DAV
DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Dr. Guido Bader, Wolfgang Deichl
Dr. Volker Goersmeyer, Prof. Dr. Jochen Wolf

Klausur im Grundwissen
Wertorientiertes Risikomanagement

09.05.2014

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt **90**. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens **36** Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1. (28 Punkte) *Ökonomische Bewertung, Risikokapital und Erfolgsmessung.*
Die Run-Off AG ist ein Lebensversicherungsunternehmen, das zum 31.12.2012 bzw. zum 31.12.2013 die folgende ökonomische Bewertung aufweist. Alle Werte sind in Mio. Euro angegeben.

Ökonomische Bewertung zum 31.12.2012

ökonomische Aktiva		ökonomische Verbindlichkeiten	
Kapitalanlagen	790	versicherungstechnische Verbindlichkeiten	630
sonstige Aktiva	50	sonstige Passiva	20

Ökonomische Bewertung zum 31.12.2013

ökonomische Aktiva		ökonomische Verbindlichkeiten	
Kapitalanlagen	860	versicherungstechnische Verbindlichkeiten	680
sonstige Aktiva	50	sonstige Passiva	20

- Seit einigen Jahren schreibt die Run-Off AG kein Neugeschäft mehr, befindet sich also in Abwicklung. Der Bestand besteht ausschließlich aus gemischten Kapitalversicherungen mit einem Garantiezins von 4%.
- Im Jahr 2013 wurde eine Dividende von 10 Mio. Euro an den Aktionär ausgeschüttet.

a) (2 Punkte) Geben Sie **zwei** mögliche Gründe dafür an, warum die ökonomische Bilanzsumme des Unternehmens von 2012 auf 2013 ansteigt, obwohl die Run-Off AG kein Neugeschäft mehr zeichnet.

b) (3 Punkte) Geben Sie die Bestandteile der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten bei ökonomischer Bewertung an. Nennen Sie **zwei** Schwierigkeiten, die mit deren Berechnung verbunden sind.

c) (3 Punkte) Den Best Estimate der Verpflichtungen ermittelt das Unternehmen als Barwert aus einer Projektion der zukünftigen Cashflows. Dabei werden die Cash-Flows auf Run-Off Basis ermittelt. Nennen Sie **drei** Unterschiede hinsichtlich der Annahmen, die bei einer Projektion auf Run-Off Basis im Gegensatz zu einer Projektion auf Going-Concern Basis zu treffen sind.

Im veröffentlichten Risikobericht schreibt die Run-Off AG, dass sie ein internes Simulationsmodell zur Quantifizierung ihrer Risiken auf Basis einer ökonomischen Bewertung einsetzt. Die 10 schlechtesten Resultate aus 1000 Simulationen für das ökonomische Ergebnis lauten:

	x-schlechtestes Ergebnis (Positive Werte stellen Verluste dar.)									
Nr.	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
Run-Off AG	150	160	165	170	200	220	270	320	380	480

d) (2 Punkte) Ermitteln Sie das ökonomische Eigenkapital zum 31.12.2012 sowie zum 31.12.2013 und den ökonomischen Gewinn als Differenz der ökonomischen Eigenkapitalien zum Jahresende unter Berücksichtigung einer Dividendenzahlung in Höhe von 10 Mio. Euro im Jahr 2013.

e) Das vorhandene Risikokapital ermittelt das Unternehmen als Mittelwert der Risikokapitalien zum 31.12.2012 und zum 31.12.2013. Als Risikomaß verwendet das Unternehmen den Value at Risk.

(i) (1 Punkt) Berechnen Sie das vorhandene Risikokapital.

(ii) (1 Punkt) Bei welchem Sicherheitsniveau stimmen vorhandenes und benötigtes Risikokapital überein?

f) Der Unternehmenseigner gibt für das Sicherheitsniveau 99,1% eine Hurdle Rate von 20% vor. Der sichere Zins betrage 4%.

(i) (2 Punkte) Bestimmen Sie unter der Prämisse, dass Excess-Kapital gegenüber dem Aktionär nur mit dem sicheren Zins zu verzinsen ist, die zum Sicherheitsniveau aus Aufgabenteil e) (ii) passende Hurdle Rate.

(ii) (2 Punkte) Berechnen Sie den EVA für die Run-Off AG im Jahr 2013. Schafft das Unternehmen im Jahr 2013 Wert?

Die Run-Off AG gehört zu einem Versicherungskonzern, zu dem auch noch ein Krankenversicherungsunternehmen (PKV AG) sowie ein Sachversicherer (Sach AG) gehören. Mit dem Simulationsmodell wurden in je 1.000 Simulationen die ökonomischen Ergebnisse des gesamten Konzerns, von je zwei der drei Konzernunternehmen zusammen und der drei Konzernunternehmen alleine ermittelt. Es ergaben sich die folgenden Werte.

	x-schlechtestes Ergebnis (Positive Werte stellen Verluste dar.)									
Nr.	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
Konzern	350				x					
Run-Off AG und PKV AG	200				350					
Run-Off AG und Sach AG	220				300					
PKV AG und Sach AG	200				250					
Run-Off AG	150	160	165	170	200	220	270	320	380	480
PKV AG	150				200					
Sach AG	150				200					

g) Der Konzern verwendet als Risikomaß den Value at Risk zum Niveau 99,5%. Das benötigte Risikokapital wird mittels des Shapley-Algorithmus auf die drei Töchter allokiert.

