DAV
DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Dr. Guido Bader
Prof. Dr. Jochen Wolf

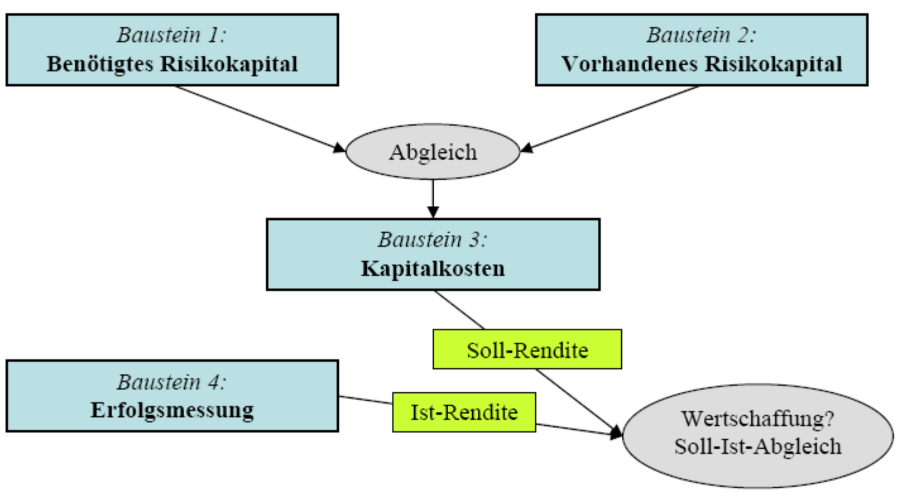
Klausur im Grundwissen
Wert- und risikoorientierte Unternehmenssteuerung

08.05.2009

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt **90**. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens **36** Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1. (23 Punkte) *Bausteine der wert- und risikoorientierten Unternehmenssteuerung.* Das folgende Schaubild betrachtet vier verschiedene Bausteine im Rahmen der wert- und risikoorientierten Unternehmenssteuerung.



a) (4 Punkte) Beschreiben Sie kurz, was sich hinter den einzelnen Bausteinen verbirgt und wie diese miteinander zusammenhängen.

b) Ein Unternehmen bemerkt beim Abgleich zwischen Baustein 1 und Baustein 2, dass das vorhandene Risikokapital unterhalb des benötigten Risikokapitals liegt. Nennen Sie je zwei konkrete Möglichkeiten für das Unternehmen, wie es

b1) (2 Punkte) das benötigte Risikokapital reduzieren kann,

b2) (2 Punkte) das vorhandene Risikokapital erhöhen kann.

c) (8 Punkte) Nennen Sie vier verschiedene Modellvarianten zur Modellierung des benötigten Risikokapitals. Geben Sie für jede Variante je ein Beispiel, einen Vorteil und einen Nachteil an.

d) Die Erfolgsmessung im Rahmen einer wert- und risikoorientierten Unternehmenssteuerung sollte auf einer ökonomischen Bewertung basieren.

d1) (2 Punkte) Nennen Sie zwei konkrete Beispiele dafür, dass eine HGB-Bewertung für eine sinnvolle Erfolgsmessung ungeeignet ist.

d2) (3 Punkte) Der ökonomische Wert versicherungstechnischer Verbindlichkeiten besteht aus dem besten Schätzer (Best Estimate Liabilities) inklusive dem Wert der Optionen und Garantien sowie aus der Risikomarge. Nennen Sie zwei Beispiele für Optionen und Garantien. Welche Rolle spielt die Risikomarge bei der ökonomischen Bewertung?

d3) (2 Punkte) Zur ökonomischen Bewertung von versicherungstechnischen Verbindlichkeiten werden oftmals Cashflows in die Zukunft projiziert. Dabei unterscheidet man zwischen der Going-Concern Basis und der Run-Off Basis. Erläutern Sie kurz, was hierunter zu verstehen ist und unter welchen Voraussetzungen diese beiden Ansätze jeweils zu verwenden sind.

Aufgabe 2. (15 Punkte) *Kapitalallokation.* Ein Versicherungsunternehmen besteht aus drei Geschäftsbereichen und verwendet das Risikomaß Value at Risk zum Niveau 99%. Die Verlustgrößen X_1, X_2, X_3 der drei Geschäftsbereiche seien multivariat normalverteilt mit Erwartungswert Null, Varianzen $\sigma_1^2 = 16$, $\sigma_2^2 = 25$ und $\sigma_3^2 = 36$ und Korrelationsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,2 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0,2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (12 Punkte) Berechnen Sie das benötigte Risikokapital des Versicherungsunternehmens und ermitteln Sie die Kapitalallokation auf die drei Geschäftsbereiche mit dem Kovarianzprinzip und dem diskreten Marginalprinzip von Merton / Perold.

