

Klausur im Grundwissen Wertorientiertes Risikomanagement

11.05.2018

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt **90**. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens **45** Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1. (22 Punkte)

Die Versicherung AG ist ein Konzern, der aus den drei Tochtergesellschaften Leben AG, Sach AG und Gesundheit AG besteht. Im veröffentlichten Risikobericht schreibt die Versicherung AG, dass sie ein internes Simulationsmodell zur Quantifizierung ihrer Risiken auf Basis einer ökonomischen Bewertung einsetzt. Es werden aus 1000 Simulationen jeweils die 10 schlechtesten Werte des ökonomischen Jahresergebnisses für den Konzern als Ganzes und für je zwei der Tochterunternehmen (alle Paarkombinationen) explizit angegeben:

	x-schlechtestes Ergebnis									
	Positive Werte stellen Verluste dar.									
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
Versicherung AG	320	345	357	388	540	600	620	670	870	1.020
Sach AG und Leben AG	223	243	276	288	320	360	390	400	440	490
Sach AG und Gesundheit AG	99	103	145	159	220	230	260	320	340	430
Leben AG und Gesundheit AG	310	322	333	356	380	430	450	460	610	670

Im Rahmen einer wertorientierten Steuerung gibt der Konzern für alle drei Tochterunternehmen eine Hurdle-Rate von 10% vor. Als Risikomaß verwendet der Konzern den einjährigen Expected Shortfall zum Niveau 99,4%.

- a) (2 Punkte) Die Hurdle-Rate ergibt sich als der risikofreie Zins zuzüglich eines Spreads. Geben Sie ein Beispiel an, was als risikofreier Zins angesetzt werden könnte.
- b) (3 Punkte) Geben Sie drei verschiedene Methoden an, wie der Spread im Allgemeinen bestimmt werden kann.
- c) (7 Punkte) Der Konzern gibt den Diversifikationseffekt im Rahmen der internen Steuerung an die Töchter weiter und allokiert das benötigte Risikokapital nach dem diskreten Marginalprinzip von Merton / Perold. Berechnen Sie für die drei Töchter das allokierte benötigte Risikokapital.
- d) (4 Punkte) Geben Sie eine möglichst große untere Schranke für den Diversifikationseffekt an.
Hinweis: Nutzen Sie die Subadditivität des Expected Shortfall.

- e) (3 Punkte) Die drei Töchter haben im betrachteten Geschäftsjahr die folgenden Nettogewinne erzielt:

Gesellschaft	Nettogewinn
Sach AG	24,75
Gesundheit AG	31,2
Leben AG	40

Berechnen Sie für die drei Töchter jeweils den EVA sowie den RORAC unter Verwendung der folgenden Werte für die allokierten Risikokapitalien.

Gesellschaft	allokiertes Risikokapital
Sach AG	165
Gesundheit AG	240
Leben AG	315

- f) (3 Punkte) Beurteilen Sie die Attraktivität der drei Sparten aus Konzernsicht anhand der EVA- sowie der RORAC-Berechnungen. Wie interpretieren und bewerten Sie, dass sich beim EVA und beim RORAC eine unterschiedliche Reihenfolge der drei Töchter ergibt?

Aufgabe 2. (21 Punkte)

Die Sach-Privat-Versicherung AG betreibt Geschäft in den Sparten Hausrat, Wohngebäude und Private Haftpflichtversicherung und vertreibt ihre Policen über eine Ausschließlichkeitsorganisation. In den letzten Jahren wurden folgende Schadenaufwände in den Sparten Hausrat und Wohngebäude beobachtet:

Jahr	Hausrat	Wohngebäude
2014	160	1000
2015	140	440
2016	120	410
2017	220	710
Summe	640	2560
Mittelwert	160	640

- a) (7 Punkte) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten und Kendalls tau für die beobachteten Schadenaufwände der beiden Sparten. Bewerten Sie die beiden Größen.
- b) (6 Punkte) Der Schadenaufwand in der Sparte Private Haftpflichtversicherung ist paarweise unabhängig von dem der anderen Sparten. Bewerten Sie die folgenden Copulas hinsichtlich der Eignung für die Modellierung der Abhängigkeitsstruktur zwischen den drei Sparten:
- Unabhängigkeitscopula,
 - Gauß-Copula,

