

## Klausur im Grundwissen Wertorientiertes Risikomanagement

05.05.2017

### Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt **90**. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens **36** Punkte erreicht werden.

**Aufgabe 1. (21 Punkte)** Die Leben AG ist ein deutscher Lebensversicherer, der zum 31.12.2016 die folgende ökonomische Bilanz im Rahmen von Solvency II veröffentlicht hat:

Aktiva		Passiva	
Festverzinsliche Wertpapiere	3.850	Eigenkapital	100
Immobilien	800	Zukünftiger Aktionärgewinn (ZAG)	50
Aktien	250	Nachrangdarlehen	100
		Überschussfonds	240
		Going-Concern-Reserve	30
		Versicherungstechnische Rückstellungen	4.450
Sonstige Aktiva	100	Sonstige Passiva	30
<b>Summe Aktiva</b>	<b>5.000</b>	<b>Summe Passiva</b>	<b>5.000</b>

Das Nachrangdarlehen wurde von der Aufsicht im Rahmen von Solvency II als Basiseigenmittel genehmigt und weist einen fixen jährlichen Zinssatz von 8% auf.

Der sichere Zins beträgt (für alle Laufzeiten) 2%.

Die Leben AG setzte ein internes Simulationsmodell zur Quantifizierung ihrer Risiken auf Basis einer ökonomischen Bewertung ein. Es werden aus 1.000 Simulationen die 10 schlechtesten Resultate für das ökonomische Ergebnis explizit angegeben:

	x-schlechtestes Ergebnis									
	Positive Werte stellen Verluste dar.									
	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
Leben AG	300	370	420	450	490	520	530	550	580	620

- a) (1 Punkt) Wie hoch ist das ASM (available solvency margin) der Gesellschaft?
- b) (2 Punkte) Was versteht man unter dem Überschussfonds und der Going-Concern-Reserve?
- c) (6 Punkte) Die Leben AG hat von der international anerkannten Rating-Agentur „Ratefix“ die Ratingnote „A“ erhalten. Konkurrenzunternehmen weisen in ihren schon veröffentlichten Jahresabschlüssen die folgenden Ergebnisse per 31.12.2016 auf:

Gesellschaft	Ratefix-Rating	RORAC
Konkurrent A	AA	8%
Konkurrent B	A	9%
Konkurrent C	AAA	7%
Konkurrent D	A	11%

Auf Basis dieser Informationen hat die Leben AG Anfang 2017 nachträglich einen Spread von 8% für die Ermittlung der Hurdle-Rate festgelegt.

- i. (2 Punkte) Geben Sie eine mögliche Erklärung an, wie der Spread – unter Verwendung obiger Informationen – hergeleitet worden sein könnte. Wie hoch ist die festgelegte Hurdle-Rate?
  - ii. (2 Punkte) Ist eine nachträgliche Festlegung der Hurdle-Rate grundsätzlich sinnvoll? Begründen Sie Ihre Antwort.
  - iii. (2 Punkte) Nennen Sie zwei grundsätzliche Kritikpunkte daran, eine Hurdle-Rate aus veröffentlichten Ratings und RORACs von Konkurrenzunternehmen abzuleiten.
- d) (2 Punkte) Als Risikomaß verwendet die Leben AG den Expected Shortfall zum Niveau 99,  $x\%$ . Bei welchem Niveau stimmen benötigtes Risikokapital und ASM überein?
- e) (4 Punkte) Berechnen Sie für die Leben AG die Risikomarge nach dem Kapitalkostenansatz. Unterstellen Sie dabei, dass das benötigte Risikokapital des ersten betrachteten Jahres (gemäß Aufgabenteil d)) in den Folgejahren jährlich um 10% abnimmt. Der in Teil c) ermittelte Spread sei ebenfalls konstant für alle Perioden. Bei der Berechnung wird der Bestand genau über 100 Jahre projiziert (es fließen also die Jahre 0 - 99 in die Berechnung mit ein). Runden Sie Ihr Ergebnis auf eine Nachkommastelle.
- Hinweis.* Die geometrische Summenformel lautet  $\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ .
- f) (1 Punkt) Die Leben AG weist 2016 vor Abzug der Fremdkapitalzinsen auf das Nachrangdarlehen ein Nettoergebnis in Höhe von 20 aus. Wie hoch ist das Nettoergebnis nach Berücksichtigung der Fremdkapitalzinsen?
- g) (2 Punkte) Wie hoch ist der Aktionärsanteil am ASM, der im Rahmen einer wertorientierten Steuerung mit der Hurdle-Rate zu verzinsen ist? Begründen Sie Ihre Antwort.
- h) (3 Punkte) Berechnen Sie bei ökonomischer Sichtweise für das Sicherheitsniveau aus Teil d) die folgenden Erfolgsmessgrößen:
- i. Economic Value Added (EVA)
  - ii. Return on Equity (ROE)
  - iii. Return on Risk Adjusted Capital (RORAC)
  - iv. Risk Adjusted Return on Capital (RAROC)

