DAV
DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Dr. Guido Bader, Wolfgang Deichl
Dr. Volker Goersmeyer, Prof. Dr. Jochen Wolf

Klausur im Grundwissen
Wertorientiertes Risikomanagement

06.05.2016

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt **90**. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens **36** Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1. (20 Punkte)

Die BW-Agrar Sachversicherung AG vertreibt ausschließlich die beiden folgenden Produkte:

- Ernteausfall mit einer Jahresprämieneinnahme von 60 Mio. Euro,
- Traktor-Kaskoversicherung mit einer Jahresprämieneinnahme von 40 Mio. Euro.

Versichert werden nur landwirtschaftliche Betriebe in Baden-Württemberg. Der Vertrieb erfolgt über einen angestellten Außendienst von zehn Personen. Die IT sowie die Bestandsverwaltung sind an die Schwestergesellschaft Bayern-Agrar ausgegliedert.
Die BW-Agrar weist die folgende ökonomische Bilanz (alle Werte in Mio. Euro) auf:

Aktiva		**Passiva**	
Aktien	20	Eigenkapital	50
Immobilien	30	versicherungstechnische Rückstellungen für Ernteausfall	50
festverzinsliche Wertpapiere (ohne Ausfallrisiko)	100	versicherungstechnische Rückstellungen für Traktor-Kasko	40
sonstige Aktiva	10	sonstige Passiva	20
Summe Aktiva	160	**Summe Passiva**	160

a) (3 Punkte) Welchen Marktrisiken unterliegt die BW-Agrar? Geben Sie für jedes dieser Marktrisiken eine **konkrete** und für jedes Marktrisiko **unterschiedliche** Möglichkeit zur Risikoreduktion an.

b) (4 Punkte) Die versicherungstechnischen Risiken quantifiziert die BW-Agrar mit einem einfachen Faktormodell. Dabei verwendet sie die folgenden Risikofaktoren, die auf die jeweiligen Bezugsgrößen Jahresprämieneinnahmen bzw. versicherungstechnische Rückstellungen angewendet werden:

- für das Prämienrisiko bei Ernteausfall: 35%
- für das Reserverisiko bei Ernteausfall: 12%
- für das Prämienrisiko bei Traktor-Kasko: 25%
- für das Reserverisiko bei Traktor-Kasko: 10%

Berechnen Sie das benötigte Risikokapital für das versicherungstechnische Risiko unter Verwendung der „Wurzelformel" und einer Korrelation zwischen den Prämien- und Reserverisiken der jeweiligen Produkte von 0,75. Die übrigen Korrelationen seien Null. Werden die versicherungstechnischen Risiken durch diesen Ansatz vollständig quantifiziert?

c) (3 Punkte) Geben Sie zwei strategische Risiken der Gesellschaft an und beschreiben Sie beispielhaft, wie sich diese Risiken materialisieren könnten.

d) (3 Punkte) Geben Sie eine Definition von Szenarioanalysen und Stresstests an und beschreiben Sie kurz die typischen Unterschiede.

e) (4 Punkte) Geben Sie für die BW-Agrar jeweils ein **konkretes** Beispiel für eine Szenarioanalye für ein von Ihnen in Aufgabenteil c) benanntes strategisches Risiko sowie einen Stresstest für ein von Ihnen in Aufgabenteil a) benanntes Marktrisiko an.

f) (3 Punkte) Was versteht man unter einem Reverse-Stresstest? Geben Sie ein **konkretes** Beispiel für einen Reverse-Stresstest für die versicherungstechnischen Risiken der BW-Agrar an.

Aufgabe 2. (20 Punkte)
Die Drei-Sparten-AG ist die Muttergesellschaft einer Gruppe bestehend aus

- einem Lebensversicherer, der Leben AG,
- einem Krankenversicherer, der Kranken AG und
- einem Kompositversicherer, der Sach AG.

Im veröffentlichten Risikobericht schreibt die Drei-Sparten-AG, dass sie ein internes Simulationsmodell zur Quantifizierung ihrer Risiken auf Basis einer ökonomischen Bewertung einsetzt. Es werden für die Drei-Sparten-AG sowie für die drei Tochtergesellschaften aus 1000 Simulationen die 10 schlechtesten Resultate für das ökonomische Ergebnis (alle Werte in Mio. Euro) explizit angegeben:

	x-schlechtestes Ergebnis (Positive Werte stellen Verluste dar.)									
Nr.	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
Drei-Sparten-AG	400	420	480	550	570	630	740	810	900	920
Leben AG	300	370	420	450	500	520	530	570	600	630
Kranken AG	20	25	45	50	60	65	75	80	85	95
Sach AG	120	140	150	200	220	280	320	370	380	400

Als Risikomaß wird der Expected Shortfall zum Niveau 99,5% verwendet. Der sichere Zins betrage (für alle Laufzeiten) 1% und als Spread gibt der Unternehmenseigner einen ebenfalls laufzeitunabhängigen Wert von 5% vor.