- Gumbel-Copula.
- c) (2 Punkte) Solvency II aggregiert die benötigten Risikokapitalien unter Verwendung der sogenannten Wurzelformel. Unter welcher Voraussetzung würde die Modellierung der Abhängigkeit mit der Wurzelformel der Modellierung mit einer Copula entsprechen und um welche Copula handelte es sich dabei?
- d) (6 Punkte) Um auch in Zukunft erfolgreich zu sein, plant die Sach-Privat-Versicherung AG die Einführung eines neuen Produktes. Der Vertrieb sowie die Vertrags- und Schadenbearbeitung sollen zum überwiegenden Teil digital und automatisch betrieben werden. Das Produkt richtet sich an Privatkunden und bietet gleichzeitig Deckung in den Sparten Hausrat, Wohngebäude und Private Haftpflichtversicherung mit festen Versicherungssummen zu einem Gesamtpreis. Sie sind Inhaber der versicherungsmathematischen Funktion (VmF). Nehmen Sie Stellung zu mindestens drei von der VmF zu beurteilenden Aspekten bei der Einführung des neuen Produktes.

Aufgabe 3. (23 Punkte)

Ein Kompositversicherungsunternehmen stellt seinen Jahresabschluss in zwei Bilanzregimen (Bewertungsmethoden) auf und zwar nach HGB und ökonomisch orientiert an den Prinzipien von Solvency II. Die folgende Tabelle skizziert die Ergebnisse:

Bilanzübersicht (alle Angaben in Mio. EUR)

	Bilanz 1	Bilanz 2
Vermögen (Aktiva)	11.500	9.900
Verbindlichkeiten (Passiva)	9500	9400
<i>davon Steuerrückstellung</i>	1.000	400
Eigenkapital bzw. Eigenmittel	2.000	500

- a) (5 Punkte) Geben Sie mit Begründungen an, um welche Bewertungsmethode (HGB oder ökonomisch orientiert an den Prinzipien von Solvency II) es sich bei Bilanz 1 bzw. Bilanz 2 handelt.
- b) (5 Punkte) Das Unternehmen hat bei seiner Risikokapitalberechnung ein Risikokapital für das Zinsänderungsrisiko $SCR_{interest}$ in Höhe von 600 Mio. EUR ermittelt. Die Marktwerte der Kapitalanlagen sind dabei um 800 Mio. EUR gefallen.
- Skizzieren Sie in einer Tabelle analog zur obigen Bilanzübersicht (ohne Angabe von Steuern als davon-Größe), welche Bilanzen sich unter HGB bzw. ökonomisch orientiert an den Prinzipien von Solvency II ergeben, falls der für die SCR-Berechnung maßgebliche Zinsstress eintritt.
 - Geben Sie zu jedem Ihrer Tabelleneinträge eine kurze Begründung an.
- c) (4 Punkte) Insgesamt ergibt sich bei der Risikokapitalberechnung ein SCR von 1.800 Mio. EUR. Dadurch sinkt die Solvabilitätsquote deutlich unter die intern vorgegebene Toleranzschwelle von 140%. Nennen Sie vier Maßnahmen als Reaktionsmöglichkeiten auf diese Situation.



- d) (4 Punkte) Es stellt sich heraus, dass die unter Teilaufgabe c) beschriebene Situation durch eine sehr starke Erhöhung der Aktieninvestments im letzten Quartal des abgelaufenen Jahres entstanden ist. Die Kapitalanleger wollten dadurch von der Jahresendralle an den Aktienmärkten profitieren. Die Quereffekte auf die Kapitalausstattung waren ihnen nicht bewusst. Beurteilen Sie vor diesem Hintergrund das Risikotragfähigkeitskonzept des Unternehmens.
- e) (5 Punkte) Das Unternehmen beschließt aufgrund der schlechten Erfahrungen mit überhöhten Aktieninvestments, einen „Enterprise Risk Management (ERM) Ausschuss“ zu etablieren, durch den die unternehmensweite Risikosteuerung koordiniert werden soll.
- (i) Geben Sie mindestens vier Funktionen an, die in einem derartigen ERM-Ausschuss vertreten sein sollten.
 - (ii) Nennen Sie drei der Hauptaufgaben eines ERM-Ausschusses.

