

Klausur im Grundwissen Wertorientiertes Risikomanagement

16.05.2015

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt **90**. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens **36** Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1. (17 Punkte) *Risikomanagementprozesse.*

- (1 Punkt) Nennen Sie zwei Prozessschritte (Teilprozesse) des Risikokontroll-/ Risikomanagementprozesses eines Versicherungsunternehmens.
- (7 Punkte) Erklären Sie den Unterschied zwischen „integrierten“ und „supplementären“ Risikomanagementprozessen und veranschaulichen Sie Ihre Erklärung anhand von Beispielen zu den beiden unter Teilaufgabe a) genannten Prozessschritten.
- (4 Punkte) Nennen Sie jeweils zwei Vor- und Nachteile von integrierten Risikomanagementprozessen gegenüber supplementären Risikomanagementprozessen.
- (5 Punkte) Geben Sie das gängige Konzept an, mit dem Steuerungsimpulse aus supplementären Risikomanagementprozessen operationalisiert werden. Wer übernimmt welche Verantwortlichkeiten in diesem Konzept?

Aufgabe 2. (20 Punkte) *Ökonomische Bewertung, Risikokapital und Erfolgsmessung.*

Die Sach AG ist ein Sachversicherungsunternehmen und eine Tochter der Alle-Sparten-AG. Die Sach AG weist zum 31.12.2014 die folgende HGB-Bilanz aus (alle Werte in Mio. Euro).

Aktiva nach HGB		Passiva nach HGB	
Aktien	50	Eigenkapital	200
Immobilien	100	Schadenreserven	650
festverzinsliche Wertpapiere	750	Schwankungsrückstellung	100
Forderungen gegenüber Versicherungsvermittlern	70	sonstige Passiva	50
sonstige Aktiva	30		
Summe Aktiva	1000	Summe Passiva	1000

Im Anhang der HGB-Bilanz finden sich die folgenden Informationen:

- Buch- und Marktwerte der Kapitalanlagen:

31.12.2014	Buchwerte	Marktwerte
Aktien	50	60
Immobilien	100	120
festverzinsliche Wertpapiere	750	870

- Die Forderungen gegenüber den Versicherungsvermittlern wurden auf Grund von einbehaltenen Provisionen (sog. Stornoreserven) nicht pauschalwertberichtigt. Im Mittel der letzten drei Jahre konnten aber trotz der Stornoreserven pro Jahr ca. 20% der Forderungen nicht realisiert werden.
 - Bei den Schadenreserven handelt es sich um von den Mitarbeitern einzelvertraglich dozierte Werte. Werden die Schadenreserven mittels eines üblichen Chain-Ladder-Verfahrens bestimmt, so erhält man einen Wert von 586 Mio. Euro.
 - Die sonstigen Passiva enthalten unter anderem nach BilMoG bewertete Pensionsverpflichtungen.
 - Es existieren steuerliche Verlustvorträge (Körperschafts- und Gewerbesteuer).
- a) (5 Punkte) Stellen Sie auf Basis ausschließlich dieser Informationen eine „Approximation“ für die ökonomische Bilanz mit den folgenden Positionen auf.

ökonomische Aktiva	ökonomische Passiva
Kapitalanlagen	vorhandenes Risikokapital
Forderungen ggü. Versicherungsvermittlern	versicherungstechnische Rückstellungen
sonstige Aktiva	sonstige Passiva
Bilanzsumme	Bilanzsumme

- b) (3 Punkte) Die in Aufgabenteil a) angegebene ökonomische Bilanz ist lediglich eine Approximation der „richtigen“ ökonomischen Bilanz. Hierfür reichen obige Anhangangaben aus dem HGB-Abschluss nicht aus. Nennen Sie **drei** Positionen in der von Ihnen aufgestellten ökonomischen Bilanz, die fehlen oder nicht adäquat angegeben sind.

Im veröffentlichten Risikobericht schreibt die Sach AG, dass sie ein internes Simulationsmodell zur Quantifizierung ihrer Risiken auf Basis einer ökonomischen Bewertung einsetzt. Die 10 schlechtesten Resultate aus 1000 Simulationen für das ökonomische Ergebnis lauten:

	x-schlechtestes Ergebnis (Positive Werte stellen Verluste dar.)									
Nr.	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
Sach AG	120	140	150	200	220	280	320	360	420	450

- c) (4 Punkte) Das Unternehmen betrachtet zwei verschiedene Risikomaße:

- (i) Risikomaß und Niveau gemäß Solvency II
- (ii) Expected Shortfall zum Niveau 99,2%

Berechnen Sie für beide Risikomaße das benötigte Risikokapital sowie das Exzesskapital.