**Aufgabe 2. (17 Punkte)** Sie sind zum verantwortlichen Inhaber der Versicherungsmathematischen Funktion der RS Versicherung AG ernannt worden, die das Rechtsschutzgeschäft betreibt. Im Rahmen der jährlichen unternehmenseigenen Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung (ORSA) bittet Sie die Risikocontrollingfunktion um Ihre Unterstützung bei der Bewertung der Angemessenheit der Standardformel, die die RS Versicherung AG zur Ermittlung der Solvenzkapitalanforderung verwendet.

- a) (4 Punkte) Nennen Sie vier Aufgaben der Versicherungsmathematischen Funktion.
- b) (2 Punkte) Welche weiteren Beurteilungen sind neben der Bewertung der Angemessenheit der Standardformel von der RS Versicherung AG im Rahmen des ORSA vorzunehmen?
- c) (2 Punkte) Beschreiben Sie für die RS Versicherung AG kurz, welche Hauptrisikomodule in der Basissolvvenzkapitalanforderung nach der Standardformel betrachtet werden und wie diese aggregiert werden.

Sie beschäftigen sich mit der Solvenzkapitalanforderung für das Reserverisiko. In einer Veröffentlichung der EIOPA lesen Sie, dass hierbei von einer Lognormalverteilung der benötigten Reserve ausgegangen wird. Sie wissen, dass für eine Zufallsgröße  $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$  folgende Berechnungsformeln für den Erwartungswert und die Varianz dieser Zufallsgröße gelten:

- $\mathbb{E}(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$
  - $Var(X) = \exp(2\mu + \sigma^2) (\exp(\sigma^2) - 1)$
- d) (6 Punkte) Sei  $c = \frac{\sqrt{Var(X)}}{\mathbb{E}(X)}$  der Variationskoeffizient. Zeigen Sie unter Verwendung obiger Formeln:
- i. (2 Punkte)  $\sigma^2 = \ln(c^2 + 1)$
  - ii. (2 Punkte)  $\mu = \ln\left(\frac{\mathbb{E}(X)}{\sqrt{c^2 + 1}}\right)$
  - iii. (2 Punkte) Für  $\alpha \in (0, 1)$  gilt  $VaR_\alpha(X) = f(c) \cdot \mathbb{E}(X)$  mit

$$f(c) = \frac{\exp\left(\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\ln(c^2 + 1)}\right)}{\sqrt{c^2 + 1}},$$

wobei  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

In der Tabelle mit den Parametern der Standardformel finden Sie für das Reserverisiko der Rechtsschutzversicherung den Wert  $c=12\%$ .

- e) (2 Punkte) Welche Solvenzkapitalanforderung für den unerwarteten Verlust aus der Abwicklung der bereits eingetretenen Rechtsschutzschadenfälle der RS Versicherung AG würde sich unter diesen Modellannahmen ergeben, wenn der beste Schätzwert der versicherungstechnischen Rückstellungen 10 Mio EUR beträgt?  
*Hinweis:* Es gilt  $\Phi^{-1}(99,5\%) = 2,5758$ .

Auf Basis der Beobachtungen im Bestand der RS Versicherung AG ermitteln Sie einen Variationskoeffizienten von lediglich 6%.