Aufgabe 4. (24 Punkte)

Die Verlustvariable X habe die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 1, \\ \frac{1}{1+\exp(-x)} & ; 1 \leq x < 3, \\ 1 - \frac{1}{3x^2} & ; x \geq 3. \end{cases}$$

Hinweis. Bitte geben Sie in Ihrer Lösung alle Ergebnisse auf 4 Nachkommastellen gerundet an.

- a) (8 Punkte)
- (i) (2 Punkte) Geben Sie den Funktionswert $F(3)$ und den linksseitigen Grenzwert $F(3-)$ an der Stelle 3 an.
 - (ii) (6 Punkte) Bestimmen Sie Value-at-Risk und Tail-Value-at-Risk zum Niveau 0,96.
- b) (16 Punkte) Zur Steuerung verwendet ein Versicherungsunternehmen den RORAC auf Basis des Risikomaßes Expected Shortfall zum Niveau 0,99. Für die Übernahme des Risikos X erhält es vom Kunden die Prämie $P_{EV} = 2$. Es erwägt die Möglichkeit, das Risiko

$$Y := \max(0, X - 8)$$

auf einen Rückversicherer zu transferieren.

- (i) (2 Punkte) Erläutern Sie kurz die ökonomische Wirkung des Rückversicherungsvertrags zum Transfer des Risikos Y .
- (ii) (9 Punkte) Bestimmen Sie die benötigten Risikokapitalien $ES_{0,99}(X)$ und $ES_{0,99}(X - Y)$.
- (iii) (5 Punkte) Geben Sie den RORAC vor und nach Rückversicherung an. Wie hoch darf die Rückversicherungsprämie P_{RV} höchstens ausfallen, damit der RV-Vertrag aus Sicht des Versicherungsunternehmens bei Verwendung der Steuerungskennzahl RORAC vorteilhaft ist.

Hinweis. Verwenden Sie zur Ermittlung des Nettogewinns **ohne Herleitung** die erwarteten Schäden vor bzw. nach Rückversicherung: $\mathbb{E}(X) = 1,3758$ bzw. $\mathbb{E}(X - Y) = 1,3342$.

Lösungsvorschläge

1. a) Als risikofreier Zinssatz könnten z.B. die Rendite deutscher Staatsanleihen oder auch die Rendite von Swapsätzen angesetzt werden. Da der betrachtete Zeitraum in diesem Beispiel ein Jahr beträgt, sollten auch einjährige Zinssätze verwendet werden.
- b) Die folgenden drei Methoden könnten u.a. genannt werden:
 - Der Eigner könnte kraft seiner Macht als Kapitalgeber einen Spread festlegen.
 - Bei börsengehandelten Unternehmen könnte der Spread am β eines CAPM (Capital Asset Pricing Model) orientiert werden.
 - Besitzt das betrachtete Unternehmen ein Unternehmensrating, so kann der Spread aus historischen Renditen anderer Versicherungsunternehmen mit vergleichbarem Rating abgeleitet werden. Dabei wird unterstellt, dass Ertrag und Risikokapital dieser Unternehmen bekannt sind oder hinreichend gut approximiert werden können und dass das Rating die Risikoposition hinreichend genau widerspiegelt.
- c) Es seien die Zufallsvariablen X der Verlust der Versicherung AG, X_S der Verlust der Sach AG, X_L der Verlust der Leben AG und X_G der Verlust der Gesundheit AG. Also gilt $X = X_S + X_L + X_G$. Weiter bezeichne ϱ das Risikomaß $ES_{99,4\%}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\varrho(X) &= (540 + 600 + 620 + 670 + 870 + 1.020)/6 = 720, \\ \varrho(X_S + X_L) &= (320 + 360 + 390 + 400 + 440 + 490)/6 = 400, \\ \varrho(X_S + X_G) &= (220 + 230 + 260 + 320 + 340 + 430)/6 = 300, \\ \varrho(X_L + X_G) &= (380 + 430 + 450 + 460 + 610 + 670)/6 = 500,\end{aligned}$$

und mit dem diskreten Marginalprinzip von Merton / Perold erhalten wir die allokierten Risikokapitalien