- d) (2 Punkte) Geben Sie einen möglichen Grund dafür an, warum das Unternehmen zusätzlich zum Risikomaß nach Solvency II noch den Expected Shortfall betrachtet.
- e) (3 Punkte) Im Lagebericht des Unternehmens finden Sie unter der Überschrift „Unternehmensstrategie“ die Aussage, dass das strategisch entscheidende Risikomaß der Expected Shortfall zum Niveau 99,2% ist. Bei diesem Risikoappetit wird eine Verzinsung des benötigten Risikokapitals von 12% angestrebt. Ermitteln Sie eine zum aktuellen Sicherheitsniveau passende Hurdle Rate für das vorhandene Risikokapital unter der Annahme, dass Exzesskapital mit einem sicheren Zins von 2% verzinst wird.
- f) (3 Punkte) Die Sach AG hat in einer Pressemitteilung einen ökonomischen Gewinn von 30 Mio. € veröffentlicht und festgestellt, dass in dem außerordentlich erfolgreichen Geschäftsjahr 2014 alle Ziele erreicht wurden. Berechnen Sie den EVA bzw. den RORAC der Sach AG für das Geschäftsjahr 2014. Wie beurteilen Sie die Pressemitteilung?



Aufgabe 3. (20 Punkte) *Risikomaße und Kapitallokatonsverfahren.*

Die gemeinsame Verteilung der zufälligen Verlustgrößen X, Y, Z sei gegeben durch:

$\mathbb{P}(X = x; Y = y; Z = z)$	x	y	z
10%	30	10	60
10%	20	30	30
30%	20	30	10
30%	0	30	30
20%	60	40	-40

- a) (7 Punkte) Bestimmen Sie den Tail Value at Risk zum Niveau 60% ($TVaR_{60\%}$) für $X, Y, Z, X + Y, X + Z, Y + Z$ und $X + Y + Z$.
- b) Bestimmen Sie für das Risikomaß $TVaR_{60\%}$ die Aufteilung gemäß
- (i) (3 Punkte) dem diskreten Marginalprinzip,
 - (ii) (3 Punkte) dem Shapley-Algorithmus.
- c) (4 Punkte) Bestimmen Sie den Expected Shortfall zum Niveau 60% ($ES_{60\%}$) für X, Y, Z und $X + Y + Z$.
- d) (3 Punkte) Bestimmen Sie für das Risikomaß $ES_{60\%}$ die Aufteilung gemäß der Kapitalallokation nach Kalkbrener.

Aufgabe 4. (17 Punkte) Risikomaße und Aggregation.

Betrachten Sie den stochastischen Barwert einer in 10 Jahren fälligen Erlebensfalleistung der Höhe 10.000 €

$$PV = 10000 \cdot \exp(-Z) \cdot \exp(-S),$$

wobei der Einfluss des Zinses durch die $\mathcal{N}(\mu_Z, \sigma_Z^2)$ -verteilte Intensität Z und der Einfluss der Sterblichkeit durch die $\mathcal{N}(\mu_S, \sigma_S^2)$ -verteilte Intensität S modelliert wird. Wir nehmen an, dass Z und S unabhängig sind.

Hinweis.

- Der Erwartungswert der Lognormalverteilung $LN(\mu, \sigma^2)$ beträgt $\exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$.
- Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat die Lösungen $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, falls die Wurzel existiert.
- $\Phi^{-1}(0,995) = 2,5758$

a) (6 Punkte) Bestimmen Sie Parameterwerte μ_Z, σ_Z , so dass gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\exp(-Z)) &= 1,01^{-10} \\ VaR_{99,5\%}(-Z) &= \ln(1,01^{-10}) \cdot 0,69 \end{aligned}$$

Hinweis. Die Bestimmung eines Lösungsvektors für (μ_Z, σ_Z) genügt. Geben Sie μ_Z und σ_Z mit 6 Nachkommastellen an.