(i) (3 Punkte) Bestimmen Sie das auf die Run-Off AG allokierte benötigte Risikokapital in Abhängigkeit von x.

(ii) (2 Punkte) Ab welchem Wert von x wäre es für die Run-Off AG aus Risikokapitalüberlegungen heraus günstiger, aus dem Konzernverbund auszuscheiden?

h) Es sei x = 525 Mio. Euro. Wie in Aufgabenteil f) gibt der Unternehmenseigner für das Sicherheitsniveau 99,1% eine Hurdle Rate von 20% vor. Der sichere Zins betrage 4%. Nun betrachten wir - im Gegensatz zu Aufgabenteil f) - die Run-Off AG als Konzernunternehmen mit den entsprechenden allokierten Risikokapitalien gemäß Shapley.

(i) (4 Punkte) Bestimmen Sie unter der Prämisse, dass Excess-Kapital sicher angelegt wird, die zum Sicherheitsniveau 99,5% passende Hurdle Rate.

(ii) (1 Punkt) Berechnen Sie den EVA für die Run-Off AG im Jahr 2013.

(iii) (2 Punkte) Begründen Sie, warum das Unternehmen nun - im Gegensatz zu Aufgabenteil f) - Wert schafft.

Dr. Guido Bader, Wolfgang Deichl
Dr. Volker Goersmeyer, Prof. Dr. Jochen Wolf

Aufgabe 2. (17 Punkte) *Szenarioanalyse und ORSA/FLAOR.*
Betrachten Sie ein deutsches Versicherungsunternehmen (VU) mit folgenden Eckdaten per 31.12.2013:

- Die Kapitalanlagen haben einen HGB-Buchwert von EUR 350 Mio., davon entfallen
  - EUR 189 Mio. auf deutsche Staatsanleihen (54%),
  - EUR 63 Mio. auf Staatsanleihen anderer Länder der Euro-Zone mit Non-Investment Grade Rating (18%),
  - EUR 56 Mio. auf Unternehmensanleihen aus der Euro-Zone (16%),
  - EUR 28 Mio. auf Aktien (8%),
  - EUR 14 Mio. auf Cash (4%).
- Die aufsichtsrechtlichen Eigenmittel nach Solvency I betragen EUR 120 Mio. und stellen eine Bedeckung des aufsichtsrechtlichen Risikokapitalbedarfs (Solvabilitätsspanne gemäß Solvency I) von 150% dar.
- Bewertungsreserven der Kapitalanlagen sind nicht vorhanden.

Für dieses VU sollen die folgenden drei Szenarien analysiert werden, die allesamt als plausibel identifiziert wurden:

- Szenario 1: Die Aktieninvestments des VU verlieren aufgrund eines Aktien-Crashs 40% ihres Wertes.
- Szenario 2: Die EURO-Krise lebt wieder auf, und 50% der ausländischen Staatsanleihen sowie 30% der Unternehmensanleihen fallen vollständig aus.
- Szenario 3: Das ökonomische Umfeld erfährt während der nächsten Jahre die geplante positive Entwicklung; das Versicherungsgeschäft bleibt wie geplant konstant.

a) (3 Punkte) Welche der 3 Szenarien sind für das ORSA/FLAOR des VU geeignet? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) (4 Punkte) Führen Sie zu jedem der Szenarien eine konkrete quantitative Risikobewertung zum 31.12.2013 auf der Basis einer HGB-Bewertung unter Betrachtung von Solvency I-Quoten durch. Ermitteln Sie dafür das Stresstestkapital als Wertverlust im jeweiligen Szenario (sogenanntes „stand-alone“ Risikokapital für das jeweilige Szenario) und prüfen Sie, ob nach Stress die aufsichtsrechtlichen Eigenmittel immer noch die vom VU angestrebte Bedeckungsquote der Solvabilitätsspanne von mindestens 120% gewährleisten.

c) (4 Punkte) Skizzieren Sie eine Risikomatrix und ordnen Sie die drei Szenarien in die Felder Ihrer Matrix ein. Bitte spezifizieren Sie die Felder Ihrer Matrix genau (z.B. durch Angaben auf der „x-Achse“ und der „y-Achse“) und begründen Sie Ihre Einordnung kurz.

d) (6 Punkte) Nennen Sie jeweils eine geeignete Risikosteuerungsmaßnahme für jedes der drei Szenarien und skizzieren Sie in Stichpunkten einen kurzen Kommentar für das ORSA/FLAOR zur Adressierung dieser Risikosteuerung.