Hinweis. Das 0,99-Quantil der Standardnormalverteilung beträgt 2,326.

b) (3 Punkte) Welche Voraussetzung muss erfüllt sein, damit Kapitalallokation in der Unternehmenssteuerung von Gruppen sinnvoll ist? Nennen Sie zwei Beispiele für zusätzliche Risiken, die in Gruppen auftreten können.

Dr. Guido Bader
Prof. Dr. Jochen Wolf

Aufgabe 3. (27 Punkte) *Erfolgsmessung und Kapitalallokation.*
Gegeben sei ein Versicherungsunternehmen mit drei Sparten A, B, C. Das Unternehmen weist in der Periode t die folgenden Ergebnisse aus:

	Sparte		
	A	B	C
Prämieneinnahme	1700	1700	1700
Provisionen	100	120	140
Verwaltungskosten	50	60	60
Kapitalerträge	100	130	150
sonstiger Aufwand	200	200	200
bezahlte Schäden	650	400	250
Zuführung zu den Reserven			
a) nominal	600	850	1000
b) diskontiert	500	650	700

a) a1) (2 Punkte) Berechnen Sie die Nominalergebnisse $Nom_A(t)$, $Nom_B(t)$ und $Nom_C(t)$ der drei Sparten zum Zeitpunkt t unter Verwendung der nominalen Zuführung zu den Reserven.

a2) (2 Punkte) Berechnen Sie die Nettogewinne $N_A(t)$, $N_B(t)$ und $N_C(t)$ der drei Sparten zum Zeitpunkt t unter Verwendung der diskontierten Zuführung zu den Reserven.

a3) (3 Punkte) Wie verändern sich die Nominalergebnisse bzw. die Nettogewinne, wenn zum Bewertungszeitpunkt ein geringeres Zinsniveau als in der obigen Tabelle implizit unterstellt vorliegt? Gehen Sie dabei davon aus, dass die Kapitalerträge unverändert bleiben. Warum spielen die Nominalergebnisse – obwohl sie keine ökonomische Bewertung darstellen – insbesondere im Bereich der Sachversicherung immer noch eine große Rolle?

b) Das Unternehmen hat ein internes Simulationsmodell zur Berechnung der notwendigen Risikokapitalien und führt damit 1000 Simulationen durch. Dabei werden zunächst alle drei Sparten separat betrachtet, so dass Diversifikationseffekte noch keine Rolle spielen. In den jeweils 10 schlechtesten Szenarien ergeben sich für die drei Sparten die folgenden Werte:

	i-schlechtestes Ergebnis (Positive Werte stellen Verluste dar.)									
Sparte	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
A	1800	2000	2500	3000	4500	6800	10000	12400	13000	19000
B	1000	2000	3000	6000	6000	6500	6800	7200	9500	12000
C	2000	3000	3500	4000	4500	5000	5400	6200	6700	9700

Die benötigten Risikokapitalien werden dabei risikofrei angelegt; Kapitalerträge auf das Risikokapital sind in obigen Nettogewinnen nicht enthalten. Der sichere Zins in Periode t betrage s=3%, der Spread betrage k=7%.

b1) (3 Punkte) Das Unternehmen betrachtet zunächst das Risikomaß Value at Risk zum Niveau 99,4%. Bestimmen Sie hierfür die benötigten Risikokapitalien $\tilde{C}_A(t)$, $\tilde{C}_B(t)$, $\tilde{C}_C(t)$ sowie die Renditegrößen $\widetilde{RORAC}_A(t)$, $\widetilde{RORAC}_B(t)$, $\widetilde{RORAC}_C(t)$.

b2) (4 Punkte) Jetzt betrachtet das Unternehmen das Risikomaß Expected Shortfall zum Niveau 99,0%. Bestimmen Sie hierfür ebenfalls die benötigten Risikokapitalien $\tilde{C}_A(t)$, $\tilde{C}_B(t)$, $\tilde{C}_C(t)$ sowie die Renditegrößen $\widetilde{RORAC}_A(t)$, $\widetilde{RORAC}_B(t)$, $\widetilde{RORAC}_C(t)$.

b3) (3 Punkte) Welche Sparten schaffen in b1) bzw. b2) Wert und welche vernichten Wert? Warum kann es trotzdem sinnvoll oder notwendig sein, Wert vernichtende Sparten zu betreiben? Nennen Sie hierfür zwei Gründe.

