Bericht zur Mathematischen Zulassungsprüfung im Mai 2017

Heinz-Willi Goelden, Wolfgang Lauf, Martin Pohl

Am 6. Mai 2017 fand die Mathematische Zulassungsprüfung statt. Die Prüfung bestand aus einer 90-minütigen Klausur, in der 5 Aufgaben gestellt wurden. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 36 von 90 möglichen Punkten erzielt werden. Von den 8 Teilnehmerinnen und Teilnehmern haben 3 Teilnehmer die Prüfung bestanden. Zugelassen waren ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur.

Aufgabe 1 (12 Punkte)
Berechnen Sie die Determinante der folgenden quadratischen Matrix A der Dimension $n \in \mathbb{N}$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
1.Variante:
Die geforderte Determinante lässt sich nach geeigneten elementaren Zeilenumformungen berechnen.
Subtrahiert man nämlich die erste Zeile von der i-ten Zeile, $i = 2, \ldots, n-1$, genau einmal und addiert die erste Zeile auf die n-te Zeile genau $(n-1)$-mal, erhält man:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & n \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & n \\ 0 & n & \cdots & n & n(2-n) \end{pmatrix}.$$

Addiert man nun ab der zweiten bis zur $(n-1)$-ten Zeile alle Zeilen auf die letzte, entsteht in der letzten Zeile eine Nullzeile.
Daraus folgt:

$$\det A = 0.$$

2.Variante:
Die Summe aller Zeilen bzw. Spalten der Matrix A ist eine Nullzeile bzw. Nullspalte, daher sind die Zeilen bzw. Spalten der Matrix linear abhängig und die Determinante verschwindet.

Aufgabe 2 (14 Punkte)
Es sei A eine reelle quadratische Matrix der Dimension $n \in \mathbb{N}$ mit dem Rang $\mathrm{rg}(A) = 1$.

(a) Begründen Sie, warum für das charakteristische Polynom p_A von A gilt:

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^{n-1}(\lambda - c)$$

mit einem geeigneten $c \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\det(A + E_n) = \mathrm{Spur}(A) + 1,$$

wobei E_n die Einheitsmatrix der Dimension n bezeichnet.

(Hinweis: Für das charakteristische Polynom p_A von A gilt:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = (-\lambda)^n + \mathrm{Spur}(A)(-\lambda)^{n-1} + \ldots + \det A.)$$

Lösung:

(a) Wegen $\mathrm{rg}(A) = 1$ ist 0 ein $(n-1)$-facher Eigenwert von A. Also hat das charakteristische Polynom p_A die Form

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^{n-1}(\lambda - c)$$

mit einem geeigneten $c \in \mathbb{R}$.

(b) Aus (a) folgt

$$p_A(\lambda) = (-\lambda)^n + c(-\lambda)^{n-1}$$

Koeffizientenvergleich mit der allgmeinen Form

$$p_A(\lambda) = (-\lambda)^n + \mathrm{Spur}(A)(-\lambda)^{n-1} + \ldots + \det A$$

ergibt, dass $c = \mathrm{Spur}(A)$ sein muss. Damit folgt:

$$\det(A + E_n) = p_A(-1) = (-1)^n(-1)^{n-1}(-1 - \mathrm{Spur}(A)) = \mathrm{Spur}(A) + 1.$$

Aufgabe 3 (18 Punkte)
Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Geben Sie für richtige Aussagen eine stichwortartige Begründung an und widerlegen Sie falsche Aussagen mit einem Gegenbeispiel.

Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe mit Summanden $a_n > 0,\ n \in \mathbb{N}$, so ist die Reihe

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3a_n$ konvergent.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ konvergent.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ konvergent.

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ konvergent.

Lösung:

(a) Diese Aussage ist nach den Rechenregeln für konvergente Reihen richtig.

(b) Diese Aussage ist falsch. Aus der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ folgt, dass $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Damit ist $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ ist divergent.

(c) Diese Aussage ist richtig. Aus der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ folgt, dass $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Da alle $a_n > 0$ sind, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ die Ungleichung $a_n < 1$ gilt. Für diese n ist $a_n^2 < a_n$. Somit ist die Reihe $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n^2$.

(d) Diese Aussage ist falsch. Mit $a_n = \frac{1}{n^2}$ gilt: Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent, aber die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent.

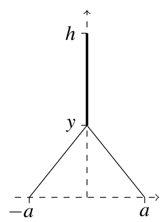
Aufgabe 4 (25 Punkte)
Zwei Fabriken stehen an den Positionen $(-a,\, 0)$ und $(a,\, 0)$. Die gemeinsame Energieversorgung für die beiden Fabriken befindet sich an der Position $(0,\, h)$ mit $h > a$. Zunächst werden von den Fabriken zwei einzelne dünne Kabel bis zur Stelle $(0,\, y)$ verlegt und von dort wird ein dickes Kabel zur Energieversorgung verlegt. Das dicke Kabel kostet (pro Längeneinheit) das $\sqrt{2}$-fache der dünnen Kabel.

(a) Erstellen Sie eine Skizze mit den Kabeln der Energieversorgung für die beiden Fabriken.