Verwenden Sie im Folgenden ungeachtet Ihres Ergebnisses unter a) die Parameterwerte

$$\mu_Z = 0,099575, \sigma_Z = 0,012003$$

sowie die Lösung

$$\mu_S = 0,031494, \sigma_S = 0,002446$$

des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\exp(-S)) &= 0,969 \\ VaR_{99,5\%}(-S) &= \ln(0,969) \cdot 0,8. \end{aligned}$$

b) (3 Punkte) Berechnen Sie $SCR_{\text{gesamt}} := VaR_{99,5\%}(PV) - \mathbb{E}(PV)$. Geben Sie das Ergebnis mit 2 Nachkommastellen an.

c) (4 Punkte) Berechnen Sie die szenariobasierten Kapitalanforderungen

$$\begin{aligned} SCR_{\text{Zins}} &= VaR_{99,5\%}(10000 \cdot 0,969 \cdot \exp(-Z)) - \mathbb{E}(PV), \\ SCR_{\text{Sterblichkeit}} &= VaR_{99,5\%}(10000 \cdot 1,01^{-10} \cdot \exp(-S)) - \mathbb{E}(PV) \end{aligned}$$

und aggregieren Sie sie mit der Wurzelformel. Geben Sie das Ergebnis mit 2 Nachkommastellen an.

d) (4 Punkte) Erläutern Sie den Ansatz der szenariobasierten Kapitalanforderungen aus c) und kommentieren Sie die Differenz zwischen den Ergebnissen für die aggregierte Kapitalanforderung unter b) und c).

Aufgabe 5. (16 Punkte) Zinsänderungsrisiko.

Ein Unternehmen hat zum 31.12. eines Jahres eine sichere Verbindlichkeit in Höhe von 1 Mio. €, die in genau 20 Jahren fällig wird. Dieser Verpflichtung stehen die folgenden Kapitalanlagen gegenüber:

- Aktien mit einem Marktwert von 0,1 Mio. €,
- ein sicherer Zero-Bond mit einem Rückzahlungsbetrag von 0,6 Mio. € in genau 10 Jahren.

Zum 31.12. des betrachteten Jahres beträgt der sichere Zins

- bei einer Laufzeit von 10 Jahren: 2,0%,
- bei einer Laufzeit von 20 Jahren: 4,0%.

Hinweise:

- Ein Zero-Bond ist eine festverzinsliche Anlage, die während der Laufzeit keine Ausschüttungen (Kupons) hat.
 - Geben Sie alle Ergebnisse in Mio. € mit 3 Nachkommastellen an.
- a) (3 Punkte) Stellen Sie eine ökonomische Bilanz dieses Unternehmens auf. Optionen und Garantien sowie die Risikomarge dürfen Sie hierbei vereinfachend weglassen.
- b) (5 Punkte) Zur Analyse des Zinsänderungs- und des Aktienrisikos betrachtet das Unternehmen das folgende Stressszenario (die Stresse treten unmittelbar nach dem betrachteten Stichtag ein):
- Halbierung der oben angegebenen sicheren Zinssätze,
 - Aktienschock von 20%.

Berechnen Sie das benötigte Risikokapital des Unternehmens für dieses Stressszenario. Welche Konsequenz für das Unternehmen würde sich aus der Realisation des betrachteten Szenarios ergeben?

- c) (3 Punkte) Das Unternehmen möchte sich gegen das Zinsänderungsrisiko immunisieren. Dazu sollen die Kapitalanlagen umgeschichtet werden, ohne jedoch die Aktienposition zu verändern. Geben Sie eine mögliche reallokierte Kapitalanlage an und berechnen Sie für diese neue Kapitalanlage das benötigte Risikokapital, das sich aus obigem Szenario ergibt. Wie beurteilen Sie die Risikosituation des Unternehmens nach der Änderung der Asset-Allokation?
- d) (2 Punkte) Erläutern Sie, inwieweit eine Erhöhung der Aktienquote das Zinsänderungsrisiko eines Unternehmens erhöhen kann.
- e) (3 Punkte) Die aktuelle Situation in der deutschen Lebensversicherung ist mit derjenigen in dieser Aufgabe vergleichbar: Die Durationen der Kapitalanlage sind deutlich geringer als diejenigen der Passivseite. Das Zinsänderungsrisiko hat einen großen Einfluss auf das benötigte Risikokapital. Diskutieren Sie, inwieweit eine vergleichbare Immunisierungsstrategie für die deutschen Lebensversicherer möglich ist.

Lösungen

1. a) Prozessschritte:

- Risikoidentifikation
- Risikoklassifizierung und -erfassung
- Risikoanalyse und -bewertung
- Risikosteuerung: Vermeidung/Reduktion/Übertragung
- etc.