c) Im nächsten Schritt berechnet das Unternehmen im internen Simulationsmodell das insgesamt (also für alle drei Sparten A+B+C gemeinsam) benötigte Risikokapital, ebenso wie das für je zwei Sparten (also für die Sparten A+B, A+C bzw. B+C jeweils gemeinsam) benötigte Risikokapital. Dabei unterstellt es als Risikomaß den Value at Risk zum Niveau 99,4% und allokiert das benötigte Risikokapital mit Hilfe des Shapley Algorithmus auf die Sparten A, B und C. Die 1000 Simulationen aus Teil b) ergeben in den jeweils 10 schlechtesten Szenarien die folgenden Werte:

	i-schlechtestes Ergebnis (Positive Werte stellen Verluste dar.)									
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
$A+B+C$	4000	6000	7600	10000	11400	12500	16000	17800	21300	28700
$A+B$	2500	3300	4600	7000	8000	10000	12300	14500	17800	22000
$A+C$	3500	4200	4500	5000	6600	8700	11100	13800	14000	20000
$B+C$	2500	4000	4500	8000	8200	8500	9000	10100	11900	13000

c1) (2 Punkte) Wie groß ist das benötigte Risikokapital $\tilde{C}(t)$ auf der Ebene des Gesamtunternehmens und wie groß ist der Diversifikationseffekt?

c2) (6 Punkte) Bestimmen Sie unter Berücksichtigung des Allokationsverfahrens wiederum die benötigten Risikokapitalien $\tilde{C}_A(t)$, $\tilde{C}_B(t)$, $\tilde{C}_C(t)$ sowie die Renditegrößen $\widetilde{RORAC}_A(t)$, $\widetilde{RORAC}_B(t)$, $\widetilde{RORAC}_C(t)$.

c3) (2 Punkte) Interpretieren Sie die Ergebnisse im Vergleich zu den Ergebnissen aus b1).

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Solvency II.* Beschreiben Sie kurz die Kernelemente des ORSA in Bezug auf die Eigenmittelausstattung.

Aufgabe 5. (21 Punkte) *Risikomaße und Diversifikation*

a) (6 Punkte) Berechnen Sie den Value at Risk und Expected Shortfall zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ einer exponentialverteilten Zufallsgröße mit Parameter $\lambda > 0$.

Dr. Guido Bader
Prof. Dr. Jochen Wolf

b) Die Zufallsgrößen X_1 und X_2 seien unabhängig, X_1 exponentialverteilt mit Parameter 1 und X_2 exponentialverteilt mit Parameter 0,2.

b1) (5 Punkte) Leiten Sie die Bestimmungsgleichung für den Value at Risk von $X_1 + X_2$ zum Niveau 0,95 her, ohne sie zu lösen.

b2) (2 Punkte) Die numerische Lösung der Gleichung aus Teil b1) lautet $VaR_{0{,}95}(X_1 + X_2) = 16{,}094$. Geben Sie für den Expected Shortfall von $X_1 + X_2$ zum Niveau 0,95 eine Integraldarstellung an, wobei Sie im Integranden die Dichte von X_1+X_2 verwenden. *Bemerkung.* Die Berechnung des Integrals ergibt $ES_{0{,}95}(X_1 + X_2) = 21{,}10$.

c) (8 Punkte) Berechnen Sie in der Situation von Teil b) die Kapitalallokation bezüglich des Expected Shortfall zum Niveau 0,95 nach Kalkbrener.

Hinweise:

- Die Dichte der Eponentialverteilung mit Parameter λ lautet $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$.
- Die Stammfunktion von $\ln(x)$ ist $x\ln(x) - x$.
- Die Stammfunktion von $x\exp(-ax)$ ist $-\frac{1}{a}x\exp(-ax) - \frac{1}{a^2}\exp(-ax)$.

Lösungen

1. a) In Baustein 1 wird ausgehend von der Risikoneigung das benötigte Risikokapital ermittelt. Dabei können verschiedene Risikomodelle zur Ermittlung des Kapitalbedarfs zum Einsatz kommen. In Baustein 2 wird ausgehend von der aktuellen wirtschaftlichen Situation das tatsächlich zur Absorption von möglichen Verlusten zur Verfügung stehend Kapital ermittelt. Dieses wird dann mit dem Kapitalbedarf abgeglichen. In Baustein 3 gibt der Kapitalgeber seine Renditeerwartung vor. Dies kann entweder in Form einer Zinshürde (Hurdle Rate) erfolgen oder als absolute Kapitalkosten. Die Renditeerwartung hängt von der Risikoposition des Unternehmens ab. Je riskanter das Unternehmen aufgestellt ist, desto höher ist die Zinshürde. In Baustein 4 wird der tatsächliche Periodenerfolg gemessen und mit der Anforderung des Aktionärs abgeglichen. Bei der Ermittlung ist auf Konsistenz mit den übrigen Bausteinen, insbesondere hinsichtlich der Bewertungsansätze zu achten. Liegt der tatsächliche Periodenerfolg oberhalb der Renditeerwartung, so wird Wert geschaffen, liegt er unterhalb, so wird Wert vernichtet.