- f) (1 Punkt) Welche Möglichkeit sehen Sie, die Solvenzkapitalanforderung der RS Versicherung AG zu senken?

**Aufgabe 3. (11 Punkte)** Betrachten Sie ein Versicherungsunternehmen mit zwei Geschäftsbereichen und zugehörigen Verlustvariablen  $L_1, L_2$ . Das Risikokapital der einzelnen Geschäftsbereiche werde mit dem Risikomaß Value at Risk zum Niveau  $\alpha \geq 0,5$  gemessen, d.h. es gelte  $RC_i = \text{VaR}_\alpha(L_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Das Unternehmen verwendet zur Aggregation des Risikokapitals der beiden Geschäftsbereiche eine Regel der Form

$$(1) \quad RC = \left( RC_1^2 + 2\rho \cdot RC_1 \cdot RC_2 + RC_2^2 \right)^{1/2},$$

wobei  $\rho \in [0, 1]$  ein vorgegebener Korrelationsparameter ist und  $RC$  das aggregierte Risikokapital bezeichnet.

- a) (2 Punkte) Nennen Sie eine Stärke und eine Schwäche dieser Kapitalaggregationsregel.
- b) (5 Punkte) Nehmen Sie an, dass  $L_1$  und  $L_2$  bivariat normalverteilt mit Mittelwert 0 und Korrelation  $\rho$  sind. Leiten Sie für diesen Fall die Aggregationsregel (1) her.
- c) (4 Punkte) Zeigen Sie: Sind  $RC_1$  und  $RC_2$  nichtnegativ, so gilt  $RC \leq RC_1 + RC_2$ . Folgern Sie daraus, dass sich die Aggregationsregel (1) nicht für alle bivariaten Verteilungen herleiten lässt.

**Aufgabe 4. (24 Punkte)** Die anhaltende Niedrigzinsphase stellt die Lebensversicherungsbranche vor Herausforderungen. Die InnovativLeben AG plant in diesem Zusammenhang im laufenden Geschäftsjahr 2017 verschiedene Gegenmaßnahmen:

- a) (8 Punkte) Das Neugeschäft soll ab sofort vollständig von traditionellen Garantieprodukten auf neue, fondsgebundene Lebensversicherungsprodukte (FLV) ohne Garantie umgestellt werden (der traditionelle Bestand wird abgewickelt). Nennen Sie
- i. (4 Punkte) zwei Risikokategorien, bei denen sich die Risikoposition durch diese Maßnahme mittel- oder kurzfristig verbessert,
  - ii. (4 Punkte) zwei Risikokategorien, bei denen neue, unternehmensspezifische Risiken entstehen.

Geben Sie dabei bei Teilaufgabe i. und ii. *jeweils* eine kurze Begründung für Ihre Nennungen an.

- b) (5 Punkte) Die Kapitalanlage des traditionellen Bestandes (das traditionelle Sicherungsvermögen) soll umgeschichtet werden, um ausreichenden Kapitalertrag für die Finanzierung der traditionellen Garantien zu erzielen. Die Umsetzung soll durch eine signifikante Erhöhung der Aktienquote zu Lasten der bestehenden Investments in festverzinsliche Anlagen erfolgen.



- i. (2 Punkte) Treffen Sie eine Aussage, ob das Marktrisiko durch diese Einzelmaßnahme sinkt oder steigt; begründen Sie Ihre Aussage qualitativ durch Verweis auf die Solvency II-Standardformel.
- ii. (3 Punkte) Geben Sie eine Begründung an, weshalb sich das Zinsänderungsrisiko bei Umsetzung dieser Maßnahme trotz des geringeren Kapitalanlagenexposure nicht unbedingt verringert.
- c) (3 Punkte) Müssen die beiden in den Teilaufgaben a) und b) beschriebenen Maßnahmen im ORSA-Bericht im laufenden Jahr 2017 erwähnt werden? Begründen Sie Ihre Antwort.
- d) (4 Punkte) Erklären Sie den Unterschied zwischen einem Stresstest und einem Reverse-Stresstest und geben Sie einen konkreten Reverse-Stresstest für die Maßnahme aus Teilaufgabe b) an.
- e) (4 Punkte) Erklären Sie den Unterschied zwischen integrierten und supplementären Risikomanagementprozessen und geben Sie ein konkretes Beispiel für einen integrierten Risikomanagementprozess an, der die mit der Maßnahme aus Teilaufgabe b) verbundenen Risiken bewertet.