a) (2 Punkte) Berechnen Sie für die Muttergesellschaft sowie für die drei Sparten-Gesellschaften der Gruppe, also die Leben AG, die Kranken AG und die Sach AG, das benötigte Risikokapital.

b) (3 Punkte) Beschreiben Sie kurz die Grundidee des Kapitalkostenansatzes zur Bestimmung der Risikomarge im Rahmen einer ökonomischen Bewertung versicherungstechnischer Verbindlichkeiten.

c) (4 Punkte) Berechnen Sie für die Leben AG die Risikomarge nach dem Kapitalkostenansatz. Unterstellen Sie dabei, dass das benötigte Risikokapital des ersten betrachteten Jahres (gemäß Aufgabenteil a)) in den Folgejahren jährlich um 20% abnimmt. Vereinfachend können Sie davon ausgehen, dass der Bestand über einen unendlich langen Zeitraum abgewickelt wird. Runden Sie Ihr Ergebnis auf eine Nachkommastelle.

d) (3 Punkte) Beschreiben Sie kurz, wie im Rahmen einer ökonomischen Bewertung eines Lebensversicherungsunternehmens der Best Estimate der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten berechnet wird und wie ein Wert von Optionen und Garantien (als Teil des Best-Estimates) dabei explizit angegeben werden kann.

e) (3 Punkte) Auf Basis Ihrer Ergebnisse aus Aufgabenteil a) berechnen Sie den sich in der Gruppe ergebenden Diversifikationseffekt sowie die benötigten Risikokapitalien der drei Sparten-Gesellschaften nach proportionaler Allokation des Diversifikationseffektes.

f) (3 Punkte) Die drei Sparten-Gesellschaften haben im Berichtsjahr die folgenden Nettogewinne erwirtschaftet:

- Leben AG: 12 Mio. Euro
- Kranken AG: 5 Mio. Euro
- Sach AG: 20 Mio. Euro

Berechnen Sie unter Verwendung der diversifizierten benötigten Risikokapitalien aus Aufgabenteil e) die EVA's der drei Sparten-Gesellschaften. Runden Sie dabei auf eine Nachkommastelle. Welche Sparte schafft keinen Wert?

g) (2 Punkte) Geben Sie zwei Gründe an, warum es für die Drei-Sparten-AG sinnvoll sein kann, die nicht Wert schaffende Sparte trotzdem weiterhin zu betreiben.

Aufgabe 3. (20 Punkte) Seien R_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, unabhängige, $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$-verteilte Zufallsgrößen und $\varrho \in [0, 1]$. Wir betrachten die Verlustvariablen

$$X_i := \varrho R_0 + (1 - \varrho) R_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

a) (5 Punkte) Bestimmen Sie Value at Risk und Expected Shortfall von $Z_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$.

b) (4 Punkte) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} VaR_\alpha(Z_n)$ und diskutieren Sie das Ergebnis.

c) (4 Punkte) Geben Sie jeweils Namen und Parameterwerte der Copula der Zufallsvektoren (X_1, X_2) und (Y_1, Y_2) an, wobei $Y_i := \exp(X_i)$, $i = 1, 2$, ist.

d) (7 Punkte) Bestimmen Sie die Copula des Zufallsvektors (X_1^2, X_2^2).
Hinweis. Denken Sie an die Symmetrie der eindimensionalen Normalverteilung.

Aufgabe 4. (20 Punkte)
Die Haftpflicht AG ist ein in Deutschland tätiger Kompositversicherer, der bisher ausschließlich das private Haftpflichtversicherungsgeschäft betreibt. Die Haftpflicht AG hat keine Rückversicherungsverträge abgeschlossen. Die vorläufigen Aufstellungen von HGB- und Solvenzbilanz (Solvabilitätsübersicht) mit Werten in TEUR ergeben:

vorläufige HGB-Bilanz			
Aktiva		Passiva	
Staatsanleihen	90.000	Eigenkapital	30.000
Aktien	10.000	versicherungstechnische Rückstellungen	70.000
Summe	100.000	Summe	100.000

vorläufige Solvenzbilanz					
Aktiva		Passiva			
Staatsanleihen	115.000	Eigenkapital			30.000
Aktien	15.000	Bewertungsdifferenz			50.000
		versicherungstechnische Rückstellungen			50.000
			Best Estimate	47.000	
			Risikomarge	3.000	
Summe	130.000	Summe			130.000

Bei einer Überprüfung der obigen vorläufigen Aufstellungen fällt auf, dass bereits festgelegte künftig zu zahlende Rentenleistungen an Geschädigte und die damit zusammenhängenden Kosten (sogenannte Haftpflichtrenten) noch nicht berücksichtigt sind. Nach den aufsichtsrechtlichen Bestimmungen handelt es sich bei dieser Position um lebensversicherungstechnische Verpflichtungen. Folgende Barwerte werden hierfür ermittelt:

- diskontiert mit einem handelsrechtlichen Rechnungszins von 1,25%: 11.000 TEUR

- diskontiert mit der für die Solvenzbewertung verwendeten Zinsstrukturkurve: 10.000 TEUR
- Barwerte unter den in der aufsichtsrechtlichen Standardformel zur Bestimmung des SCR vorgesehenen Szenarien mit der für die Solvenzbewertung verwendeten Zinsstrukturkurve:
  - für das Untermodul Langlebigkeitssrisiko: 10.900 TEUR
  - für das Untermodul Revisionsrisiko: 10.300 TEUR
  - für das Untermodul Kostenrisiko: 10.200 TEUR
  - diskontiert mit der nach der Standardformel vorgesehenen Zinsstrukturkurve für das Zinsrückgangsszenario: 11.100 TEUR

Als zusätzliche Risikomarge für diese Verpflichtungen werden 900 TEUR ermittelt.
Das SCR für das Nicht-Lebensversicherungstechnische Risikomodul beträgt 51.540 TEUR.
Folgende Korrelationskoeffizienten sind in der Standardformel vorgegeben:

	Langlebigkeit	Kosten	Revision
Langlebigkeit	1	0,25	0,25
Kosten	0,25	1	0,5
Revision	0,25	0,5	1

a) (4 Punkte) Welche Positionen der oben stehenden Bilanzen müssen korrigiert werden, um die Rentenverpflichtungen mit zu berücksichtigen? Geben Sie die neuen Werte für die betroffenen Bilanzpositionen an.

b) (1 Punkt) Wie hoch sind die aufsichtsrechtlichen Eigenmittel vor und nach Berücksichtigung der Rentenverpflichtungen?

c) (3 Punkte) Welche für das klassische Lebensversicherungsgeschäft in Deutschland typischen Komponenten der für die Solvenzbilanz ermittelten versicherungstechnischen Rückstellungen spielen bei diesen Rentenverpflichtungen keine Rolle? Erläutern Sie diese Komponenten.

d) (3 Punkte) Ermitteln Sie das SCR für das lebensversicherungstechnische Risikomodul der Standardformel.

e) (2 Punkte) Welche, in diesem Fall nicht relevanten, weiteren Untermodule sind Teil des lebensversicherungstechnischen Risikomoduls der Standardformel?

f) (2 Punkte) Welche Positionen der korrigierten Solvenzbilanz verändern sich im Zinsrückgangsszenario der Standardformel?

g) (5 Punkte) Die Haftpflicht AG beabsichtigt, künftig zusätzlich industrielles Haftpflichtgeschäft zu zeichnen. Diskutieren Sie, inwieweit diese Absicht die Aufgabenbereiche der versicherungsmathematischen Funktion und der Risikomanagement-Funktion betrifft. Welche weiteren Schlüsselfunktionen sind aufsichtsrechtlich vorgeschrieben?

Aufgabe 5. (10 Punkte) Ein Unternehmen betreibe zwei Geschäftssparten. Deren Verlustgrößen X_1 und X_2 seien bivariat normalverteilt mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$ und Korrelation ϱ. Ferner bezeichne C das vorhandene Risikokapital. Betrachten Sie die Maximierungsaufgabe

$$\max_{a_1, a_2} (-a_1 \cdot \mu_1 - a_2 \cdot \mu_2)$$

unter der Nebenbedingung

$$a_1 \cdot \mu_1 + a_2 \cdot \mu_2 + \sqrt{a_1^2 \cdot \sigma_1^2 + a_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2\varrho \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2} \cdot \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \leq C,$$

wobei φ die Dichte und Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnen.

a) (5 Punkte) Erläutern Sie, welche ökonomische Zielsetzung die mathematische Maximierungsaufgabe beschreibt.

b) (5 Punkte) Man kann zeigen, dass eine Lösung (a_1, a_2) der Maximierungsaufgabe die folgende Bedingung erfüllen muss:

$$\frac{-a_1 \cdot \mu_1}{a_1 \cdot \mu_1 + \frac{a_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \varrho \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{a_1^2 \cdot \sigma_1^2 + a_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2\varrho \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2}} \cdot \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}} = \frac{-a_2 \cdot \mu_2}{a_2 \cdot \mu_2 + \frac{a_2^2 \cdot \sigma_2^2 + \varrho \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{a_1^2 \cdot \sigma_1^2 + a_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2\varrho \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2}} \cdot \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}} \qquad (*)$$

Ferner kann man zeigen, dass für den Nenner auf der linken Seite von $(*)$

$$\begin{aligned} & a_1 \cdot \mu_1 + \frac{a_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \varrho \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{a_1^2 \cdot \sigma_1^2 + a_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2\varrho \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2}} \cdot \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \\ = \; & \mathbb{E}\left(a_1 X_1 \mid a_1 X_1 + a_2 X_2 > a_1 \cdot \mu_1 + a_2 \cdot \mu_2 + \sqrt{a_1^2 \cdot \sigma_1^2 + a_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2\varrho \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2} \cdot \Phi^{-1}(\alpha)\right) \end{aligned}$$

gilt und das analoge Resultat für den Nenner auf der rechten Seite von $(*)$. Erklären Sie, welche Bedingung die Gleichheit $(*)$ darstellt und argumentieren Sie ökonomisch, weshalb diese Bedingung im Punkt (a_1, a_2), der das Maximierungsproblem löst, erfüllt sein muss. Sie können dabei ohne Beweis verwenden, dass die Kapitalallokation nach Kalkbrener hier ein Spezialfall der Euler-Allokation ist.