   b) Stimmen benötigtes und vorhandenes Risikokapital nicht überein, so hat das Unternehmen die folgenden Möglichkeiten:

   b1) Reduktion des benötigten Risikokapitals durch z.B.
   - Kauf von Put-Optionen zur Absicherung des Marktrisikos von Aktien,
   - zusätzliche Rückversicherungsverträge zur Reduktion versicherungstechnischer Risiken,
   - Umschichtung des Portfolios festverzinslicher Anleihen hin zu Papieren mit besserer Bonität zur Reduktion des Kreditrisikos,

- usw.

b2) Erhöhung des vorhandenen Risikokapitals durch z.B.
- Aufstockung des Eigenkapitals durch den Aktionär,
- Begeben von Nachrangdarlehen oder Genussrechten,
- Reduktion von geplanten Dividenden
- usw.

Bemerkung. Es waren jeweils nur zwei Beispiele gefragt.

c) Die folgenden Modelle können zur Ermittlung des benötigten Risikokapitals eingesetzt werden:

- Faktormodelle.
  Vorteile: Einfach anzuwenden. Leicht erklärbar.
  Nachteile: Unternehmensspezifika können in der Regel nicht abgebildet werden. Faktormodelle können zu falschen unternehmerischen Anreizen führen. Nichtlineare Abhängigkeiten können nicht richtig modelliert werden und werden daher oft unterschätzt.
  Beispiele: ICM von S&P, GDV-Modell im Rahmen von Solvency II
- Analytische Modelle mit geschlossener Formel.
  Vorteile: Leicht zu befüllen und einfach zu interpretieren.
  Nachteile: Die Herleitung einer geschlossenen Formel ist nur für einfache Verteilungen möglich. Die Komplexität eines Unternehmens kann somit nicht erfasst werden.
  Beispiele: Modellierung einer Schadengröße oder des Jahresüberschusses durch eine parametrische Verteilung und Ermittlung des Risikokapitals durch Anwendung eines Risikomaßes auf die Verteilung.
- Szenariobasierte Modelle.
  Vorteile: Durch die Anwendung von Szenarien werden auch nichtlineare Abhängigkeiten implizit miterfasst. Szenariobasierte Modelle sind auf Grund der vorgebbaren Szenarien in der Regel sehr gut erklärbar.
  Nachteile: Die Aggregation der in verschiedenen Szenarien hergeleiteten Kapitalien ist problematisch und erfolgt in der Regel auch wieder über Korrelationsansätze. Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation der Ergebnisse ist sehr schwierig.
  Beispiele: BaFin-Stresstest, DAV-Stresstest, Teile von QIS oder SST.
- Monte-Carlo Simulationsmodelle.
  Vorteile: Simulationsmodelle ermöglichen eine sehr genaue Modellierung von Unternehmensspezifika und erlauben wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretationen. Die Anwendung beliebiger Risikomaße ist möglich.
  Nachteile: Sehr komplexe Modelle, deren Implementierung mit hohem Aufwand verbunden ist.
  Beispiele: Interne Modelle im Rahmen von Solvency II, ALM-Modelle

Bemerkung. Es waren jeweils nur ein Vorteil, ein Nachteil und ein Beispiel gefragt.

Dr. Guido Bader
Prof. Dr. Jochen Wolf

d) d1) Eine Bewertung der versicherungstechnischen Verpflichtungen nach HGB spiegelt nicht die ökonomische Realität wider. Als Beispiele hierfür sind zu nennen:

- Schadenreserven in der Sachversicherung werden von den Sachbearbeitern gesetzt und sind nicht diskontiert. Je nach Anweisung der Sachbearbeiter werden Sicherheitsmargen erhöht oder freigesetzt. Dies verfälscht die ökonomische Realität stark.
- Die Deckungsrückstellung in der Lebens- bzw. Krankenversicherung wird mit einem festen Garantiezins ermittelt und ist nicht abhängig vom aktuellen Zinsniveau. Der Wert der Garantien und Optionen wird dabei völlig vernachlässigt.
- Aktien werden nicht zum Marktwert ermittelt. Fallende Kurse spiegeln sich, wenn sie nicht zu Abschreibungen führen, nicht in der Bilanz bzw. der GuV wider.
- usw.

Bemerkung. Es waren nur zwei Beispiele gefragt.

d2) Beispiele für Garantien und Optionen sind

- Garantiezins in der Lebens- und Krankenversicherung,
- Kapitalwahlrecht bei Renten,
- Nachversicherungsoptionen in der BU,
- usw.