(b) An welcher Stelle y sollen die Kabel zusammengeführt werden, damit die Gesamtkosten für die Anbindung der beiden Fabriken minimal sind?

Lösung:

(a) Die Situation ist in nebenstehendem Bild skizziert.



(b) Die Länge der beiden Kabel von den Fabriken zur Stelle $(0,\, y)$ ist jeweils $l_1 = \sqrt{a^2 + y^2}$ und die Länge des Kabels von $(0,\, y)$ zur Energieversorgung ist $l_2 = h - y$. Sind K_0 die Kosten der dünnen Kabels pro Längeneinheit, so kostet eine Längeneinheit des dicken Kabels $\sqrt{2}K_0$ und die Gesamtkosten der Anbindung der Fabriken an die Energieversorgung sind $K_0(2l_1 + \sqrt{2}l_2) = K_0 \cdot \left(2\sqrt{a^2 + y^2} + \sqrt{2}(h - y)\right)$ mit $0 \le y \le h$.

Gesucht ist das Minimum der Funktion

$$K(y) = 2\sqrt{a^2 + y^2} + \sqrt{2} \cdot (h - y),\ 0 \le y \le h.$$

Die Funktionswerte an den beiden Rändern des Definitionsbereiches sind $K(0) = 2a + \sqrt{2}h = \sqrt{2}(\sqrt{2}a + h)$ und $K(h) = 2\sqrt{a^2 + h^2}$. Die Ableitung der Funktion K ist

$$K'(y) = 2\frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} - \sqrt{2} = \frac{2y - \sqrt{2}\sqrt{a^2 + y^2}}{\sqrt{a^2 + y^2}}.$$

Damit ist $K'(y) = 0 \iff 2y - \sqrt{2}\sqrt{a^2 + y^2} = 0$. Wegen $y \ge 0$ ist dies genau dann der Fall, wenn $4y^2 = 2(a^2 + y^2)$, also $y^2 = a^2$ ist. Aus der Bedingung $h > a$ folgt, dass $y = a$ die einzige Nullstelle der Ableitung von K im Intervall $[0,\, h]$ ist. Der Funktionswert von K an dieser Stelle ist $K(a) = 2\sqrt{2a^2} + \sqrt{2}(h - a) = \sqrt{2}(h + a)$.

Wegen $1 < \sqrt{2}$ ist $K(a) < K(0)$. Wegen $h > a$ gilt

$$2a^2 + 2h^2 - (a + h)^2 = a^2 - 2ah + h^2 = (a - h)^2 > 0,$$

also $\sqrt{2a^2 + 2h^2} > a + h$ und damit $K(h) > K(a)$.

Die Kosten der Energieanbindung sind also genau dann minimal, wenn $y = a$ gewählt wird.

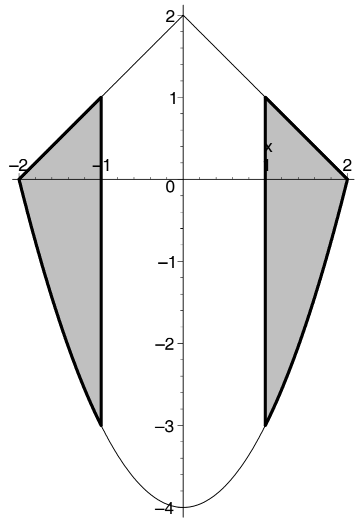
Aufgabe 5 (21 Punkte)
Betrachten Sie den Körper K, der von oben durch die Fläche $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ und von unten durch die Fläche $z = x^2 + y^2 - 4$ berandet wird. Von diesem Körper wird alles ausgebohrt, was innerhalb des Zylinders $x^2 + y^2 \leq 1$ liegt. Der verbleibende Körper soll K_L heißen.

(a) Skizzieren Sie den Schnitt von K_L mit der $(x,\, z)$-Ebene.

(b) Berechnen Sie das Volumen von K_L.

Lösung:

(a) Der Schnitt von K_L mit der $(x,\, z)$-Ebene ist in folgender Skizze dargestellt.



(b) In kartesischen Koordinaten ist

$$K_L = \left\{(x,\, y,\, z) \,:\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\, x^2 + y^2 - 4 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}.$$

Die Substitution $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ führt zu der Darstellung von K_L in Zylinderkoordinaten

$$B = \left\{(r,\, \varphi,\, z) \,:\, 1 \leq r \leq 2,\, 0 \leq \varphi < 2\pi,\, r^2 - 4 \leq z \leq 2 - r\right\}.$$

Damit ist das Volumen von K_L gleich

$$V = \int\limits_{K_L} d(x,\, y,\, z) = \int\limits_{B} r\, d(r,\, \varphi,\, z) = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_1^2 \int\limits_{r^2-4}^{2-r} r\, dr\, d\varphi =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_1^2 \big((2-r) - (r^2-4)\big) r\, dr\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_1^2 (6r - r^2 - r^3)\, dr\, d\varphi =$$

$$2\pi\left(3r^2 - \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_1^2 = 2\pi\left(12 - \frac{8}{3} - 4 - 3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{35\pi}{6}$$