwerte von B positiv sind, ist die Matrix B positiv definit.
Aus der positiven Definitheit einer quadratischen Matrix folgt demnach nicht unbedingt, dass diese Matrix stark diagonaldominant ist. Also lässt sich die Aussage (1) im Allgemeinen nicht zu einer Äquivalenz ausbauen.

Aufgabe 3 (19 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sqrt[3]{n+1}\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big), \; n \in \mathbb{N}$$

auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.
Hinweis: Es gilt $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2, \; a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie reelle Folgen $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften an:

(i) $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt und $\big(a_nb_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(ii) $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und $\big(a_nb_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

(iii) $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sind unbeschränkt und $\big(a_nb_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

Lösung:

(a) Es ist $a_n = \sqrt[3]{n+1}\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) = \dfrac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Damit gilt

$$0 \le a_n \le \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{(n+1)^{1/6}} \to 0, \quad (n\to\infty),$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) (i) Ein Beispiel ist $a_n = \frac{1}{n^2}, \; b_n = n$ und damit $a_nb_n = \frac{1}{n}$.

(ii) Ein Beispiel ist $a_n = 1+\frac{1}{n}, \; b_n = (-1)^n$ und damit $a_nb_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

(iii) Ein Beispiel ist

$$a_n = n\big(1+(-1)^n\big) = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ 2n, & n \text{ ungerade} \end{cases},$$

$$b_n = n\big(1+(-1)^{n+1}\big) = \begin{cases} 2n, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und damit $a_nb_n = 0$.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Die Funktion $f : \left[0,\, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = \int\limits_0^x \sin\bigl(\sin t\bigr)\, dt$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(x)$ zweiten Grades von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Geben Sie das Restglied $R_2(x)$ in der Darstellung von Lagrange an.

(c) Zeigen Sie: für $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ gilt $\dfrac{-\sin(1) - 1}{6} \cdot x^3 \le R_2(x) \le 0$.
Hinweis: Schätzen Sie die in der Darstellung von R_2 auftretenden Funktionen getrennt ab.

Lösung:

(a) Es ist $f'(x) = \sin\bigl(\sin x\bigr)$ und $f''(x) = \cos\bigl(\sin x\bigr) \cdot \cos x$ und damit folgt $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 1$. Für das Taylorpolynom gilt somit

$$T_2(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

(b) Es ist $f'''(x) = -\sin\bigl(\sin x\bigr) \cdot \cos^2 x - \cos\bigl(\sin x\bigr) \cdot \sin x$. Damit gilt für das Restglied von Lagrange

$$R_2(x) = \frac{1}{6}\Bigl(-\sin\bigl(\sin\xi\bigr) \cdot \cos^2\xi - \cos\bigl(\sin\xi\bigr) \cdot \sin\xi\Bigr) \cdot x^3$$

mit einem geeigneten $\xi \in (0,\, x)$.

(c) Aus $\xi \in (0,\, x) \subset \left[0,\, \frac{\pi}{2}\right]$ folgt $0 \le \sin\xi \le 1$ und $0 \le \cos^2\xi \le 1$. Daraus folgt

$$-\sin(1) \le -\underbrace{\sin\bigl(\sin\xi\bigr)}_{\in[0,\,\sin(1)]} \cdot \underbrace{\cos^2\xi}_{\in[0,\,1]} \le 0$$

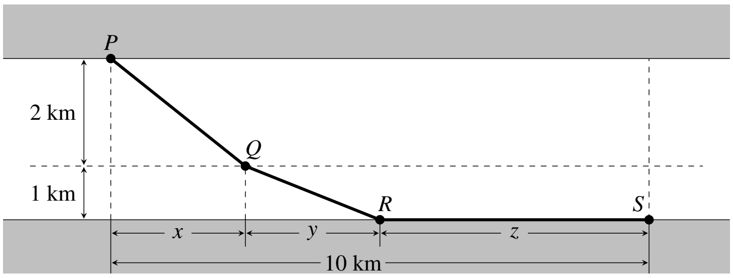
und

$$-1 \le -\underbrace{\cos\bigl(\sin\xi\bigr)}_{\in[\cos(1),\,1]} \cdot \underbrace{\sin\xi}_{\in[0,\,1]} \le 0.$$