Dr. Guido Bader, Wolfgang Deichl
Dr. Volker Goersmeyer, Prof. Dr. Jochen Wolf

Lösungsvorschläge

1. a) Die BW-Agrar unterliegt den folgenden Marktrisiken, die wie angegeben reduziert werden können:
   - Aktienrisiko - Reduktion durch den Kauf von Put-Optionen
   - Immobilienrisiko - Reduktion durch eine Senkung der Immobilienquote
   - Zinsänderungsrisiko - Reduktion durch eine Anpassung an die versicherungstechnischen Rückstellungen hinsichtlich Höhe und Laufzeiten

   b) Unter Berücksichtigung der Wurzelformel und der kanonischen Bezugsgrößen für die Risikofaktoren ergibt sich das folgende benötigte Risikokapital SCR_{vt}:

$$\begin{aligned} SCR_{vt} &= \big[(0,35\cdot 60)^2+(0,12\cdot 50)^2+2\cdot 0,75\cdot 0,35\cdot 60\cdot 0,12\cdot 50 \\ &\quad +(0,25\cdot 40)^2+(0,1\cdot 40)^2+2\cdot 0,75\cdot 0,25\cdot 40\cdot 0,1\cdot 40\big]^{\frac{1}{2}} \\ &= 29,02 \text{ Mio. Euro.} \end{aligned}$$

   Die versicherungstechnischen Risiken werden durch diesen Ansatz vermutlich nicht vollständig abgebildet, da das für Ernteausfallversicherungen relevante Naturkatastrophenrisiko (v.a. Hagel) in Verbindung mit dem Kumulrisiko (ausschließliche Region der Versicherungen ist Baden-Württemberg) nicht explizit berücksichtigt wird (eine implizite Berücksichtigung im Prämienrisiko erscheint auf Basis des moderaten Risikofaktors eher unwahrscheinlich).

   c) Die folgenden strategischen Risiken könnten genannt werden:
   - Fokussierung auf nur eine Zielgruppe und zwei Produkte. Ein strategisches Risiko kann sich z.B. dadurch materialisieren, wenn es immer weniger landwirtschaftliche Betriebe in Baden-Württemberg gibt und der Bedarf an Versicherung somit zurückgeht.
   - Outsourcing der IT und Bestandsverwaltung. Hier kann sich ein strategisches Risiko materialisieren, wenn der Service des Dienstleisters nachlässt und dies zu vermehrten Kundenbeschwerden, Storno oder Neugeschäftseinbußen führt.
   - Vertrieb durch einen einzigen Vertriebsweg mit nur 10 angestellten Vermittlern. Hier kann sich ein Risiko dadurch materialisieren, dass es eine Kündigungswelle durch (evtl. unzufriedene) Vermittler gibt und das Neugeschäft damit einbricht bzw. durch neue teurere Vertriebswege ersetzt werden muss.

   Hinweis: Es waren nur zwei strategische Risiken anzugeben.

   d) Szenarioanalysen analysieren qualitativ oder quantitativ die Auswirkungen möglicher zukünftiger interner oder externer Gegebenheiten auf ein Unternehmen.

   Stresstests analysieren qualitativ oder quantitativ die Auswirkungen stark negativer Szenarien für ein Unternehmen.

   Im Vergleich zu Szenarioanalysen zeichnen sich Stresstest durch die meist höhere Schwere der betrachteten Stresse aus. Die betrachteten Zeiträume der Stresse sind oftmals kürzer und die betrachteten Risikofaktoren meist weniger komplex und weniger zahlreich als bei Szenarioanalysen.

e) *Vorbemerkung:* Bei der Lösung ist es wichtig, dass sowohl das Szenario bzw. der Stress genau beschrieben werden als auch die betrachtete Zielgröße und der betrachtete Zeitraum angegeben werden.

Szenarioanalyse für ein strategisches Risiko:
Die Fokussierung auf nur eine Zielgruppe und nur zwei Produkte kann bei einem deutlichen Rückgang der landwirtschaftlichen Betriebe in Baden-Württemberg zu einem Neugeschäftseinbruch führen. Es könnte ein Szenario betrachtet werden, in dem das Neugeschäft über einen Zeitraum von 10 Jahren jährlich jeweils um 10% zurückgeht, die Kosten auf Grund der Fixkostenproblematik jedoch nur um 5% p.a. reduziert werden können. Analysiert wird der Jahresüberschuss nach HGB sowie die Entwicklung des Eigenkapitals.