DAV
DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Dr. Guido Bader, Wolfgang Deichl
Dr. Volker Goersmeyer, Prof. Dr. Jochen Wolf

Aufgabe 3. (15 Punkte) *Kapitalallokation.*
Der Zufallsvektor $X = (X_1, X_2, X_3)$ sei multivariat normalverteilt mit Korrelationsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,8 \\ 0 & 0,8 & 1 \end{pmatrix},$$

und es gelte $X_1 \sim \mathcal{N}(-3, 81)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(-4, 121)$ und $X_3 \sim \mathcal{N}(-2, 49)$. X_i modelliere den Verlust von Einheit i eines Unternehmens, das als Risikomaß den Value at Risk zum Niveau $0,99$ verwendet.

a) (6 Punkte) Berechnen Sie $VaR_{0,99}(X_1 + X_2 + X_3)$ und allokieren Sie dieses Risikokapital auf die Einheiten $i = 1, 2, 3$ mit Hilfe des Kovarianzprinzips.

b) (4 Punkte) Berechnen Sie $VaR_{0,99}(X_1 + X_2)$ und allokieren Sie dieses Risikokapital auf die Einheiten $i = 1, 2$ mit Hilfe des Kovarianzprinzips.

c) (5 Punkte) Berechnen Sie den RORAC der Einheit 2 jeweils in Situation von Teilaufgabe a) bzw. b), indem Sie einen Nettogewinn in Höhe des negativen erwarteten Verlustes unterstellen. Diskutieren Sie, welche der folgenden drei Organisationsformen Einheit 2 bevorzugen würde:

   - Selbständigkeit,
   - Verbund mit Einheit 1,
   - Verbund mit Einheiten 1 und 3.

   Welche dieser drei Organisationsformen wird Einheit 2 tatsächlich realisieren?

Hinweis. $\Phi^{-1}(0,99) = 2,3263$.

Aufgabe 4. (15 Punkte) *Risikomaße.*
Betrachten Sie die Schadengröße X mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \exp\left(-0,1\sqrt{x}\right), \quad x \geq 0.$$

a) (6 Punkte) Bestimmen Sie die Risikomaße $VaR_{0,99}(X)$ und $ES_{0,99}(X)$.

b) (9 Punkte) Um welchen Betrag sinkt der Risikokapitalbedarf auf Basis des Risikomaßes $ES_{0,99}$ nach Abschluss einer Rückversicherung, die $\frac{3}{4}$ des Schadens, höchstens jedoch 1800 erstattet?

Hinweise.

- $\int (\ln(x))^2 \, dx = x\,(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x$
- $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = \lim_{x\to 0} x(\ln(x))^2 = 0$
- $\int x^2 \exp(ax)\, dx = \exp(ax)\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)$

Aufgabe 5. (15 Punkte) *Copulas.*
Seien Z eine stetige Zufallsgröße und F und G stetige, streng monoton wachsende Funktionen. Wir setzen $X_1 := F(Z)$ und $X_2 := G(Z)$.

a) (6 Punkte) Bestimmen Sie die Copula von (X_1, X_2).

b) (3 Punkte) Sei $\alpha \in (0,1)$. Zeigen Sie: $VaR_\alpha(X_1 + X_2) = VaR_\alpha(X_1) + VaR_\alpha(X_2)$.

c) Betrachten Sie nun den Spezialfall $Z \sim \mathcal{N}(-3, \frac{9}{4})$, $F(x) = \exp(x)$ und $G(x) = \exp(2x)$.

(i) (2 Punkte) Berechnen Sie den Value at Risk der Summe $VaR_{0,99}(X_1 + X_2)$ mit Hilfe der Beziehung aus b).
Hinweis. $\Phi^{-1}(0,99) = 2,3263$.

(ii) (2 Punkte) Die lineare Korrelation $\varrho_{(X_1,X_2)} = \frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{Var(X_1)}\sqrt{Var(X_2)}}$ von X_1 und X_2 beträgt $\varrho_{(X_1,X_2)} = 0,33945$. Diskutieren Sie die Aussagekraft der linearen Korrelation in diesem Spezialfall.

(iii) (2 Punkte) Die **formale** Anwendung der folgenden – auch im Rahmen der Standardformel von Solvency II vorgesehenen – Wurzelformel

$$
\begin{aligned}
&VaR^{(W)}_{0,99}(X_1 + X_2) \\
&\quad = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \Bigg(\sum_{i=1}^{2} \left(VaR_{0,99}(X_i) - \mathbb{E}(X_i)\right)^2 \\
&\qquad + 2 \cdot \varrho_{(X_1,X_2)} \cdot \left(VaR_{0,99}(X_1) - \mathbb{E}(X_1)\right) \cdot \left(VaR_{0,99}(X_2) - \mathbb{E}(X_2)\right) \Bigg)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

liefert mit dem Wert der linearen Korrelation aus c) (ii) das aggregierte Risikokapital $VaR^{(W)}_{0,99}(X_1 + X_2) = 3,6292$. Welches Problem der Standardformel von Solvency II wird anhand dieses Beispiels deutlich?

Dr. Guido Bader, Wolfgang Deichl
Dr. Volker Goersmeyer, Prof. Dr. Jochen Wolf

Lösungen

1. a) Als mögliche Gründe kommen in Betracht:
   - Auch im Run-Off nimmt das Unternehmen noch Beiträge aus den bestehenden Vertragsverhältnissen ein, die die Bilanzsumme erhöhen.
   - Durch Kapitalerträge (vereinnahmte Kupons oder Dividenden, Steigerungen des ökonomischen Wertes auf Grund von Zins- oder anderen Kursänderungen) wird die Bilanzsumme ebenfalls erhöht.
   - Auf Grund eines möglichen Zinsrückgangs können - trotz Abläufen und Storni - die ökonomisch bewerteten Verbindlichkeiten und Kapitalanlagen deutlich angestiegen sein.
   - u.v.m.