Bemerkung. Es waren nur zwei Beispiele gefragt.
Die Risikomarge stellt eine Risikoprämie für das mit den Verpflichtungen assoziierte Risiko dar. Sie ist somit ein Puffer gegen adverse Entwicklungen. Dieser Puffer muss ausreichen, um den Investor für das eingegangene Risiko adäquat zu entschädigen.

d3) Dem Going Concern Ansatz liegt die Überlegung zu Grunde, dass das Unternehmen auch weiterhin Neugeschäft schreibt und wie bisher am Marktgeschehen teilnimmt. Beim Run-Off Ansatz wird unterstellt, dass der Bestand des Unternehmens vollständig abgewickelt wird und das Unternehmen danach aufgelöst wird. Der Run-Off Ansatz ist nur dann zu wählen, wenn das Unternehmen tatsächlich kein Neugeschäft mehr schreibt und auch keine Verschmelzung mit einem anderen Unternehmen geplant ist.

2. a) Wir setzen $X := X_1 + X_2 + X_3$ und berechnen zunächst die benötigten Varianzen und

Dr. Guido Bader
Prof. Dr. Jochen Wolf

Kovarianzen:

$$\begin{aligned}
Var(X) &= Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) + 2Cov(X_1, X_2) \\
&\quad + 2Cov(X_1, X_3) + 2Cov(X_2, X_3) \\
&= 16 + 25 + 36 + 2 \cdot 0,5 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 0,2 \cdot 4 \cdot 6 + 0 = 106,6 \\
Var(X_1 + X_2) &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) \\
&= 16 + 25 + 2 \cdot 0,5 \cdot 4 \cdot 5 = 61 \\
Var(X_1 + X_3) &= Var(X_1) + Var(X_3) + 2Cov(X_1, X_3) \\
&= 16 + 36 + 2 \cdot 0,2 \cdot 4 \cdot 6 = 61,6 \\
Var(X_2 + X_3) &= Var(X_1) + Var(X_3) = 25 + 36 = 61 \\
Cov(X_1, X) &= Var(X_1) + Cov(X_1, X_2) + Cov(X_1, X_3) = 16 + 10 + 4,8 = 30,8 \\
Cov(X_2, X) &= Cov(X_2, X_1) + Var(X_2) + Cov(X_2, X_3) = 10 + 25 + 0 = 35 \\
Cov(X_3, X) &= Cov(X_3, X_1) + Cov(X_3, X_2) + Var(X_3) = 4,8 + 0 + 36 = 40,8
\end{aligned}$$

Das benötigte Risikokapital für die Teilbereiche erhalten wir mit der Formel für die Normalverteilung $VaR_{0,99} = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(0,99)$:

$$\begin{aligned}
VaR_{0,99}(X_1 + X_2) &= \sqrt{61} \cdot 2,326 = 18,167 \\
VaR_{0,99}(X_1 + X_3) &= \sqrt{61,6} \cdot 2,326 = 18,256 \\
VaR_{0,99}(X_2 + X_3) &= \sqrt{61} \cdot 2,326 = 18,167 \\
VaR_{0,99}(X) &= \sqrt{106,6} \cdot 2,326 = 24,015
\end{aligned}$$

Das benötigte Risikokapital des Gesamtunternehmens beträgt 24,015.
Mit dem Kovarianzprinzip ergibt sich folgende Allokation:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{Cov(X_1, X)}{Var(X)} VaR_{0,99}(X) = \frac{30,8}{106,6} \cdot 24,015 = 6,939 \\
K_2 &= \frac{Cov(X_2, X)}{Var(X)} VaR_{0,99}(X) = \frac{35}{106,6} \cdot 24,015 = 7,885 \\
K_3 &= \frac{Cov(X_3, X)}{Var(X)} VaR_{0,99}(X) = \frac{40,8}{106,6} \cdot 24,015 = 9,191
\end{aligned}$$

Das diskrete Marginalprinzip von Merton / Perold führt zu folgender Allokation:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{VaR_{0,99}(X) - VaR_{0,99}(X_2 + X_3)}{\sum_{i=1}^{3} (VaR_{0,99}(X) - VaR_{0,99}(X - X_i))} \cdot VaR_{0,99}(X) \\
&= \frac{24,015 - 18,167}{5,848 + 5,759 + 5,848} \cdot 24,015 = 8,046 \\
K_2 &= \frac{24,015 - 18,256}{5,848 + 5,759 + 5,848} \cdot 24,015 = 7,923 \\
K_3 &= \frac{24,015 - 18,167}{5,848 + 5,759 + 5,848} \cdot 24,015 = 8,046
\end{aligned}$$

b) Voraussetzung ist die uneingeschränkte Kapitalmobilität innerhalb der Gruppe, da ansonsten die Ausgleichsmechanismen im Falle eines Verlustes nicht funktionieren könnten.