Stresstest für ein Marktrisiko:
Betrachtet wird ein Einbruch des Aktienportfolios um 50% innerhalb eines Jahres. Dabei wird die Auswirkung auf die ökonomische Bilanz und die Solvabilitätsquote nach Solvency II berechnet.

f) Unter einem Reverse-Stresstest wird eine Methode zur Identifikation eines oder mehrerer Szenarien, die zu einem vorgegebenen finanziellen Verlust führen, verstanden. Für die versicherungstechnischen Risiken könnte das benötigte Risikokapital gemäß Aufgabenteil b) betrachtet werden. Es könnte analysiert werden, wann dieses benötigte Risikokapital genau 80% des vorhandenen Eigenkapitals entspricht, wenn die Risikofaktoren (z.B. auf Grund schlechter historischer Schadenverläufe) erhöht werden müssten. Hierbei würde vereinfachend z.B. die gleiche prozentuale Erhöhung aller Faktoren betrachtet.

2. a) Der Expected Shortfall zum Niveau 99,5% berechnet sich bei 1.000 gegebenen Simulationen als Mittelwert über die fünf schlechtesten Ergebnisse. Damit erhält man die folgenden benötigten Risikokapitalien:

- für die Drei-Sparten-AG: $(630 + 740 + 810 + 900 + 920)/5 = 800$ Mio. Euro
- für die Leben AG: $(520 + 530 + 570 + 600 + 630)/5 = 570$ Mio. Euro
- für die Kranken AG: $(65 + 75 + 80 + 85 + 95)/5 = 80$ Mio. Euro
- für die Sach AG: $(280 + 320 + 370 + 380 + 400)/5 = 350$ Mio. Euro

b) Die Risikomarge dient dazu, einen möglichen neuen Investor, der die versicherungstechnischen Verbindlichkeiten eines Unternehmens übernimmt, für die Übernahme der Bestände zu entschädigen. Da der neue Investor frisches Risikokapital einbringen muss, möchte er als Entschädigung die künftigen Kapitalkosten auf dieses Kapital verdienen. Folglich ist die Risikomarge die Summe aller mit dem sicheren Zins diskontierten künftigen Kapitalkosten, die sich als Produkt aus Spread und für die jeweilige Periode benötigtem Risikokapital ermitteln. Da das frische Risikokapital sicher angelegt werden kann, muss lediglich der Spread darauf erwirtschaftet werden. Die Formel für die Risikomarge lautet

$$RM = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{k_t \cdot C_t}{(1 + s_t)^t}.$$

c) Wendet man die obige Formel mit den gegebenen Informationen an, so erhält man

$$\begin{aligned} RM &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{k_t \cdot C_t}{(1+s_t)^t} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{0,05 \cdot 0,8^t \cdot 570}{(1,01)^t} \\ &= 0,05 \cdot 570 \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{0,8}{1,01}\right)^t = 0,05 \cdot 570 / \left(1 - \frac{0,8}{1,01}\right) \\ &= 137,1 \text{ Mio. Euro.} \end{aligned}$$

d) Im Rahmen einer ökonomischen Bewertung eines Lebensversicherungsunternehmens wird der Best Estimate der Verpflichtungen als wahrscheinlichkeitsgewichteter Barwert der zukünftigen Cashflows ermittelt. Hierzu werden die zukünftigen Cashflows auf Grundlage von Wahrscheinlichkeitsverteilungen simuliert und der Best Estimate als empirischer Mittelwert der mit dem sicheren Zins diskontierten simulierten Cashflows berechnet. Die Verteilung der diskontierten Cashflows ist in der Regel schief, so dass Median und Mittelwert auseinanderfallen. Diese Differenz wird dann als Wertansatz für die Optionen und Garantien ausgewiesen.

e) Unter Verwendung von Aufgabenteil a) ergibt sich der Diversifikationseffekt zu $570 + 80 + 350 - 800 = 200$ Mio. Euro. Nach proportionaler Allokation des diversifizierten benötigten Risikokapitals auf die Sparten erhält man als benötigte Risikokapitalien:

- für die Leben AG: $\frac{570}{1000} \cdot 800 = 456$ Mio. Euro
- für die Kranken AG: $\frac{80}{1000} \cdot 800 = 64$ Mio. Euro
- für die Sach AG: $\frac{350}{1000} \cdot 800 = 280$ Mio. Euro

f) Als Hurdlerate ist $s + k = 6\%$ anzusetzen. Damit ergeben sich die folgenden EVA's:

- für die Leben AG: EVA $= 12 - 6\% \cdot 456 = -15,4$ Mio. Euro
- für die Kranken AG: EVA $= 5 - 6\% \cdot 64 = 1,2$ Mio. Euro
- für die Sach AG: EVA $= 20 - 6\% \cdot 280 = 3,2$ Mio. Euro

Die Leben-Sparte schafft somit keinen Wert.

g) Die folgenden Gründe könnten genannt werden, warum es trotzdem sinnvoll sein könnte, die nicht Wert schaffende Leben-Sparte weiter zu betreiben.