$$\begin{aligned}C_S &= \frac{\varrho(X) - \varrho(X_L + X_G)}{3 \cdot \varrho(X) - \varrho(X_S + X_L) - \varrho(X_S + X_G) - \varrho(X_L + X_G)} \cdot \varrho(X) \\ &= \frac{720 - 500}{3 \cdot 720 - 400 - 300 - 500} \cdot 720 = 165, \\ C_G &= \frac{\varrho(X) - \varrho(X_S + X_L)}{3 \cdot \varrho(X) - \varrho(X_S + X_L) - \varrho(X_S + X_G) - \varrho(X_L + X_G)} \cdot \varrho(X) \\ &= \frac{720 - 400}{3 \cdot 720 - 400 - 300 - 500} \cdot 720 = 240, \\ C_L &= \frac{\varrho(X) - \varrho(X_S + X_G)}{3 \cdot \varrho(X) - \varrho(X_S + X_L) - \varrho(X_S + X_G) - \varrho(X_L + X_G)} \cdot \varrho(X) \\ &= \frac{720 - 300}{3 \cdot 720 - 400 - 300 - 500} \cdot 720 = 315.\end{aligned}$$

- d) Mit den Bezeichnungen aus c) und der Subadditivität des Expected Shortfall erhalten wir

$$\varrho(X) \leq \varrho(X_S + X_L) + \varrho(X_G) \text{ bzw. } \varrho(X) - \varrho(X_S + X_L) \leq \varrho(X_G).$$



Gleiches gilt für die übrigen Kombinationen. Damit ergibt sich die folgende Abschätzung für den Diversifikationseffekt

$$\begin{aligned} & \varrho(X_S) + \varrho(X_L) + \varrho(X_G) - \varrho(X) \\ & \geq (\varrho(X) - \varrho(X_S + X_L)) + (\varrho(X) - \varrho(X_S + X_G)) + (\varrho(X) - \varrho(X_L + X_G)) - \varrho(X) \\ & = 2\varrho(X) - \varrho(X_S + X_L) - \varrho(X_S + X_G) - \varrho(X_L + X_G) \\ & = 1.440 - 400 - 300 - 500 = 240. \end{aligned}$$

Der Diversifikationseffekt beträgt also mindestens 240.

- e) Mit den Formeln $EVA = N - h \cdot C$ und $RORAC = \frac{N}{C}$ ergeben sich die folgenden Werte für die drei Gesellschaften:

Sach AG: $EVA = 24,75 - 10\% \cdot 165 = 8,25$ und $RORAC = \frac{24,75}{165} = 15\%$,

Gesundheit AG: $EVA = 31,2 - 10\% \cdot 240 = 7,2$ und $RORAC = \frac{31,2}{240} = 13\%$,

Leben AG: $EVA = 40 - 10\% \cdot 315 = 8,5$ und $RORAC = \frac{40}{315} = 12,7\%$.

- f) Alle drei Gesellschaften haben einen positiven EVA bzw. einen RORAC oberhalb der Hurdle-Rate und schaffen daher Wert. Betrachtet man nur die EVAs, so schafft die Leben AG mit 8,5 am meisten Wert. Gleichzeitig hat die Leben AG jedoch mit 12,7% den geringsten RORAC. Den höchsten RORAC hat die Sach AG mit 15%. Grund hierfür sind die unterschiedlichen benötigten Risikokapitalien. Auf Grund dieser Ergebnisse kann weder die Sach AG noch die Leben AG als bevorzugte Sparte bezeichnet werden. Der Konzern muss letztlich entscheiden, ob eine der Kennzahlen für die Steuerung bedeutsamer ist als die andere. Je nachdem, ob absoluter Erfolg oder relativer Erfolg eine höhere Bedeutung hat, wird der Konzern den EVA oder den RORAC höher bewerten.
2. a) Bezeichnen h_t und w_t den Schadenaufwand im Kalenderjahr t in den Sparten Hausrat bzw. Wohngebäude sowie c_h bzw. c_w deren Mittelwert, so ergibt sich der lineare Korrelationskoeffizient als

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{\sum_{t=2014}^{2017} (h_t - c_h)(w_t - c_w)}{\sqrt{\sum_{t=2014}^{2017} (h_t - c_h)^2 \cdot \sum_{t=2014}^{2017} (w_t - c_w)^2}} \\ &= \frac{17400}{\sqrt{5600 \cdot 227400}} \\ &= 0,49. \end{aligned}$$