Insgesamt ergibt sich für $x \in \left[0,\, \frac{\pi}{2}\right]$ die Abschätzung

$$\frac{-\sin(1) - 1}{6} \cdot x^3 \le R_2(x) \le 0.$$

Aufgabe 5 (19 Punkte)
Es soll eine Wasserleitung vom Punkt P bis zum Punkt S gebaut werden. Beim Bau der Leitung muss ein 3 km breites Tal überbrückt werden (siehe Skizze). Dabei sind die Baukosten in verschiedenen Teilen des Tales aufgrund der dort herrschenden Gegebenheiten unterschiedlich hoch. Am niedrigsten sind die Kosten auf dem Stück zwischen R und S. Dort betragen sie G pro Längeneinheit. Zwischen den Punkten Q und R kostet die Leitung $2G$ pro Längeneinheit und zwischen den Punkten P und Q kostet eine Längeneinheit $3G$. Zur Vereinfachung der Rechnungen können Sie $G = 1$ setzen. Die Leitung wird so verlegt, dass x, y, $z > 0$ sind.



(a) Ermitteln Sie die Teillängen der Leitung zwischen P und Q und zwischen Q und R.

(b) Geben Sie die Gesamtkosten der Leitung in Abhängigkeit der Größen x, y und z an.

(c) Bestimmen Sie die Größen x, y und z so, dass die Gesamtkosten minimal werden.
Hinweis: Sie müssen nicht nachweisen, dass es ein Kostenminimum mit x, y, $z > 0$ gibt.

Lösung:

(a) $\overline{PQ} = \sqrt{x^2 + 4}$ und $\overline{QR} = \sqrt{y^2 + 1}$.

(b) $K(x, y, z) = 3\sqrt{x^2 + 4} + 2\sqrt{y^2 + 1} + z$.

(c) Gesucht ist das Minimum von $K(x, y, z)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = x + y + z = 10$ für x, y, $z > 0$.

(i) Berechnung des Minimums mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren:
Das Gleichungssystem $\nabla K(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$ lautet

$$\frac{3x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \lambda \qquad (1)$$

$$\frac{2y}{\sqrt{y^2 + 1}} = \lambda \qquad (2)$$

$$1 = \lambda \qquad (3)$$

Einsetzen von (3) in (1) ergibt

$$\frac{3x}{\sqrt{x^2+4}} = 1 \Longrightarrow 9x^2 = x^2 + 4 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{2}.$$

Einsetzen von (3) in (2) ergibt

$$\frac{2y}{\sqrt{y^2+1}} = 1 \Longrightarrow 4y^2 = y^2 + 1 \Longrightarrow y^2 = \frac{1}{3}.$$

Da $x,\, y > 0$ vorausgesetzt ist, ergibt sich die einzige mögliche Stelle für das gesuchte Minimum zu

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ y_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ und } z_0 = 10 - x_0 - y_0.$$

(ii) Berechnung des Minimums durch Elimination von $z = 10 - x - y$ aus der Nebenbedingung:
Gesucht ist das Minimum von

$$\tilde{K}(x,\, y) = K(x,\, y,\, 10 - x - y) = 3\sqrt{x^2+4} + 2\sqrt{y^2+1} + 10 - x - y$$

für $x,\, y > 0$ und $x + y < 10$.
Die für das Minimum notwendige Bedingung $\nabla\tilde{K}(x,\, y) = \underline{0}$ lautet hier

$$\frac{3x}{\sqrt{x^2+4}} - 1 = 0, \text{ also } x^2 = \frac{1}{2}$$
$$\frac{2y}{\sqrt{y^2+1}} - 1 = 0, \text{ also } y^2 = \frac{1}{3}$$

Aus $x,\, y > 0$ ergibt sich die einzige mögliche Extremalstelle für $\tilde{K}$ zu

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ y_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$