   Hinweis: Es waren nur zwei Gründe gefragt.

   b) Die versicherungstechnischen Verbindlichkeiten bei ökonomischer Bewertung bestehen aus dem besten Schätzwert für die diskontierten zukünftigen Verpflichtungen inkl. eines Wertansatzes für die Optionen und Garantien. Dazu kommt eine Risikomarge. Die folgenden Schwierigkeiten bei der Berechnung der ökonomischen Verpflichtungen können genannt werden:
   - Für die Ermittlung der zukünftigen Zahlungsströme sind zahlreiche Annahmen über die künftige Entwicklung zu treffen und zu validieren.
   - Zur Ermittlung des Wertansatzes für die Optionen und Garantien sind stochastische Simulationstechniken erforderlich, oder es ist nur ein sehr grober und ungenauer Wertansatz möglich.
   - Für die Ermittlung der Risikomarge wird meist ein Kapitalkostenansatz verwendet, für den die benötigten Risikokapitalien für alle zukünftigen Perioden ermittelt werden müssen.
   - u.v.m.

   Hinweis: Es waren nur zwei Schwierigkeiten gefragt.

   c) Die folgenden Unterschiede können genannt werden:
   - Bei der Run-Off Basis müssen andere Storno-Annahmen getroffen werden.
   - Auf Grund von Antiselektion müssen bei der Run-Off Basis andere Sterblichkeitsannahmen getroffen werden.
   - Mit schrumpfendem Bestand wird die Run-Off AG zunehmen durch Fixkosten belastet, so dass andere Kostenannahmen zu treffen sind.
   - Auf Grund des Run-Offs muss das Unternehmen nicht mehr attraktiv für den Markt sein, so dass andere Annahmen zur Überschussbeteiligung getroffen werden können.
   - u.v.m.

   Hinweis: Es waren nur drei Unterschiede gefragt.

d) Die ökonomischen Eigenkapitalien zum 31.12.2012 bzw. 31.12.203 ermitteln sich wie folgt:

$$\begin{aligned} EK_{2012} &= 790 + 50 - 630 - 20 = 190 \text{ Mio. Euro,} \\ EK_{2013} &= 860 + 50 - 680 - 20 = 210 \text{ Mio. Euro.} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der folgende ökonomische Gewinn unter Berücksichtigung der Dividende:

$$\ddot{o}G = 210 - 190 + 10 = 30 \text{ Mio. Euro.}$$

e) (i) Das vorhandene Risikokapital ergibt sich als Mittelwert von EK_{2012} und EK_{2013} als $(190 + 210)/2 = 200$ Mio. Euro.

(ii) Gemäß der Tabelle mit den Simulationsergebnissen stimmen vorhandenes und benötigtes Risikokapital bei einem Sicherheitsniveau von 99,5% überein.

f) (i) Gemäß Aufgabenteil e) ist das mit dem vorhandenen Risikokapital korrespondierende Sicherheitsniveau 99,5%. Für das Sicherheitsniveau von 99,1% benötigt das Unternehmen ein Risikokapital von 150 Mio. Euro. Das Exzess-Kapital beträgt damit 50 Mio. Euro. Die zum Niveau 99,5% passende Hurdle-Rate ergibt sich damit als y aus der folgenden Gleichung:

$$200 \cdot y = 150 \cdot 20\% + 50 \cdot 4\% = 32, \text{ also } y = 16\%.$$

(ii) Mit der Hurdle-Rate aus Teil f) (i) und dem ökonomischen Gewinn öG aus Aufgabenteil d) ergibt sich der $EVA = 30 - 200 \cdot 16\% = -2$ Mio. Euro. Das Unternehmen vernichtet somit Wert.

g) (i) Die für die Berechnung des Shapley-Algorithmus benötigten „Stand-Alone-Risikokapitalien“ für das Risikomaß Value at Risk zum Niveau 99,5% können direkt als sechst-schlechteste Werte aus der Tabelle abgelesen werden:
$C^*_{\text{Konzern}} = x$,
$C^*_{\text{Run-Off und PKV}} = 350$, $C^*_{\text{Run-Off und Sach}} = 300$, $C^*_{\text{PKV und Sach}} = 250$,
$C^*_{\text{Run-Off}} = 200$, $C^*_{\text{PKV}} = 200$, $C^*_{\text{Sach}} = 200$.

Mit dem Shapley-Algorithmus ergibt sich dann als benötigtes Risikokapital für die Run-Off AG:

$$C_{\text{Run-Off}} = (x - 250)/3 + (350 - 200)/6 + (300 - 200)/6 + 200/3 = \frac{x}{3} + 25.$$

(ii) Die Run-Off AG wird nur solange im Konzernverbund verbleiben, wie das allokierte Risikokapital nicht über dem Stand-Alone-Risikokapital liegt, solange also $\frac{x}{3} + 25 \leq 200$, d.h. $x \leq 525$ Mio. Euro gilt.

h) Hier gilt es im Wesentlichen, die Berechnungen aus Aufgabenteil f) für die allokierten Risikokapitalien zu wiederholen.