- Die Leben-Sparte ist eventuell ein wichtiger Kostenträger für die Gruppe, ohne den auch die übrigen Sparten ggf. keinen Wert schaffen.
- Der Vertrieb der Gruppe hat ggf. ein Anrecht darauf, aus jeder Sparte entsprechende Produkte vertreiben zu dürfen.
- Der Verlust des Berichtsjahres könnte ein zufälliger und kein systematischer gewesen sein, so dass die Profitabilitätsbeurteilung keine grundsätzliche Aussage gegen die Sparte Leben zulässt.

Hinweis: Es waren nur zwei Gründe anzugeben.

3. a) Wegen der Unabhängigkeit der R_i ist die Zufallsgröße $Z_n = \varrho R_0 + (1-\varrho)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i$

normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\varrho^2\sigma^2 + \frac{(1-\varrho)^2}{n}\sigma^2$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(Z_n) &= \sigma\sqrt{\varrho^2 + \frac{(1-\varrho)^2}{n}} \cdot \Phi^{-1}(\alpha), \\ ES_\alpha(Z_n) &= \sigma\sqrt{\varrho^2 + \frac{(1-\varrho)^2}{n}} \cdot \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)}{1-\alpha}, \end{aligned}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion und φ die Dichte der Standardnormalverteilung bezeichnen.

b) Es gilt $\lim_{n\to\infty} VaR_\alpha(Z_n) = \sigma\varrho \cdot \Phi^{-1}(\alpha) = VaR_\alpha(\varrho R_0)$. Im Grenzübergang verbleibt nur das Risiko des gemeinsamen Risikofaktors. Infolge der Diversifikation liefert das arithmetische Mittel der unabhängigen Risikofaktoren R_i, $i = 1, \ldots, n$, für $n \to \infty$ keinen Risikobeitrag mehr.

c) Wegen der Unabhängigkeit der R_i ist der Vektor $(R_1, \ldots, R_n)$ multivariat normalverteilt und folglich auch der Vektor (X_1, X_2).Daher hat (X_1, X_2) die Gauß-Copula C mit Parameter

$$\frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}} = \frac{\varrho^2\sigma^2}{\sigma^2 \cdot (\varrho^2 + (1-\varrho)^2)} = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 + (1-\varrho)^2}.$$

Da die Exponentialfunktion stetig und streng monoton wachsend ist, hat der Zufallsvektor (Y_1, Y_2) dieselbe Copula C.

d) Wir bestimmen zunächst die gemeinsame Verteilungsfunktion von (X_1^2, X_2^2). Für $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ berechnen wir

$$\begin{aligned} F_{(X_1^2,X_2^2)}(x_1, x_2) &= \mathbb{P}(X_1^2 \leq x_1, X_2^2 \leq x_2) \\ &= \mathbb{P}(-\sqrt{x_1} \leq X_1 \leq \sqrt{x_1}, -\sqrt{x_2} \leq X_2 \leq \sqrt{x_2}) \\ &= F_{(X_1,X_2)}(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}) - F_{(X_1,X_2)}(-\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}) - F_{(X_1,X_2)}(\sqrt{x_1}, -\sqrt{x_2}) \\ &\quad + F_{(X_1,X_2)}(-\sqrt{x_1}, -\sqrt{x_2}) \\ &= C(F_{X_1}(\sqrt{x_1}), F_{X_2}(\sqrt{x_2})) - C(1 - F_{X_1}(\sqrt{x_1}), F_{X_2}(\sqrt{x_2})) \\ &\quad - C(F_{X_1}(\sqrt{x_1}), 1 - F_{X_2}(\sqrt{x_2})) + C(1 - F_{X_1}(\sqrt{x_1}), 1 - F_{X_2}(\sqrt{x_2})). \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie der Normalverteilung erfüllen die Randverteilungsfunktionen die Beziehung

$$F_{X_i^2}(x_i) = F_{X_i}(\sqrt{x_i}) - F_{X_i}(-\sqrt{x_i}) = 2F_{X_i}(\sqrt{x_i}) - 1,$$

woraus $F_{X_i}(\sqrt{x_i}) = \frac{1}{2}(F_{X_i^2}(x_i) + 1)$ folgt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & F_{(X_1^2,X_2^2)}(x_1, x_2) \\ &= C\left(\frac{1}{2}(F_{X_1^2}(x_1) + 1), \frac{1}{2}(F_{X_2^2}(x_2) + 1)\right) - C\left(\frac{1}{2}(1 - F_{X_1^2}(x_1)), \frac{1}{2}(F_{X_2^2}(x_2) + 1)\right) \\ &\quad - C\left(\frac{1}{2}(F_{X_1^2}(x_1) + 1), \frac{1}{2}(1 - F_{X_2^2}(x_2))\right) + C\left(\frac{1}{2}(1 - F_{X_1^2}(x_1)), \frac{1}{2}(1 - F_{X_2^2}(x_2))\right). \end{aligned}$$