Bemerkung: Es waren nur zwei Beispiele gefragt.

- b) „Integrierte“ Risikomanagementprozesse sind unmittelbar in die Geschäftsvorfälle eingebunden. Die Prozessschritte Risikoanalyse und -bewertung von Kapitalmarktrisiken erfolgen hierbei beispielsweise direkt im Kapitalanlageprozess und damit vor der Implementierung einer neuen Anlagestrategie. Ähnlich verhält es sich bei der in die Produktentwicklung integrierten Risikosteuerung: Versicherungstechnische und andere Risiken werden durch die Produktgestaltung soweit reduziert oder ausbalanciert, bis das neue Produkt der Risikostrategie entspricht; erst danach erfolgt die Umsetzung. Im Gegensatz dazu werden supplementäre Risikomanagementprozesse unabhängig oder parallel zu den Geschäftsprozessen durchgeführt. Das Ergebnis sind Steuerungsimpulse für das operative Geschäft. Als Beispiel für die supplementären Prozessschritte Risikoanalyse und -bewertung kann die periodische, z.B. monatliche Risikokapitalberechnung genannt werden. Bei überhöhtem (Markt-) Risikokonsum müssen Änderungen an der Kapitalanlage vorgenommen werden. Die Risikosteuerung in den operativen Einheiten findet im Fall von supplementären Risikomanagementprozessen also nachgelagert statt. Steuerungsimpulse können dann beispielsweise für ein geändertes Rückversicherungsprogramm, für ein strikteres Underwriting oder für ein Hedgingprogramm von Kapitalanlagen gegeben werden.

Bemerkung: Es wurde angenommen, dass unter Teilaufgabe a) „Risikoanalyse- und bewertung“ sowie „Risikosteuerung“ genannt wurden.

c) Vorteile:

- Steuerungsimpulse können unmittelbar bei der operativen Geschäftssteuerung berücksichtigt werden.
- Die Risikosicht wird mit allen Details in die Geschäftssteuerung eingebettet.
- Es besteht volle Transparenz.
- Fehlsteuerungen können ausgeschlossen werden. Nachträgliches Revidieren von Geschäftsentscheidungen, die sich negativ auf die Risikoposition auswirken würden, lässt sich vorab vermeiden.

Nachteile:

- Bei zu starker Einbindung der Risikomanagementfunktion in das operative Geschäft können Interessenskonflikte aufkommen.
- Es entsteht ein verhältnismäßig hoher Aufwand, insbesondere durch die benötigten Personalressourcen im Risikomanagement.



- Die Komplexität der Prozesse führt zu einem höheren Zeitaufwand.

Bemerkung: Es waren jeweils zwei Punkte gefragt.

- d) Zur Operationalisierung von Risikomanagementvorgaben dienen in der Praxis Limitsysteme.

Innerhalb eines solchen Limitsystems gibt es folgende Verantwortlichkeiten:

- Die Risikomanagementfunktion liefert Vorschläge für Limitsysteme und für die explizite Festlegung der einzelnen Limite, überwacht die Einhaltung der Limite und berichtet die Limitauslastung (insbesondere an die Geschäftsleitung).
- Die Geschäftsleitung entscheidet über die Limitvorgabe (auf Basis des Vorschlags der Risikomanagementfunktion).
- Die operativen Geschäftsbereiche richten ihre Geschäftssteuerung an den vorgegebenen Limiten aus und ergreifen Maßnahmen bei (abzusehender) Limitüberschreitung.

2. a) Die folgenden Umbewertungen müssen vorgenommen werden:

- Die Kapitalanlagen werden zusammengefasst, und der Buchwert wird durch den Marktwert ersetzt.
- Die Forderungen gegenüber den Versicherungsvermittlern werden auf Basis des zu erwarteten Abschreibungsbedarfs um 20% reduziert.
- Die sonstigen Aktiva und die sonstigen Passiva bleiben unverändert.
- Die Schadenreserven werden durch die Chain-Ladder-Reserven ersetzt und unter der Position „versicherungstechnische Rückstellungen“ in der ökonomischen Bilanz ausgewiesen.
- Die Schwankungsrückstellung entfällt.
- Das vorhandene ökonomische Risikokapital ergibt sich nach dieser Umbewertung dann als Residualgröße.