(i) Zunächst muss das benötigte Risikokapital der Run-Off AG zum Niveau 99,1% unter Verwendung des Value at Risk als Risikomaß und des Shapley-Algorithmus als Allokationsverfahren ermittelt werden. Analog zu g) (i) erhält man:

$C^*_{\text{Konzern}} = 350$,
$C^*_{\text{Run-Off und PKV}} = 200$, $C^*_{\text{Run-Off und Sach}} = 220$, $C^*_{\text{PKV und Sach}} = 200$,
$C^*_{\text{Run-Off}} = 150$, $C^*_{\text{PKV}} = 150$, $C^*_{\text{Sach}} = 150$.

Mit dem Shapley-Algorithmus ergibt sich dann als benötigtes Risikokapital für die Run-Off AG:

$C_{\text{Run-Off}} = (350-200)/3+(200-150)/6+(220-150)/6+150/3 = 120$ Mio. Euro.

Damit ergibt sich analog zu f) (i) als Hurdle Rate:

$$200 \cdot y = 120 \cdot 20\% + 80 \cdot 4\% = 27,2, \text{ also } y = 13,6\%.$$

(ii) Damit ergibt sich nun der $EVA = 30 - 200 \cdot 13,6\% = 2,8$ Mio. Euro.

(iii) Die Wertschaffung ist darin begründet, dass die Run-Off AG bei der hier angesetzten Konzernsicht vom Diversifkationseffekt profitiert. Die Kapitalkosten reduzieren sich um 16% der diversifikationsgetriebenen Einsparung des Risikokapitals gemäß 99,1% Sicherheitsniveau - d.h. $16\% \cdot (150 \text{ Mio. Euro} - 120 \text{ Mio. Euro}) = 4,8$ Mio. Euro. Diese Ersparnis an Kapitalkosten ist größer als die ursprüngliche Wertvernichtung von 2 Mio. Euro.

2. a) Jedes der drei Szenarien ist ein geeigneter Kandidat für das ORSA/FLAOR. Szenarien 1 und 2 können für die Analyse des Risikoprofils unter Berücksichtigung adverser Entwicklungen herangezogen werden. Szenario 3 sollte die Basis für die Analyse der Entwicklung des Solvabilitätsbedarfs während der nächsten Jahre liefern.

b) Ein Bedeckungsgrad von 120% ist erreicht, wenn Eigenmittel in Höhe von

$$\frac{120 \text{ Mio. EUR}}{1,5} \cdot 1,2 = 96 \text{ Mio. EUR}$$

vorliegen.

- quantitative Bewertung von Szenario 1: Der Aktienschock löst einen Wertverlust von 11,2 Mio. EUR aus. Die Eigenmittel betragen nach Stress $120 - 11,2 = 108,8$ Mio. EUR. Folglich liegt eine ausreichende Bedeckung vor.
- quantitative Bewertung von Szenario 2: Das Stresstestkapital beträgt 48,3 Mio. EUR. Nach Stress verbleiben Eigenmittel in Höhe von $120 - 48,3 = 71,7$ Mio. EUR. Folglich wird die Zielbedeckungsquote deutlich unterschritten.
- quantitative Bewertung von Szenario 3: Hier wird keine adverse Entwicklung unterstellt, d.h. das Stresstestkapital in diesem Szenario ist 0.

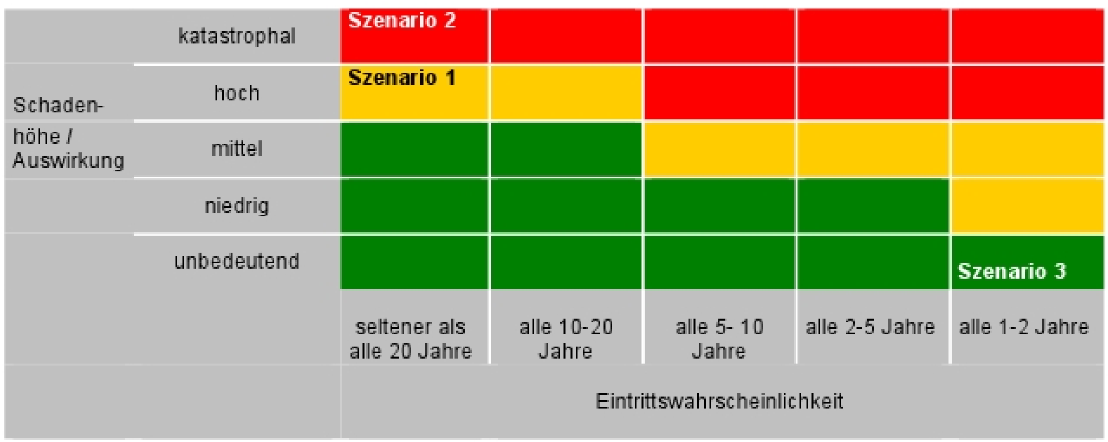
c) Die Risikomatrix muss eine grobe Bewertung jedes Szenarios hinsichtlich Schadenhöhe und Eintrittswahrscheinlichkeit reflektieren. Grundlage für die Schadenhöhe kann bereits Aufgabe 2 b) liefern:

- Szenario 1 vernichtet ca. 10% der Eigenmittel des Unternehmens, die Auswirkung ist als „hoch“ einzuschätzen.

- Szenario 2 ist sicherlich als „katastrophal“ zu bewerten, da es ohne weitere Maßnahmen zur Insolvenz des Unternehmens führt.
- Szenario 3 impliziert keine adverse Entwicklung, ist aus Sicht eines potentiellen Schadens daher „unbedeutend“.