Dr. Guido Bader, Wolfgang Deichl
Dr. Volker Goersmeyer, Prof. Dr. Jochen Wolf

Diese Gleichung ist auch für $x_1 < 0$ oder $x_2 < 0$ erfüllt.
Nach dem Theorem von Sklar ist folglich

$$\begin{aligned}\tilde{C}(u_1, u_2) \;&:=\; C\left(\frac{1}{2}(u_1+1), \frac{1}{2}(u_2+1)\right) - C\left(\frac{1}{2}(1-u_1), \frac{1}{2}(u_2+1)\right) \\ &\quad - C\left(\frac{1}{2}(u_1+1), \frac{1}{2}(1-u_2)\right) + C\left(\frac{1}{2}(1-u_1), \frac{1}{2}(1-u_2)\right)\end{aligned}$$

4. a) Nach Berücksichtigung der Rentenverpflichtungen ergeben sich die folgenden Bilanzen, wobei die korrigierten Werte durch Fettdruck hervorgehoben sind.

korrigierte HGB-Bilanz			
Aktiva		Passiva	
Staatsanleihen	90.000	Eigenkapital	**19.000**
Aktien	10.000	versicherungstechnische Rückstellungen	**81.000**
Summe	100.000	Summe	100.000

korrigierte Solvenzbilanz					
Aktiva		Passiva			
Staatsanleihen	115.000	Eigenkapital			**19.000**
Aktien	15.000	Bewertungsdifferenz			**50.100**
		versicherungstechnische Rückstellungen			**60.900**
			Best Estimate	**57.000**	
			Risikomarge	**3.900**	
Summe	130.000	Summe			130.000

b) Die aufsichtsrechtlichen Eigenmittel bestehen in der Summe aus Eigenkapital und Bewertungsdifferenz und betragen damit 80.000 TEUR vor und 69.100 TEUR nach Berücksichtigung der Rentenverpflichtung.

c) Neben den auch hier zu berücksichtigenden Komponenten des Barwerts der garantierten Leistungen und der Risikomarge spielen bei Lebensversicherungen zusätzlich die Bewertung der in den Verpflichtungen enthaltenen Optionen und Garantien und die zukünftige Überschussbeteiligung eine Rolle, denn bei der Bewertung für die Solvenzbilanz geht als bester Schätzwert der wahrscheinlichkeitsgewichtete Durchschnitt aller künftigen Zahlungsströme diskontiert mit der maßgeblichen risikofreien Zinskurve ein. Optionen und Garantien sind in Lebensversicherungsverträgen in vielfältigen Formen enthalten. Beispielsweise gehören dazu Kündigungsmöglichkeiten mit garantierten Rückkaufswerten, Möglichkeiten der Erhöhung der Versicherungssumme, zusätzliche Einzahlungen und Kapitalwahlrechte. Die zukünftigen Überschussbeteiligungen sind zum einen von der Entwicklung der Kapitalmärkte als auch von Ermessensentscheidungen des Managements abhängig.

d) Das SCR für das lebensversicherungstechnische Risikomodul der Standardformel beträgt

$$\sqrt{900^2 + 300^2 + 200^2 + 2 \cdot 0,25 \cdot 900 \cdot 300 + 2 \cdot 0,25 \cdot 900 \cdot 200 + 2 \cdot 0,5 \cdot 200 \cdot 300} = 1.106,8 \text{ TEUR}.$$

e) Die weiteren Untermodule des lebensversicherungstechnischen Risikomoduls der Standardformel sind Sterblichkeits-, Storno-, Invaliditäts-/Morbiditätsrisiko und Lebensversicherungskatastrophenrisiko.

f) Im Szenario des Zinsrückgangs ändern sich in obiger Bilanz die Werte für die Staatsanleihen, für die versicherungstechnischen Rückstellungen, für den Best Estimate und für die Bewertungsdifferenz.

g) Die versicherungsmathematische Funktion koordiniert und überwacht die Berechnung der versicherungstechnischen Rückstellungen für die Solvenzbilanz, gewährleistet die Angemessenheit der verwendeten Methoden, Modelle und Annahmen und überprüft die Qualität der verwendeten Daten. So bildet beispielsweise die direkte Haftpflichtversicherung nur eine Sparte in der Sparteneinteilung unter Solvency II; es ist jedoch davon auszugehen, dass die Schadenabwicklungsmuster des industriellen Haftpflichtgeschäfts sich vom bisher ausschließlich betriebenen privaten Haftpflichtgeschäft unterscheiden. Hier würde also die Vorschrift greifen, eine Bewertung getrennt nach homogenen Risikogruppen durchzuführen. Mangels eigener Schadenerfahrung müsste überlegt werden, inwieweit Marktinformationen hierzu existieren, die übertragbar sind, oder Experteneinschätzungen notwendig sind und wie diese valide vorgenommen werden können. Analoge Fragestellungen für die versicherungsmathematische Funktion treten im Zusammenhang mit Schadenquoten und Kostenparametern auf, die bei der Bewertung der Prämienrückstellung verwendet werden. Dabei würde die versicherungsmathematische Funktion mit diesen Problemstellungen bereits vorab im ORSA und/oder im Produktentwicklungsprozess konfrontiert werden, damit die ordnungsgemäße Bewertung nach Annahme des Geschäfts sichergestellt ist. Darüber hinaus bewertet die versicherungsmathematische Funktion die Zeichnungs- und Rückversicherungspolitik des Unternehmens und müsste sich damit befassen, inwieweit bei der Tarifierung des neuen Geschäfts gewährleistet ist, dass Schaden- und Kostenbedarf durch die Prämieneinnahmen gedeckt sind und inwieweit Rückversicherungsschutz notwendig oder adäquat ist, um dem Risikoappetit des Unternehmens gerecht zu werden. Versicherungslösungen im industriellen Haftpflichtgeschäft sind weniger standardisiert als im privaten Haftpflichtgeschäft, die Versicherungssummen sind höher und die Vertriebswege sind andere. In diesem Zusammenhang sollte die versicherungsmathematische Funktion Themen aufgreifen wie die Einbindung bei der im Großkundengeschäft üblichen Tarifierung nach der Burning Cost-Methodik, maximale Versicherungssummen, Entstehung von Konzentrationsrisiken, Auswahl und Bewertung der Bonität von Rückversicherungsunternehmen und Abbildung der Rückversicherung in der Bewertung der versicherungstechnischen Rückstellungen.