Kendalls tau berechnet sich zu

$$\varrho_\tau = \frac{1}{6} \sum_{t_i < t_j} \text{sign} [(h_{t_i} - h_{t_j})(w_{t_i} - w_{t_j})] = \frac{1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Beide Größen sind leicht zu berechnen. Die Pearsonsche lineare Korrelation misst lineare Abhängigkeiten. Nur für bestimmte Verteilungen (elliptische) erweist sie sich als ein uneingeschränkt aussagekräftiges Abhängigkeitsmaß. Für bestimmte gemeinsame Verteilungen wie z.B. die multivariate Normalverteilung kann sie zur Parametrisierung herangezogen werden. Kendalls tau hängt nur von der Rangverteilung ab und ist somit für alle Verteilungen eine Größe mit Aussagekraft. Für verschiedene Copulas bestehen einfache Bezugsformeln zwischen Kendalls tau und den Parametern der Copula.



DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Dr. Guido Bader, Wolfgang Deichl
Dr. Volker Goersmeyer, Prof. Dr. Jochen Wolf

- b) Die Unabhängigkeitscopula ist nicht geeignet, da die Sparten Hausrat und Wohngebäude wegen gemeinsamer Risikotreiber (z.B. schwere Unwetter) nicht unabhängig sind. Die Gauß-Copula ist leicht zu parametrisieren und zur Modellierung im „mittleren“ Schadenbereich möglicherweise geeignet, jedoch nicht für die Modellierung im Tail-Bereich, da zwischen Hausrat und Wohngebäude eine Abhängigkeit im oberen Tail zu erwarten ist.
- Da man bei der Gumbel-Copula nur einen Parameterwert wählen kann, kann nicht gleichzeitig die Unabhängigkeit zwischen Sparten und die große Abhängigkeit zwischen anderen Sparten modelliert werden.
- c) Läge für sämtliche Teilrisiken eine multivariate Normalverteilung vor, entspräche die nach der Standardformel von Solvency II modellierte Abhängigkeitsstruktur der Gauß-Copula mit der zugehörigen Kovarianzmatrix.
- d) Die versicherungsmathematische Funktion ist eine der unter Solvency II vorgeschriebenen Governance-Funktionen. Gemäß ihrer Aufgaben ist zu erwarten, dass ihre Stellungnahme darauf eingeht,
- inwieweit bei der Berechnung der versicherungstechnischen Rückstellungen berücksichtigt werden muss, dass die Schadenregulierung anders als beim bisherigen Geschäft betrieben wird und daher bisher verwendete Schadendreiecke, Parameter etc. für die Bewertung nicht angemessen sein könnten.
 - inwieweit Annahmen über Höhe und Zuordnung von Kosten der Schadenregulierung angemessen sind.
 - inwieweit die notwendigen Daten mit den neuen Systemen erfasst und verarbeitet werden und ob eine ausreichende Datenqualität sichergestellt ist.
 - inwieweit die Annahmen bei der Kalkulation der Gesamtprämie gerechtfertigt sind, insbesondere, ob hierdurch mit Antiselektionseffekten zu rechnen ist und ob Kosten- und Schadenparameter aus Beobachtungen aus dem traditionellen Geschäft übertragbar auf das neue Geschäft sind.
 - ob die neuen Verträge durch die bestehenden Rückversicherungsverträge abgedeckt sind.
 - welche Auswirkungen auf die Bestände zu erwarten sind, die auf der Basis der nicht-digitalen Produkte geschrieben werden. Aufgrund der Selektion ergibt sich möglicherweise auch hier ein Strukturbruch in den Daten, die der Berechnung der versicherungstechnischen Rückstellungen zugrundegelegt werden.
 - etc.
3. a) Bei der Bilanz 1 handelt es sich um das ökonomische Bilanzregime orientiert an den Prinzipien von Solvency II, während Bilanz 2 die HGB-Bewertung darstellt.
- Begründungen:
- Die deutlich höhere Bewertung der Aktiva und der Eigenmittel in Bilanz 1 lässt auf eine ökonomische Bewertung gemäß Solvency II schließen, die für beide Positionen normalerweise höhere Werte liefert als Bewertungen gemäß dem Vorsichtsprinzip unter HGB.