Die Eintrittswahrscheinlichkeit kann folgendermaßen definiert werden:

- Szenario 1: Aktienschocks von 40% sind absolute Extrem-Events, sie finden seltener als alle 20 Jahre statt.
- Szenario 2: Ein derart extremes Ausfallszenario für Staatsanleihen der Euro-Zone ist ebenfalls sehr unwahrscheinlich (weniger als 5% bzw. seltener als alle 20 Jahre).
- Szenario 3 reflektiert das Planszenario, es ist also davon auszugehen, dass es alle 1-2 Jahre eintreten sollte.



d) Die Risikosteuerungsmaßnahmen könnten wie folgt ausgestaltet werden:

Risikosteuerung zu Szenario 1: Mit Hilfe eines Limitsystems für die Aktieninvestments sollte sichergestellt werden, dass die Aktienquote des VU höchstens so weit steigt, dass im betrachteten Szenario höchstens die Differenz zwischen vorhandenem und benötigtem Risikokapital (d.h. maximal 24 Mio. EUR) aufgebraucht wird.

Risikosteuerung zu Szenario 2: Umsetzung eines Plans zur Reduktion der eingegangenen Kreditrisiken im Euro-Raum, z.B. durch

- Umschichtung ausländischer Staatsanleihen in Anlagen von Ländern mit besserem Rating (oder durch Absicherung via CDS-Geschäften),
- Umschichtung der Unternehmensanleihen, so dass das Konzentrationsrisiko des betrachteten Szenarios gesenkt wird, z.B. durch stärkere Diversifikation, Auswahl von Anlagen mit besserem Rating, Investition in Bonds außerhalb des Euro-Raums.

Insgesamt sollte das Verlustpotential für dieses Szenario dadurch auf maximal 24 Mio. EUR gesenkt werden. Zudem sollte durch ein Limitsystem sichergestellt werden, dass zukünftig ähnlich starke Konzentrationen in Staatsanleihen von Ländern mit weniger guter Bonität ausgeschlossen werden.

Risikosteuerung zu Szenario 3: Das VU muss auch in der Situation mit eher komfortabler Kapitalisierung im Vergleich zum Sicherheitsniveau durch geeignetes Risikomanagement sicherstellen, dass keine existenzgefährdenden Risiken eingegangen werden. Daher ist die Risikosteuerung bei sämtlichen risikorelevanten Entscheidungen zu berücksichtigen (Rückversicherung, Kapitalanlage, Produktentwicklung, etc.).

Als ein möglicher Kommentar für das ORSA/FLAOR kann angegeben werden:

- Ein Bestandteil des Risikomanagements unseres VU sind Limit-Systeme. Diese stellen sicher, dass Einzelrisiken die Risikotragfähigkeit des Unternehmens nicht übersteigen. Insbesondere wird dabei auf eine ausreichende Bedeckung der Solvabilität abgezielt, indem die Auswirkung von Schock-Szenarien untersucht wird, wobei der Zielwert nach Schock eine Bedeckungsquote von 120% darstellt.
- Im Jahr 2013 zeigte sich in diesem Zusammenhang, dass
  - die Aktienschocks im bestehenden Limitsystem gut kontrollierbar sind, so dass die Aktien-Limite weiterhin unverändert angewandt werden,
  - die eingegangenen Kreditrisiken zum Jahresende zu hoch waren und die Steuerung des Kreditrisikos verfeinert werden muss. Wir werden als Gegenmaßnahme bis zur Jahresmitte 2014 unser Portfolio umstrukturieren, so dass das Kreditrisiko gegenüber Staatsanleihen deutlich gesenkt wird. Zudem werden unsere Kreditrisiko-Limite für ausländische Staatsanleihen deutlich verschärft: kein Exposure gegenüber Ländern mit Rating von BBB+ oder schlechter und max. 5% des Anlagevolumens insgesamt in den Ratingklassen A+, A und A-.
- Neben den Stresstests wird durch Projektionsrechnungen verifiziert, dass die Solvabilität auch im zukünftigen Geschäftsbetrieb gewahrt bleibt.

3. a) Wir benötigen Kovarianzen und Varianz:

$$\begin{aligned}
Cov(X_1, X_1 + X_2 + X_3) &= 81, \\
Cov(X_2, X_1 + X_2 + X_3) &= 121 + 0,8 \cdot 11 \cdot 7 = 182,6, \\
Cov(X_3, X_1 + X_2 + X_3) &= 49 + 0,8 \cdot 11 \cdot 7 = 110,6, \\
Var(X_1 + X_2 + X_3) &= \sum_{i=1}^{3} Cov(X_i, X) = 374,2.
\end{aligned}$$