**Aufgabe 5. (17 Punkte)** Ein Unternehmen betreibt zwei Sachversicherungssparten. Deren Verlustvariablen  $X_1$  und  $X_2$  seien identisch Pareto-verteilt mit Parameter  $b > 1$ , d.h.

$$\mathbb{P}(X_i \leq x) = (1 - x^{-b}) \cdot 1_{[1, \infty)}(x), \quad i = 1, 2.$$

*Hinweis.* Die Gumbel-Copula hat die Form

$$C_\theta(u_1, u_2) = \exp\left(-\left((-\ln(u_1))^\theta + (-\ln(u_2))^\theta\right)^{1/\theta}\right), \quad 1 \leq \theta < \infty.$$

Zwischen dem Parameter  $\theta$  der Gumbel-Copula und Kendalls tau  $\rho_\tau$  besteht der folgende Zusammenhang:  $\rho_\tau = 1 - \frac{1}{\theta}$ .

- a) (2 Punkte) Geben Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion des Zufallsvektors  $(X_1, X_2)$  an, falls die Abhängigkeitsstruktur durch die Gumbel-Copula mit Parameter  $\theta$  beschrieben wird.
- b) (5 Punkte) Geben Sie einen Schätzer  $\hat{\rho}_\tau$  für Kendall's tau auf Basis der folgenden vier Realisationen von  $X_1, X_2$  an.

Jahr	1	2	3	4
$X_1$	1,8171	1,6610	1,5582	1,9737
$X_2$	32,4105	1,2324	1,6099	4,0164

Bestimmen Sie einen Schätzer für den Copulaparameter  $\theta$  mit Hilfe der Momentenmethode.

- c) (4 Punkte) Zeigen Sie:  $\mathbb{P}(X_1 > VaR_\alpha(X_1), X_2 > VaR_\alpha(X_2)) = 1 - 2\alpha + \exp(2^{1/\theta} \ln(\alpha))$ . Erklären Sie, weshalb das Ergebnis nicht vom Parameter  $b$  der Randverteilungen abhängt.



- d) (6 Punkte) Geben Sie die Definition der oberen Tailabhängigkeit  $\lambda_u(X_1, X_2)$  des Zufallsvektors  $(X_1, X_2)$  an und zeigen Sie damit

$$\lambda_u = 2 - 2^{1/\theta}.$$

Diskutieren Sie die ökonomische Bedeutung der oberen Tailabhängigkeit und gehen Sie insbesondere auf den Spezialfall  $\theta = 1$  ein.

*Hinweis.* Regel von de l'Hospital oder Differentialquotient.