Beispiele für zusätzliche Risiken sind Ansteckungseffekte, Imageschäden, strategische Risiken des Gruppenmanagements und erhöhte operationelle Risiken aufgrund der Größe.

Bemerkung. Es waren nur zwei Beispiele gefragt.

3. a) a1) Als Nominalergebnisse erhalten wir:

$$\begin{aligned} Nom_A(t) &= 1700 - 100 - 50 + 100 - 200 - 650 - 600 = 200 \\ Nom_B(t) &= 1700 - 120 - 60 + 130 - 200 - 400 - 850 = 200 \\ Nom_C(t) &= 1700 - 140 - 60 + 150 - 200 - 250 - 1000 = 200 \end{aligned}$$

a2) Als Nettogewinne erhalten wir:

$$\begin{aligned} N_A(t) &= 1700 - 100 - 50 + 100 - 200 - 650 - 500 = 300 \\ N_B(t) &= 1700 - 120 - 60 + 130 - 200 - 400 - 650 = 400 \\ N_C(t) &= 1700 - 140 - 60 + 150 - 200 - 250 - 700 = 500 \end{aligned}$$

a3) Das Zinsniveau zum Bewertungszeitpunkt hat keinerlei Einfluss auf die Nominalergebnisse, da die Reserven hier nicht diskontiert werden. Die Nettogewinne werden jedoch geringer ausfallen, da durch die schwächere Diskontierung die diskontierten Reserven höher ausfallen. In der Sachversicherung in Deutschland werden die Schadenrückstellungen nach HGB und nach IFRS immer noch weitestgehend undiskontiert gestellt. Daher liegt statutorisch eine Nominalbetrachtung vor, die in der Unternehmenssteuerung somit immer noch eine wichtige Rolle spielt.

b) b1) Wird der Value at Risk zum Niveau 99,4% zu Grunde gelegt, so errechnet sich das benötigte Risikokapital bei 1000 Simulationen als der 7. schlechteste Wert, also

$$\tilde{C}_A(t) = 3000, \quad \tilde{C}_B(t) = 6000, \quad \tilde{C}_C(t) = 4000.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \widetilde{RORAC}_A(t) &= \frac{N_A(t)}{\tilde{C}_A(t)} + s = \frac{300}{3000} + 0,03 = 13\%, \\ \widetilde{RORAC}_B(t) &= \frac{N_B(t)}{\tilde{C}_B(t)} + s = \frac{400}{6000} + 0,03 = 9,67\%, \\ \widetilde{RORAC}_C(t) &= \frac{N_C(t)}{\tilde{C}_C(t)} + s = \frac{500}{4000} + 0,03 = 15,5\%. \end{aligned}$$

b2) Wird der Expected Shortfall zum Niveau 99,0% zu Grunde gelegt, so errechnet sich das benötigte Risikokapital bei 1000 Simulationen als der Mittelwert über die

10 schlechtesten Werte, also:

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_A(t) &= \frac{1}{10}(1800 + 2000 + 2500 + 3000 + 4500 + 6800 + 10000 \\
&\qquad + 12400 + 13000 + 19000) \\
&= 7500, \\
\tilde{C}_B(t) &= \frac{1}{10}(1000 + 2000 + 3000 + 6000 + 6000 + 6500 + 6800 \\
&\qquad + 7200 + 9500 + 12000) \\
&= 6000, \\
\tilde{C}_C(t) &= \frac{1}{10}(2000 + 3000 + 3500 + 4000 + 4500 + 5000 \\
&\qquad + 5400 + 6200 + 6700 + 9700) \\
&= 5000.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\widetilde{RORAC}_A(t) &= \frac{N_A(t)}{\tilde{C}_A(t)} + s = \frac{300}{7500} + 0,03 = 7\%, \\
\widetilde{RORAC}_B(t) &= \frac{N_B(t)}{\tilde{C}_B(t)} + s = \frac{400}{6000} + 0,03 = 9,67\%, \\
\widetilde{RORAC}_C(t) &= \frac{N_C(t)}{\tilde{C}_C(t)} + s = \frac{500}{5000} + 0,03 = 13\%.
\end{aligned}$$

b3) Die Hurdle Rate beträgt 3% + 7% = 10%. Daher schaffen im Aufgabenteil b1) die Sparten A und C Wert und in Aufgabenteil b2) schafft nur die Sparte C Wert. Die übrigen Sparten vernichten jeweils Wert. Es kann aber dennoch sinnvoll oder notwendig sein, Wert vernichtende Sparten zu betreiben. Mögliche Gründe hierfür sind:

- Sparten, die selbst Wert vernichtend sind, können ein hohes Cross-Selling Potential für Wert schaffende Sparten haben.
- Es gibt Sparten, die auf Grund gesetzlicher Vorschriften angeboten werden müssen (z.B. Basistarif in der Krankenversicherung, KfZ-Haftpflicht).
- Wert vernichtende Sparten können Träger von Fixkosten sein. Ohne solche Sparten müssten die Fixkosten auf andere Sparten umgelegt werden, so dass diese möglicherweise danach auch keinen Wert mehr schaffen könnten.

Bemerkung. Es waren nur zwei Gründe gefragt.

c) c1) Analog zu b1) erhalten wir das benötigte Risikokapital auf Gesamtunternehmensebene als den 7. schlechtesten Wert aus einer gemeinsamen Simulation aller drei Sparten, also

$$\tilde{C}(t) = 10000.$$

Damit erhalten wir bei Verwendung der Ergebnisse aus b1) den Diversifikationseffekt

$$\tilde{C}_A(t) + \tilde{C}_B(t) + \tilde{C}_C(t) - \tilde{C}(t) = 3000 + 6000 + 4000 - 10000 = 3000.$$

Dr. Guido Bader
Prof. Dr. Jochen Wolf

c2) Das benötigte Risikokapital für jeweils zwei Sparten zusammen erhalten wir analog als den 7. schlechtesten Wert aus einer gemeinsamen Simulation der jeweiligen beiden Sparten:

$$\tilde{C}_{A+B}(t) = 7000, \quad \tilde{C}_{A+C}(t) = 5000, \quad \tilde{C}_{B+C}(t) = 8000.$$

Damit erhalten wir unter Anwendung des Shapley Algorithmus die Risikokapitalien

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_A(t) &= (10000-8000)/3 + (7000-6000)/6 + (5000-4000)/6 + 3000/3 = 2000, \\
\tilde{C}_B(t) &= (10000-5000)/3 + (7000-3000)/6 + (8000-4000)/6 + 6000/3 = 5000, \\
\tilde{C}_C(t) &= (10000-7000)/3 + (5000-3000)/6 + (8000-6000)/6 + 4000/3 = 3000
\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
\widetilde{RORAC}_A(t) &= \frac{N_A(t)}{\tilde{C}_A(t)} + s = \frac{300}{2000} + 0,03 = 18\%, \\
\widetilde{RORAC}_B(t) &= \frac{N_B(t)}{\tilde{C}_B(t)} + s = \frac{400}{5000} + 0,03 = 11\%, \\
\widetilde{RORAC}_C(t) &= \frac{N_C(t)}{\tilde{C}_C(t)} + s = \frac{500}{3000} + 0,03 = 19,67\%.
\end{aligned}$$

c3) Alle Sparten partizipieren mit dem gleichen absoluten Betrag am Diversifikationseffekt, so dass sich die RORAC-Ergebnisse aller Sparten verbessern. Nach Allokation des Diversifikationseffektes schaffen alle drei Sparten Wert.

4. Unter Zugrundelegung des Risikoprofils, der individuellen Risikotoleranz und der Geschäftsstrategie soll das Versicherungsunternehmen den eigenen Bedarf an ökonomischen Risikokapital einschätzen. Diese Analyse bedeutet keine Duplizierung des aufsichtsrechtlichen SCR, sondern impliziert eine individuelle ökonomische Betrachtung.

   Ferner muss es dafür Sorge tragen, dass es das aufsichtsrechtliche SCR nicht nur in der kommenden Periode, sondern dauerhaft stellen kann.

5. a) Die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung lautet $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, $x \geq 0$. Auflösen der Bestimmungsgleichung für den Value at Risk

$$F(VaR_\alpha(X)) = \alpha$$

führt über $\exp(-\lambda VaR_\alpha(X)) = 1 - \alpha$ zum Ergebnis

$$VaR_\alpha(X) = -\frac{\ln(1-\alpha)}{\lambda}.$$

Der Expected Shortfall ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
ES_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \frac{-\ln(1-u)}{\lambda} \, du \\
&= \frac{1}{\lambda(1-\alpha)} [(1-u)\ln(1-u) + u]_\alpha^1 \\
&= \frac{1}{\lambda(1-\alpha)} (1 - \alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)),
\end{aligned}$$

Dr. Guido Bader
Prof. Dr. Jochen Wolf

wobei wir $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ nach de l' Hospital verwendet haben.