Wir berechnen

$$VaR_{0,99}(X_1 + X_2 + X_3) = -9 + \sqrt{374,2} \cdot \Phi^{-1}(0,99) = 36,00$$

und mit dem Kovarianzprinzip

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{Cov(X_1, X_1 + X_2 + X_3)}{Var(X_1 + X_2 + X_3)} \cdot 36 = \frac{81}{374,2} \cdot 36 = 7,79, \\
K_2 &= \frac{182,6}{374,2} \cdot 36 = 17,57, \\
K_3 &= \frac{110,6}{374,2} \cdot 36 = 10,64.
\end{aligned}$$

b) Analog zu a) betrachten wir nun den Verbund der Einheiten 1 und 2. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
Cov(X_1, X_1 + X_2) &= 81,\\
Cov(X_2, X_1 + X_2) &= 121,\\
Var(X_1 + X_2) &= 202,\\
VaR_{0,99}(X_1 + X_2) &= -7 + \sqrt{202} \cdot \Phi^{-1}(0,99) = 26,06,\\
K_1 &= \frac{Cov(X_1, X_1 + X_2)}{Var(X_1 + X_2)} \cdot 26,06 = \frac{81}{202} \cdot 26,06 = 10,45,\\
K_2 &= \frac{121}{202} \cdot 26,06 = 15,61.
\end{aligned}$$

c) Im Verbund mit Einheiten 1 und 3 erzielt Einheit 2 einen RORAC von $\frac{4}{17,57} = 22,77\%$, im Verbund ausschließlich mit Einheit 1 einen RORAC von $\frac{4}{15,61} = 25,62\%$.
Da das Risikomaß $VaR_{0,99}$ für multivariat normalverteilte Risiken subadditiv ist, ist ein nichnegativer Diversifaktionseffekt gewährleistet. Einheit 2 kann sich also eine Besserstellung durch Eingehen eines Verbundes ausrechnen. Nach der RORAC-Betrachtung würde Einheit 2 einen Verbund ausschließlich mit Einheit 1 dem Verbund mit Einheiten 1 und 3 vorziehen. Einheit 1 wird jedoch nur für den Verbund aller drei Einheiten zu gewinnen sein; denn beim Vergleich der beiden Verbundmöglichkeiten kann die Differenz der auf Einheit 1 allokierten Kapitalbeträge $10,45 - 7,79 = 2,66$ von Einheit 2 nicht kompensiert werden, da Einheit 2 der Einheit 1 höchstens die Übernahme der Kapitalkosten für die Differenz $17,57 - 15,61 = 1,96 < 2,66$ anbieten könnte. Also wird Einheit 2 unter den gegebenen Alternativen den Gesamtverbund mit Einheiten 1 und 3 realisieren.

4. a) Auflösen der Gleichung $1 - \exp(-0,1\sqrt{x}) = \alpha$ nach x führt auf den Value at Risk

$$VaR_\alpha(X) = 100(\ln(1-\alpha))^2.$$

Wir erhalten $VaR_{0,99}(X) = 2120,76$. Mit der Definition berechnen wir den Expected Shortfall:

$$\begin{aligned}
ES_{0,99}(X) &= \frac{1}{1-0,99} \int_{0,99}^{1} VaR_z(X)\, dz\\
&= 10000 \int_{0,99}^{1} (\ln(1-z))^2\, dz\\
&= 10000 \int_{0}^{0,01} (\ln(z))^2\, dz\\
&= 10000[z(\ln(z))^2 - 2z\ln(z) + 2z]_0^{0,01}\\
&= 10000(0,01 \cdot (\ln(0,01))^2 - 0,02 \cdot \ln(0,01) + 0,02)\\
&= 3241,79.
\end{aligned}$$

b) Nach Rückversicherung beträgt der Eigenanteil

$$Y = \begin{cases} \frac{1}{4}X & ; \quad X < 2400,\\ X - 1800; & X \geq 2400. \end{cases}$$

Da Y eine stetige streng monoton wachsende Funktion von X ist, gilt $\{Y > VaR_{0,99}(Y)\} = \{X > VaR_{0,99}(X)\}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
ES_{0,99}(Y) &= \mathbb{E}(Y|Y > VaR_{0,99}(Y)) = \mathbb{E}(Y|X > VaR_{0,99}(X)) \\
&= 100\Bigg(\int_{2120,76}^{2400} \frac{1}{4}x \cdot \frac{0,1}{2\sqrt{x}} \exp(-0,1\sqrt{x})\,dx \\
&\quad + \int_{2400}^{\infty} (x-1800) \cdot \frac{0,1}{2\sqrt{x}} \exp(-0,1\sqrt{x})\,dx\Bigg) \\
&= 2,5 \int_{\sqrt{2120,76}}^{\sqrt{2400}} y^2 \exp(-0,1y)\,dy + 10 \int_{\sqrt{2400}}^{\infty} y^2 \exp(-0,1y)\,dy \\
&\quad - 180000 \cdot \exp(-0,1\sqrt{2400}) \\
&= 2,5[\exp(-0,1y)(-10y^2 - 200y - 2000)]_{\sqrt{2120,76}}^{\sqrt{2400}} \\
&\quad + 10[\exp(-0,1y)(-10y^2 - 200y - 2000)]_{\sqrt{2400}}^{\infty} - 1341,75 \\
&= 1470,03.
\end{aligned}$$

Der Risikokapitalbedarf aus Basis des $ES_{0,99}$ sinkt um $3241,79 - 1470,03 = 1771,76$.