- Höhere Steuerrückstellungen in der Bilanz 1 entstehen aufgrund des Ansatzes latenter Steuern in der Solvabilitätsübersicht gemäß Solvency II.
- Nach Abzug der Steuerrückstellungen ergibt sich in Bilanz 2 eine vorsichtigere Bewertung der Verbindlichkeiten, was für einen Kompositversicherer ebenfalls zum Vorsichtsprinzip unter HGB passt.

b) Bilanzen nach Zinsstress (alle Angaben in Mio. EUR):

	Solvabilitätsübersicht	HGB-Bilanz
Forderungen (Aktiva)	11.500 – 800 = 10.700 (Marktwertveränderung Kapitalanlagen)	9.900 (kein Effekt aufgrund Bilanzierung zu Nominalwerten)
Verbindlichkeiten	9.500 – 200 = 9.300 (kombinierter Effekt aus höherer Diskontierung versicherungstechnischer Verbindlichkeiten und geringeren latenten Steuern)	9.400 (kein Effekt, da insbesondere versicherungstechnische Verbindlichkeiten unter HGB nicht abhängig vom aktuellen Zinsniveau sind)
Eigenkapital bzw. Eigenmittel	2.000 – 600 = 1.400 (Effekt gemäß $SCR_{interest}$)	500

- c) Das Unternehmen muss entweder die Kapitalausstattung stärken oder die Risiken reduzieren, wofür es folgende Möglichkeiten gibt:
- Aufnahme neuen Kapitals am Kapitalmarkt, von den Eigentümern oder in Form eines Nachschusses der Versicherungsnehmer (letzteres bei Versicherungsvereinen)
 - Aufnahme von risikotragendem Fremdkapital (Nachrangdarlehen oder Genussrechtskapital)
 - Gewinnthesaurierung
 - Umschichtung der Kapitalanlagen
 - Hedging oder Angleichung der Laufzeitstruktur der Aktiva und Passiva (ALM)
 - erweiterte Rückversicherung
 - Verkauf von Beständen
 - etc.

Bemerkung: Es waren nur vier Maßnahmen gefragt.

- d) Das Risikotragfähigkeitskonzept ist in dem vorliegenden Unternehmen nicht ausreichend ausgearbeitet oder implementiert. Das Konzept muss insbesondere darlegen, wieviel des vorhandenen Kapitals im operativen Betrieb zur Risikotragung verwendet werden soll und wie dabei die Aufteilung auf die Risikoarten (hier Aktienrisiko) erfolgt. Daraus sind zwingend Limite abzuleiten, durch die die Steuerung der organisatorischen Geschäftsbereiche operationalisiert wird – in diesem Fall ein Limit für die Aktienquote.
- e) (i) Beteiligte:
- Vertreter der Geschäftsleitung
 - Risikomanagementfunktion (RMF)



- Vertreter der operativen Geschäftsbereiche
- Versicherungsmathematische Funktion (VmF)
- weitere Schlüsselfunktionen

Bemerkung: Es waren nur vier Beteiligte gefragt.

(ii) Hauptaufgaben:

- Vorschlag des Gesamtrisikoappetits
- Vorschlag/Definition des Risikoappetits für einzelne Risikoklassen
- Kapitalallokation
- Vorschlag/Definition von Risikomanagementprozessen
- Vorschlag für risikobezogene Anreizsysteme
- Bewertung von Produktneuerungen
- Bewertung anderer risikorelevanter Vorhaben
- etc.

Bemerkung: Es waren nur drei Aufgaben gefragt.

4. a) Wegen $F(3-) = \frac{1}{1+\exp(-3)} = 0,9526$ und $F(3) = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3^2} = 0.9630$ gilt $VaR_{0,96}(X) = 3$.
Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} TVaR_{0,96}(X) &= \frac{1}{\mathbb{P}(X > 3)} \int_3^{\infty} x \cdot \frac{2}{3} x^{-3} dx \\ &= \frac{1}{0,0370} \cdot \frac{2}{3} \cdot [-x^{-1}]_3^{\infty} \\ &= \frac{2}{0,111} \cdot \frac{1}{3} = 6,0060. \end{aligned}$$

- b) (i) Bei dem Rückversicherungsvertrag handelt es sich um einen Schadenexzedenten, durch den der maximale Schadenaufwand für das Versicherungsunternehmen auf 8 begrenzt wird.
- (ii) Invertierung von $1 - \frac{1}{3x^2} = z$ liefert $VaR_z(X) = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{1-z}}$ für $z \geq 0,99$. Damit berechnen wir das Risikomaß

$$\begin{aligned} ES_{0,99}(X) &= \frac{1}{1 - 0,99} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \int_{0,99}^1 (1-z)^{-\frac{1}{2}} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{3} \cdot 0,01} [-2(1-z)^{\frac{1}{2}}]_{0,99}^1 \\ &= \frac{20}{\sqrt{3}} = 11,5470. \end{aligned}$$