ökonomische Aktiva		ökonomische Passiva	
Kapitalanlagen	1050	vorhandenes Risikokapital	500
Forderungen gegenüber Versicherungsvermittlern	56	versicherungstechnische Rückstellungen	586
sonstige Aktiva	30	sonstige Passiva	50
Bilanzsumme	1136	Bilanzsumme	1136

- b) Als Beispiele können die folgenden Positionen genannt werden:

- Die Risikomarge fehlt.
- Die Schadenreserven sind nicht diskontiert.
- Die Pensionsverpflichtungen unter den sonstigen Aktiva sind nach BilMoG bewertet und somit - aus ökonomische Sicht - mit einem zu hohen Zins diskontiert.
- Es können keine Aussagen zu Optionen und Garantien getroffen werden.
- Steuern wurden auf Grund des steuerlichen Verlustvortrags nicht berücksichtigt. Es bleibt unklar, wie hoch der Verlustvortrag ist und ob der Ansatz angemessen ist.



Hinweis. Es waren nur drei Beispiele gefragt.

- c) (i) Das in Solvency II verwendete Risikomaß ist der Value at Risk zum Niveau 99,5%. Er ergibt sich als der sechst schlechteste Wert der Simulation, also 220 Mio. Euro. Es existiert Exzesskapital in Höhe von 280 Mio. Euro.
- (ii) Der Expected Shortfall zum Niveau 99,2% berechnet sich als Mittelwert der acht schlechtesten Simulationsergebnisse, also

$$(150 + 200 + 220 + 280 + 320 + 360 + 420 + 450)/8 \text{ Mio. €} = 300 \text{ Mio. €}.$$

Es existiert Exzesskapital in Höhe von 200 Mio. Euro.

- d) Das Unternehmen ist eingebettet in einen Konzern. Daher ist es für den Konzern interessant, nicht nur den Ruin mit einem gewissen Sicherheitsniveau (Verwendung des Value at Risk zum Niveau 99,5%) zu vermeiden, sondern es ist auch interessant, wie viel frisches Eigenkapital der Konzern im Mittel bei einem Shortfall neu einschießen muss. Dies misst der Expected Shortfall, der somit aus Konzernsicht ein ebenfalls interessantes Risikomaß ist.
- e) Für das benötigte Risikokapital von 300 Mio. Euro ist eine Hurdle-Rate von 12% vorgegeben. Das Exzesskapital beträgt 200 Mio. Euro und wird sicher mit 2% verzinst. Damit ergibt sich für das gesamte vorhandene Risikokapital eine Hurdle-Rate von $x = 8\%$ als Lösung der Gleichung $500 \cdot x\% = 300 \cdot 12\% + 200 \cdot 2\%$.
- f) Bezogen auf das vorhandene Risikokapital kann der EVA bzw. RORAC wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} EVA &= 30 - 500 \cdot 8\% = -10 \text{ Mio. €} < 0, \\ RORAC &= \frac{30}{500} = 6\% < 8\%. \end{aligned}$$

Entgegen der Pressemitteilung hat das Unternehmen, gemessen an seinen eigenen Verzinsungsvorgaben, Wert vernichtet. Das Geschäftsjahr war somit nicht erfolgreich.

3. Die Verteilungen der Summen der Zufallsgrößen sind:

$\mathbb{P}(X = x, Y = y, Z = z)$	x	y	z	$x + y$	$x + z$	$y + z$	$x + y + z$
0,1	30	10	60	40	90	70	100
0,1	20	30	30	50	50	60	80
0,3	20	30	10	50	30	40	60
0,3	0	30	30	30	30	60	60
0,2	60	40	-40	100	20	0	60

- a) Es gilt

$$\begin{aligned} VaR_{60\%}(X) &= 20, VaR_{60\%}(Y) = 30, VaR_{60\%}(Z) = 30, VaR_{60\%}(X + Y) = 50, \\ VaR_{60\%}(X + Z) &= 30, VaR_{60\%}(Y + Z) = 60, VaR_{60\%}(X + Y + Z) = 60. \end{aligned}$$



Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} TVaR_{60\%}(X) &= \frac{1}{0,3} \cdot (0,1 \cdot 30 + 0,2 \cdot 60) = 50, \\ TVaR_{60\%}(Y) &= 40, \\ TVaR_{60\%}(Z) &= 60, \\ TVaR_{60\%}(X + Y) &= 100, \\ TVaR_{60\%}(X + Z) &= \frac{1}{0,2} \cdot (0,1 \cdot 50 + 0,1 \cdot 90) = 70, \\ TVaR_{60\%}(Y + Z) &= 70, \\ TVaR_{60\%}(X + Y + Z) &= \frac{1}{0,2} \cdot (0,1 \cdot 80 + 0,1 \cdot 100) = 90. \end{aligned}$$

b) (i) Das diskrete Marginalprinzip führt auf

$$\begin{aligned} K_X &= \frac{90 - 70}{3 \cdot 90 - 70 - 70 - 100} \cdot 90 = 60, \\ K_Y &= \frac{90 - 70}{3 \cdot 90 - 70 - 70 - 100} \cdot 90 = 60, \\ K_Z &= \frac{90 - 100}{3 \cdot 90 - 70 - 70 - 100} \cdot 90 = -30. \end{aligned}$$

(ii) Mit dem Shapley-Algorithmus erhalten wir

$$\begin{aligned} K_X &= \frac{1}{3} \cdot (90 - 70) + \frac{1}{6} \cdot (100 - 40) + \frac{1}{6} \cdot (70 - 60) + \frac{1}{3} \cdot 50 = 35, \\ K_Y &= \frac{1}{3} \cdot (90 - 70) + \frac{1}{6} \cdot (100 - 50) + \frac{1}{6} \cdot (70 - 60) + \frac{1}{3} \cdot 40 = 30, \\ K_Z &= \frac{1}{3} \cdot (90 - 100) + \frac{1}{6} \cdot (70 - 50) + \frac{1}{6} \cdot (70 - 40) + \frac{1}{3} \cdot 60 = 25. \end{aligned}$$

c) Wir benutzen $ES_{\lambda_\alpha}(X) = \lambda_\alpha TVaR_\alpha(X) + (1 - \lambda_\alpha) VaR_\alpha(X)$ mit $\lambda_\alpha = \frac{\mathbb{P}(X > VaR_\alpha(X))}{1 - \alpha}$ und $\alpha = 60\%$.

Es gilt $\lambda_\alpha(X) = 2,5 \cdot 0,3 = 0,75$, $\lambda_\alpha(Y) = 2,5 \cdot 0,2 = 0,5$, $\lambda_\alpha(Z) = 2,5 \cdot 0,1 = 0,25$ und $\lambda_\alpha(X + Y + Z) = 2,5 \cdot 0,2 = 0,5$.

$$\begin{aligned} ES_{60\%}(X) &= 0,75 \cdot 50 + 0,25 \cdot 20 = 42,5 \\ ES_{60\%}(Y) &= 0,5 \cdot 40 + 0,5 \cdot 30 = 35 \\ ES_{60\%}(Z) &= 0,25 \cdot 60 + 0,75 \cdot 30 = 37,5 \\ ES_{60\%}(X + Y + Z) &= 0,5 \cdot 90 + 0,5 \cdot 60 = 75 \end{aligned}$$

d) Kalkbrener:

$$\begin{aligned} K_X &= \frac{1}{0,4} (0,1 \cdot 30 + 0,1 \cdot 20) + \frac{0,5}{0,8} (0,3 \cdot 20 + 0,3 \cdot 0 + 0,2 \cdot 60) = 23,75 \\ K_Y &= \frac{1}{0,4} (0,1 \cdot 10 + 0,1 \cdot 30) + \frac{0,5}{0,8} (0,3 \cdot 30 + 0,3 \cdot 30 + 0,2 \cdot 40) = 26,25 \\ K_Z &= \frac{1}{0,4} (0,1 \cdot 60 + 0,1 \cdot 30) + \frac{0,5}{0,8} (0,3 \cdot 10 + 0,3 \cdot 30 + 0,2 \cdot (-40)) = 25 \end{aligned}$$



4. a) Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\exp\left(-\mu_Z + \frac{1}{2}\sigma_Z^2\right) &= \mathbb{E}(\exp(-Z)) = 1,01^{-10} \\ -\mu_Z + \sigma_Z \cdot \Phi^{-1}(0,995) &= VaR_{99,5\%}(-Z) = \ln(1,01^{-10}) \cdot 0,69\end{aligned}$$

ist äquivalent zum System

$$\begin{aligned}\mu_Z &= \frac{1}{2}\sigma_Z^2 + 10 \cdot \ln(1,01) \\ 0 &= \sigma_Z^2 - 2\sigma_Z \cdot \Phi^{-1}(0,995) + 6,2 \cdot \ln(1,01)\end{aligned}$$

und hat die beiden Lösungsvektoren $(\mu_Z, \sigma_Z) = (0,099575; 0,012003)$ und $(\mu_Z, \sigma_Z) = (13,307532; 5,139655)$.