Die Risikomanagement-Funktion (in Deutschland auch Risikocontrolling-Funktion genannt) stellt die ordnungsgemäße Funktionsweise des Risikomanagementsystems sicher (operative Durchführung, Qualitätssicherung). Im Falle der Aufnahme des industriellen Haftpflichtgeschäfts wäre im Rahmen des ORSA und/oder Produktentwicklungsprozesses zu überprüfen, inwieweit die Risikokontrollprozesse angemessen sind oder anzupassen sind. Für die Risikomanagement-Funktion insbesondere relevant ist hierbei die quantitative Komponente, d.h. Sicherstellung der angemessenen Bewertung des Risikos auf aggregierter Ebene und in Abhängigkeit der anderen wesentlichen Risiken. Das betrifft das laufende Reporting von Risikokennzahlen wie beispielsweise Limitauslastungen, aber auch die im Rahmen des ORSA vorzunehmende Einschätzung des benötigten Gesamtrisiko-/Solvenzkapitalbedarfs, die kontinuierliche Einhaltung des SCR und die Überprüfung der Angemessenheit von Standardformel oder internem Modell. Aufgrund der oben beschriebenen Unterschiede zwischen industriellem und privatem Haftpflichtgeschäft gehörten zu den betroffenen Punkten sicherlich Definition von Zeichnungsvollmachten, Höchstversicherungssummen, Auswahl und Bewertung der Bonität von Rückversicherung. In der Standardformel kämen damit mindestens Kapitalanforderungen für versicherungstechnische Katastrophenrisiken und Ausfallrisiken der Rückversicherer hinzu. Auch in der eigenen Einschätzung des Gesamtrisikokapitals wären die neuen Risiken quantitativ und qualitativ zu berücksichtigen, auch hinsichtlich der Aggregation mit den bereits vorhandenen Risiken, beispielsweise mit Stresstests hinsichtlich des Ausfalls von Rückversicherern oder des Eintritts von mehreren Großschäden.

Die weiteren aufsichtsrechtlich vorgeschriebenen Schlüsselfunktionen sind die Compliance-Funktion und die interne Revision.

5. a) Die Maximimierungsaufgabe verfolgt das Ziel, die optimalen Skalierungen a_1 und a_2 der beiden Sparten zu bestimmen, für die der erwartete Gewinn $-a_1 \cdot \mu_1 - a_2 \cdot \mu_2$ des Unternehmens, dessen Gesamtverlust durch $a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2$ beschrieben wird, unter der Nebenbedingung maximal wird, dass das benötigte Risikokapital das vorhandene Risikokapital C nicht übersteigt. Das benötigte Risikokapital ist hier durch den Expected Shortfall des normalverteilten Gesamtverlustes $a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2$ zum Niveau α gegeben:

$$ES_\alpha(a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2) = a_1 \cdot \mu_1 + a_2 \cdot \mu_2 + \sqrt{a_1^2 \cdot \sigma_1^2 + a_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2\varrho \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2} \cdot \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$$

b) *Vorbemerkung.* Die Bedingung $(*)$ kann mit der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren hergeleitet werden. Dies ist kein Bestandteil der Aufgabenstellung.

Sind die Sparten optimal skaliert, so haben sie denselben RORAC, was man durch Erweiterung der Brüche mit a_1 bzw. a_2 verifiziert. Der Zähler gibt dann den erwarteten Gewinn der Sparte, der Nenner gibt das nach der Allokation gemäß Kalkbrener auf die Sparte allokierte benötigte Risikokapital an. Wäre der RORAC der ersten Sparte größer als der RORAC der zweiten, so würde eine Ausweitung der ersten Sparte und Einschränkung der zweiten Sparte zu einer Verbesserung des RORAC des Gesamtunternehmens führen, da die Euler-Allokation die richtigen Investmentanreize setzt.