Da gemäß (i) der maximale Schadenaufwand nach Rückversicherung auf 8 be-



grenzt ist, gilt $VaR_z(X - Y) = 8$ für $z \geq F(8)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} ES_{0,99}(X - Y) &= \frac{1}{0,01 \cdot \sqrt{3}} \cdot \int_{0,99}^{F(8)} (1 - z)^{-\frac{1}{2}} dz + \frac{8}{0,01} \cdot (1 - F(8)) \\ &= \frac{1}{0,01 \cdot \sqrt{3}} \cdot \int_{0,99}^{1 - \frac{1}{192}} (1 - z)^{-\frac{1}{2}} dz + \frac{8}{0,01} \cdot \frac{1}{3 \cdot 8^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3} \cdot 0,01} \left[-2(1 - z)^{\frac{1}{2}} \right]_{0,99}^{1 - \frac{1}{192}} + \frac{1}{0,24} \\ &= 3,2137 + 4,1667 = 7,3804. \end{aligned}$$

- (iii) Der RORAC vor Rückversicherung ist gegeben durch $\frac{\mathbb{E}(-X) + P_{EV}}{ES_{0,99}(X)}$, der RORAC nach Rückversicherung durch $\frac{\mathbb{E}(Y - X) + P_{EV} - P_{RV}}{ES_{0,99}(X - Y)}$.
Damit der RORAC sich nicht verschlechtert, wird die maximale Rückversicherungsprämie durch die Bedingung

$$\frac{\mathbb{E}(-X) + P_{EV}}{ES_{0,99}(X)} = \frac{\mathbb{E}(Y - X) + P_{EV} - P_{RV}}{ES_{0,99}(X - Y)}$$

festgelegt. Wir erhalten

$$\begin{aligned} P_{RV} &= -\frac{ES_{0,99}(X - Y)}{ES_{0,99}(X)} (\mathbb{E}(-X) + P_{EV}) + \mathbb{E}(Y - X) + P_{EV} \\ &= -\frac{7,3804}{11,5470} (-1,3758 + 2) - 1,3342 + 2 \\ &= 0,2668. \end{aligned}$$

Also ist der Rückversicherungsvertrag aus Sicht des Versicherungsunternehmens für $P_{RV} < 0,2668$ vorteilhaft.

Wir leiten schließlich außerhalb der Aufgabenstellung die im Hinweis angegebenen Erwartungswerte her. Es ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 1 \cdot \frac{1}{1 + \exp(-1)} + \int_1^3 \frac{x \exp(-x)}{(1 + \exp(-x))^2} dx \\ &\quad + 3 \cdot (F(3) - F(3-)) + \int_3^\infty x \cdot \frac{2}{3} x^{-3} dx \\ &= 0,73106 + \left[\frac{x \exp(x)}{\exp(x) + 1} - \ln(\exp(x) + 1) \right]_1^3 + 0,0312 + \frac{2}{3} \cdot [-x^{-1}]_3^\infty \\ &= 0,73106 + 0,39134 + 0,0312 + \frac{2}{9} \\ &= 1,1536 + \frac{2}{9} \\ &= 1,3758. \end{aligned}$$



DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Dr. Guido Bader, Wolfgang Deichl
Dr. Volker Goersmeyer, Prof. Dr. Jochen Wolf

Die Verteilungsfunktion von $X - Y$ stimmt auf $[0, 8)$ mit der Verteilungsfunktion von X überein und springt an der Stelle 8 auf den Wert 1. Damit schließen wir aus der obigen Rechnung

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X - Y) &= 1,1536 + \int_3^8 x \cdot \frac{2}{3}x^{-3} dx + 8 \cdot \frac{1}{3 \cdot 8^2} \\ &= 1,1536 + \frac{2}{3} \cdot [-x^{-1}]_3^8 + \frac{1}{24} \\ &= 1,1536 + 0,13889 + 0,04167 \\ &= 1,3342.\end{aligned}$$