b) b1) Aufgrund der Unabhängigkeit erhalten wir die Dichte g von X_1+X_2 durch Faltung der Dichten f_1 von X_1 und f_2 von X_2:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^\infty f_1(x-y)f_2(y)\,dy \\ &= \int_0^\infty \exp(-(x-y))\cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x-y)\cdot 0,2\cdot\exp(-0,2y)\,dy \\ &= 0,2\exp(-x)\int_0^x \exp(0,8y)\,dy\cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) \\ &= \frac{1}{4}\exp(-x)\cdot[\exp(0,8y)]_0^x\cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) \\ &= \frac{1}{4}(\exp(-0,2x)-\exp(-x))\cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) \end{aligned}$$

Integration liefert die Verteilungsfunktion G von X_1+X_2:

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x \frac{1}{4}(\exp(-0,2y)-\exp(-y))\,dy \\ &= -1,25[\exp(-0,2y)]_0^x + \frac{1}{4}[\exp(-y)]_0^x \\ &= -1,25\exp(-0,2x)+0,25\exp(-x)+1 \end{aligned}$$

Die Bedingung $G(x)=0,95$ führt auf die Bestimmungsgleichung

$$-1,25\exp(-0,2x)+0,25\exp(-x)+0,05=0,$$

deren numerische Lösung $VaR_{0,95}(X_1+X_2)=16,094$ ist.

b2) Mit Hilfe der Dichte g aus b1) erhalten wir auf Grund der Stetigkeit der Zufallsgröße X_1+X_2

$$\begin{aligned} &ES_{0,95}(X_1+X_2) \\ &\quad= \mathbb{E}(X_1+X_2 \mid X_1+X_2 > VaR_{0,95}(X_1+X_2)) \\ &\quad= \frac{1}{1-0,95}\int_{16,094}^\infty xg(x)\,dx. \end{aligned}$$

Über die Aufgabenstellung hinaus berechnen wir nun das Integral.

$$\begin{aligned} &ES_{0,95}(X_1+X_2) \\ &\quad= \frac{1}{1-0,95}\int_{16,094}^\infty \frac{1}{4}x(\exp(-0,2x)-\exp(-x))\,dx \\ &\quad= 5[-5x\exp(-0,2x)+x\exp(-x)]_{16,094}^\infty \\ &\qquad - 5\int_{16,094}^\infty(-5\exp(-0,2x)+\exp(-x))\,dx \\ &\quad= 25\cdot 16,094\cdot\exp(-0,2\cdot 16,094)-5\cdot 16,094\cdot\exp(-16,094) \\ &\qquad + 125\cdot\exp(-0,2\cdot 16,094)-5\cdot\exp(-16,094) \\ &\quad= 21,10 \end{aligned}$$

c) Auf Grund der Unabhängigkeit hat die gemeinsame Dichte von (X_1, X_2) die Gestalt $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$.
Wir berechnen die Kapitalallokation zunächst für X_1:

$$\begin{aligned}
&\Lambda(X_1, X) \\
&= \mathbb{E}(X_1 \mid X_1 + X_2 > VaR_{0,95}(X_1 + X_2)) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 > VaR_{0,95}(X_1 + X_2))} \mathbb{E}(X_1 \cdot \mathbf{1}_{(VaR_{0,95}(X_1+X_2),\infty)}(X_1 + X_2)) \\
&= \frac{1}{1 - 0,95} \int_0^\infty \int_0^\infty x_1 \cdot \mathbf{1}_{(16,094,\infty)}(x_1 + x_2) \cdot f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \, dx_2 \, dx_1 \\
&= 4 \int_0^\infty x_1 \exp(-x_1) \int_{\max(16,094 - x_1, 0)}^\infty \exp(-0,2x_2) \, dx_2 \, dx_1 \\
&= 20 \int_0^{16,094} x_1 \exp(-0,8x_1 - 3,2188) \, dx_1 \\
&\quad + 20 \int_{16,094}^\infty x_1 \exp(-x_1) \, dx_1 \\
&= 20 \exp(-3,2188) \cdot [-1,25x_1 \exp(-0,8x_1) - 1,5625 \exp(-0,8x_1)]_0^{16,094} \\
&\quad + 20 \cdot [-x_1 \exp(-x_1) - \exp(-x_1)]_{16,094}^\infty \\
&= \exp(-3,2188) \cdot (31,25 - \exp(-12,8752)(25 \cdot 16,094 + 31,25)) \\
&\quad + 20 \cdot \exp(-16,094) \cdot (16,094 + 1) \\
&= 1,25
\end{aligned}$$

Auf X_2 wird folglich $\Lambda(X_2, X) = 21,10 - 1,25 = 19,85$ allokiert.