5. a) F und G sind nach Voraussetzung invertierbar. Für die gemeinsame Verteilungsfunktion erhalten wir daher

$$\begin{aligned}
F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) &= \mathbb{P}(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2) \\
&= \mathbb{P}(Z \le F^{-1}(x_1), Z \le G^{-1}(x_2)) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \le \min\left(F^{-1}(x_1), G^{-1}(x_2)\right)\right) \\
&= F_Z\left(\min\left(F^{-1}(x_1), G^{-1}(x_2)\right)\right) \\
&= \min\left(F_Z(F^{-1}(x_1)), F_Z(G^{-1}(x_2))\right) \\
&= \min\left((F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right).
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Sklar hat (X_1, X_2) die obere Fréchet-Schranke $C(u_1,u_2) = \min(u_1,u_2)$ als Copula.

b) Da die Funktionen F, G und $F+G$ stetig und streng monoton wachsend sind, gilt

$$\begin{aligned}
VaR_\alpha(X_1+X_2) &= VaR_\alpha((F+G)(Z)) = (F+G)(VaR_\alpha(Z)) \\
&= F(VaR_\alpha(Z)) + G(VaR_\alpha(Z)) = VaR_\alpha(F(Z)) + VaR_\alpha(G(Z)) \\
&= VaR_\alpha(X_1) + VaR_\alpha(X_2).
\end{aligned}$$

c) (i) Da $\exp(Z)$ und $\exp(2Z)$ lognormalverteilt sind, erhalten wir nach b) für das aggregierte Risikokapital den korrekten Wert

$$\begin{aligned}
VaR_{0,99}(X_1+X_2) &= VaR_{0,99}(\exp(Z)) + VaR_{0,99}(\exp(2Z)) \\
&= \exp\left(-3 + \frac{3}{2}\Phi^{-1}(0,99)\right) + \exp\left(-6 + 3\Phi^{-1}(0,99)\right) \\
&= 1,6315 + 2,6619 = 4,2934.
\end{aligned}$$

(ii) Mit den Formeln für Erwartungswert und Varianz einer Lognormalverteilung berechnen wir zunächst die lineare Korrelation

$$\begin{aligned}
\varrho_{(X_1,X_2)} &= \frac{\mathbb{E}(X_1X_2)-\mathbb{E}X_1\cdot\mathbb{E}X_2}{\sqrt{Var(X_1)}\sqrt{Var(X_2)}}\\
&= \frac{\mathbb{E}(\exp(3Z))-\mathbb{E}(\exp(Z))\cdot\mathbb{E}(\exp(2Z))}{\sqrt{Var(\exp(Z))Var(\exp(2Z))}}\\
&= \frac{e^{-9+\frac{81}{8}}-e^{-9+\frac{9+36}{8}}}{\sqrt{e^{-6+\frac{9}{4}}(e^{\frac{9}{4}}-1)e^{-12+9}(e^9-1)}}\\
&= \frac{e^{\frac{9}{2}}-1}{\sqrt{(e^{\frac{9}{4}}-1)(e^9-1)}}\\
&= 0,33945.
\end{aligned}$$

Obwohl X_1 und X_2 eine perfekte Abhängigkeit aufweisen, nimmt die Korrelation einen Wert an, der deutlich unter dem maximalen Wert 1 liegt. Bei nicht linearen Abhängigkeiten hat die Korrelation oft nur eine beschränkte Aussagekraft.
Anmerkung. Die Berechnung der linearen Korrelation ist nicht Bestandteil der Aufgabenstellung, da dort der Wert angegeben ist.

(iii) Die Wurzelformel führt auf ein aggregiertes Risikokapital in Höhe von

$$\begin{aligned}
&VaR^{(W)}_{0,99}(X_1+X_2)\\
&= \mathbb{E}(X_1)+\mathbb{E}(X_2)+\big[(VaR_{0,99}(X_1)-\mathbb{E}(X_1))^2+(VaR_{0,99}(X_2)-\mathbb{E}(X_2))^2\\
&\quad +2\cdot 0,33945\cdot(VaR_{0,99}(X_1)-\mathbb{E}(X_1))\cdot(VaR_{0,99}(X_2)-\mathbb{E}(X_2))\big]^{\frac{1}{2}}\\
&= \exp\left(-3+\frac{9}{8}\right)+\exp\left(-6+\frac{9}{2}\right)+\left[\left(\exp\left(-3+\frac{3}{2}\Phi^{-1}(0,99)\right)-\exp\left(-\frac{15}{8}\right)\right)^2\right.\\
&\quad \left.+\left(\exp\left(-6+3\Phi^{-1}(0,99)\right)-\exp\left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2+2\cdot 0,33945\cdot 1,478181\cdot 2,438779\right]^{\frac{1}{2}}\\
&= 3,6292.
\end{aligned}$$

$VaR^{(W)}_{0,99}(X_1+X_2)$ beträgt also nur 84,5% des wahren Werts des Value at Risk. Die Wurzelformel wird für multivariat normalverteilte Risiken hergeleitet. Wird sie wie in der Standardformel von Solvency II für beliebige Verteilungen angewandt, besteht die Gefahr, dass trotz konservativer Korrelationsschätzer das Risiko stark unterschätzt wird, da lineare Korrelationen nicht immer ein gutes Abhängigkeitsmaß darstellen.
Anmerkung. Die Berechnung der Wurzelformel ist nicht Bestandteil der Aufgabenstellung, da dort der Wert von $VaR^{(W)}_{0,99}(X_1+X_2)$ angegeben ist.