- b) Wegen der Unabhängigkeit von Z und S gilt $Z + S \sim \mathcal{N}(\mu_Z + \mu_S, \sigma_Z^2 + \sigma_S^2)$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}SCR_{\text{gesamt}} &= VaR_{99,5\%}(PV) - \mathbb{E}(PV) \\ &= 10000 \cdot \exp\left(-(\mu_Z + \mu_S) + \sqrt{\sigma_Z^2 + \sigma_S^2} \cdot \Phi^{-1}(0,995)\right) \\ &\quad - 10000 \cdot \exp\left(-(\mu_Z + \mu_S) + \frac{\sigma_Z^2 + \sigma_S^2}{2}\right) \\ &= 9052,76 - 8772,23 = 280,53.\end{aligned}$$

- c) Mit

$$\begin{aligned}SCR_{\text{Zins}} &= 9690 \cdot \exp(-\mu_Z + \sigma_Z \cdot \Phi^{-1}(0,995)) - \mathbb{E}(PV) = 274,80, \\ SCR_{\text{Sterblichkeit}} &= 10000 \cdot 1,01^{-10} \cdot \exp(-\mu_S + \sigma_S \cdot \Phi^{-1}(0,995)) - \mathbb{E}(PV) = 55,42\end{aligned}$$

liefert die Wurzelformel

$$SCR_{\text{Wurzel}} = \sqrt{SCR_{\text{Zins}}^2 + SCR_{\text{Sterblichkeit}}^2} = 280,34.$$

- d) Die Kapitalanforderung für den Risikofaktor Zins ist so bemessen, dass sie den Anstieg der Verbindlichkeiten gegenüber dem Erwartungswertszenario im Falle eines Zinsrückgangs mit Wahrscheinlichkeit 99,5% ausgleichen kann. Dabei wird der Einfluss der Sterblichkeit unverändert auf dem konstanten Niveau ihres Erwartungswertes belassen. Das Zinsrückgangsszenario wird durch das 99,5%-Quantil der negativen Zinsintensität $(-Z)$, d.h. durch das negative 0,5%-Quantil der Zinsintensität beschrieben.

Die Kapitalanforderung für den Risikofaktor Sterblichkeit ist so bemessen, dass sie den Anstieg der Verbindlichkeiten gegenüber dem Erwartungswertszenario im Falle eines Rückgangs der Sterbeintensität mit Wahrscheinlichkeit 99,5% ausgleichen kann. Dabei wird der Einfluss des Zinses unverändert auf dem konstanten Niveau seines Erwartungswertes belassen.

Die Wurzelformel beschreibt die Kapitalanforderung für eine Summe von multivariat normalverteilten Teilrisiken korrekt. Im vorliegenden Ansatz wird jedoch das Produkt



von lognormalverteilten Risikofaktoren betrachtet. Aufgrund der Nichtlinearität der Exponentialfunktion entstehen Abweichungen.

Anmerkung. Die Bestimmungsgleichungen für den Value at Risk wurden in Teil a) in Anlehnung an die Zins- und Sterblichkeitsschocks aus der Standardformel von Solvency II gewählt.

5. a) Zunächst müssen unter Verwendung der laufzeitkongruenten Zinssätze die Barwerte der Verpflichtung bzw. des Zero-Bonds berechnet werden:

$$\text{Barwert der Verpflichtung} = 1 \text{ Mio. €} * 1,04^{-20} = 0,456 \text{ Mio. €}$$

$$\text{Barwert des Zero-Bonds} = 0,6 \text{ Mio. €} * 1,02^{-10} = 0,492 \text{ Mio. €}$$

Hieraus ergibt sich dann:

$$\text{Assets} = \text{Aktien} + \text{Zero-Bond} = 0,1 \text{ Mio. €} + 0,492 \text{ Mio. €} = 0,592 \text{ Mio. €}$$

$$\text{Liabilities} = 0,456 \text{ Mio. €}$$

$$\text{vorhandenes Risikokapital} = 0,592 \text{ Mio. €} - 0,456 \text{ Mio. €} = 0,136 \text{ Mio. €}$$

- b) Es ergeben sich die folgenden benötigten Risikokapitale

- für das Aktienrisiko:

$$\text{benötigtes Risikokapital} = \text{Marktwert der Aktien} * \text{Aktienschock} = 0,1 \text{ Mio. €} * 0,2 = 0,02 \text{ Mio. €},$$

- für das Zinsänderungsrisiko:

$$\text{Wertänderung des Zero-Bonds: } 0,6 \text{ Mio. €} * (1,01^{-10} - 1,02^{-10}) = 0,051 \text{ Mio. €},$$

$$\text{Wertänderung der Verpflichtung: } 1 \text{ Mio. €} * (1,02^{-20} - 1,04^{-20}) = 0,217 \text{ Mio. €},$$

$$\text{benötigtes Risikokapital} = 0,217 \text{ Mio. €} - 0,051 \text{ Mio. €} = 0,166 \text{ Mio. €}.$$

Insgesamt ergibt sich ein benötigtes Risikokapital von $0,02 \text{ Mio. €} + 0,166 \text{ Mio. €} = 0,186 \text{ Mio. €}$.

Das benötigte Risikokapital übersteigt das vorhandene Risikokapital. Daher ist die Konsequenz, die sich aus der Realisation des betrachteten Stressszenarios für das Unternehmen ergibt, die Insolvenz.

- c) Wenn die Aktienposition nicht verändert werden soll, besteht die sinnvollste Reallokationsstrategie im Verkauf des zehnjährigen Zero-Bonds im Wert von 0,492 Mio. € und dem Kauf eines zwanzigjährigen Zero-Bonds aus dem Erlös. Da der Barwert der Verpflichtung mit 0,456 Mio. € unterhalb des Wertes des Zero-Bonds liegt, wird der zwanzigjährige Zero-Bond einen Endwert von über 1 Mio. € haben. Die Verpflichtung kann somit sicher aus dem Fälligkeitsbetrag des Zero-Bonds bedient werden. Es besteht somit kein Risiko mehr aus einem Zinsrückgang. (Bemerkung: Rechnet man die Marktwertveränderung exakt durch, so ergibt sich ein „negatives“ Risikokapital, das hier in der Argumentation mit Null maximiert wurde. Die Verwendung des negativen Wertes ist aber ebenso eine richtige Lösung.) Das verbleibende Aktienrisiko in Höhe von 0,02 Mio. € wird durch das vorhandene Risikokapital deutlich überdeckt. Daher hat sich die Risikosituation des Unternehmens nach Reallokation deutlich verbessert. Das vorgegebene Stressszenario führt nicht mehr zur Insolvenz.
- d) Aktien (wie auch andere Substanzwerte) sind gegenüber Zinsänderungen nicht sensitiv. Eine Erhöhung der Aktienquote reduziert aber die zinssensitiven festverzinslichen Anlagen. Im Falle eines Zinsrückgangs steigt damit der Wert der Assets weniger stark



DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Dr. Guido Bader, Wolfgang Deichl
Dr. Volker Goersmeyer, Prof. Dr. Jochen Wolf

an. Das benötigte Risikokapital für das Zinsänderungsrisiko, nämlich die Differenz aus dem Wertanstieg der Verpflichtungen abzüglich dem Wertanstieg der festverzinslichen Wertpapiere, wird größer.

- e) Eine vergleichbare Immunisierungsstrategie ist für deutsche Lebensversicherer im Regelfall nicht möglich. Die folgenden Gründe können hierfür genannt werden:
- Die Verpflichtungen deutscher Lebensversicherer haben zu großen Teilen Laufzeiten von vielen Jahrzehnten. Für diese Laufzeiten existiert aber kein hinreichend tiefer und liquider Markt an sicheren festverzinslichen Anlagen.
 - Das aktuelle sichere Zinsniveau liegt weit unterhalb der durchschnittlichen Garantien im Bestand (sogar unterhalb des aktuellen Garantiezinses für das Neugeschäft). Eine Anlage in sicheren, laufzeitkongruenten festverzinslichen Papieren würde also das „Einloggen“ sicherer Verluste implizieren.
 - Eine vergleichbare Immunisierungsstrategie würde die Realisation stiller Reserven in großem Umfang bedeuten. Auf Grund der Mindestzuführung zur RfB würden diese Reserven aber für die Überschussbeteiligung verwendet werden müssen und stünden nicht zur Sicherung der Garantien zur Verfügung. Hier gibt es also negative Auswirkungen handelsrechtlicher Vorschriften auf die ökonomische Bilanz.
 - u.v.m.