## Lösungsvorschläge

1. a) Das ASM setzt sich zusammen aus dem Eigenkapital, den zukünftigen Aktionärgewinnen, dem Nachrangdarlehen, dem Überschussfonds sowie der Going-Concern-Reserve, also  $ASM = 100 + 50 + 100 + 240 + 30 = 520$ .
- b) Der Überschussfonds (Surplus Funds) stellt den Marktwert des eigenmittelfähigen Teils der handelsrechtlichen RfB dar, der zur Deckung von Verlusten verwendet werden darf. Unter der Going-Concern-Reserve wird der Teil der künftigen Überschüsse verstanden, der an das Neugeschäft „vererbt“ wird.
- c)
  - i. Der Spread könnte aus den Spreads von Unternehmen mit vergleichbarem Risiko (hier gemessen durch dasselbe Rating) ermittelt worden sein. In Betracht kommen daher die Konkurrenzunternehmen B und D mit einem RORAC von 9% bzw. 11%. Möglicher Weise wurde hier der mittlere RORAC der beiden Unternehmen betrachtet, also 10%. Da der sichere Zins in der betrachteten Periode 2% ist, führt dies zu einem Spread von 8%, und die Hurdle-Rate entspricht genau dem mittleren RORAC der vergleichbaren Konkurrenzunternehmen i.H.v. 10%.
  - ii. Eine nachträgliche Festlegung eines Renditeziels ist aus Sicht einer wertorientierten Steuerung nicht sinnvoll. Ohne Zielvorgabe zu Beginn einer Periode können keine geeigneten Steuerungsimpulse zur Erreichung des Ziels ergriffen werden. Eine nachträgliche Festlegung des Renditeziels kann somit lediglich der Einordnung der Unternehmensergebnisse im Wettbewerbsvergleich dienen.
  - iii. Als Kritikpunkte könnten genannt werden:
    - Ratings geben die Risikoposition eines Unternehmens oftmals nicht hinreichend genau wieder.
    - Das im Rating ermittelte Sicherheitsniveau wird vermutlich nicht dem für das interne Modell vorgegebenen Sicherheitsniveau entsprechen.
    - Ratings berücksichtigen in großem Umfang auch weiche Faktoren und Nebenbedingungen, die einschränkend auf die Ratingnote wirken können und nicht die reine Risikokapitalposition wiedergeben.
    - Es ist unklar, ob der RORAC bei allen Unternehmen auf Basis derselben Definitionen und Herleitungen ermittelt wurde.
- d) Das ASM beträgt nach Teil a) 520. Der Expected Shortfall zum Niveau 99,  $x\%$  ermittelt sich als Mittelwert der  $(10 - x)$  schlechtesten Simulationsergebnisse. Für  $x = 2$  erhalten wir  $(420 + 450 + 490 + 520 + 530 + 550 + 580 + 620)/8 = 520$ . Also stimmen benötigtes und vorhandenes Risikokapital bei einem Niveau von 99,2% überein.
- e) Wird das Unternehmen bis zum Jahr 99 (inklusive) fortgeführt und danach sofort aufgelöst, so ergibt sich die Risikomarge als  $RM = \sum_{t=0}^{99} \frac{k_t \cdot C_t}{(1+s_t)^t}$  mit konstantem Spread  $k_t = 8\%$ , konstantem risikolosen Zins  $s_t = 2\%$ , Anfangs-SCR  $C_0 = 520$  sowie  $C_t =$

*Hinweis: Es waren nur zwei Kritikpunkte anzugeben.*



$C_0 \cdot 0,9^t$ . Mittels der Formel für die geometrische Summe erhält man

$$\begin{aligned} RM &= \sum_{t=0}^{99} \frac{k_t \cdot C_t}{(1 + s_t)^t} \\ &= \sum_{t=0}^{99} 0,08 \cdot 520 \cdot \frac{(0,9)^t}{(1,02)^t} = 0,08 \cdot 520 \cdot \sum_{t=0}^{99} (0,9/1,02)^t \\ &= 0,08 \cdot 520 \cdot \frac{1 - (0,9/1,02)^{100}}{1 - 0,9/1,02} = 353,6. \end{aligned}$$

- f) Die Fremdkapitalzinsen betragen  $100 \cdot 8\% = 8$ . Ohne Fremdkapitalzinsen ergibt sich demnach ein Nettoergebnis  $N = 20 - 8 = 12$ .
- g) Der Aktionär stellt von den Eigenmittelbestandteilen das Eigenkapital sowie die zukünftigen Aktionärgewinne (ZAG), zusammen  $C_A = 150$ . Die auf die Versicherungsnehmer entfallenden ASM-Bestandteile erzeugen keine Kapitalkosten und sind somit nicht mit der Hurdle-Rate zu verzinsen. Das Nachrangdarlehen wird von Fremdkapitalgebern gestellt und mit dem Fremdkapitalzinssatz von 8% verzinst.
- h) Wir erhalten die folgenden Ergebnisse:
- $EVA = N - h \cdot C_A = 12 - 10\% \cdot 150 = -3$
  - $ROE = \frac{N}{C_A} = 12/150 = 8\%$
  - $RORAC = ROE = 8\%$
  - $RAROC = RORAC - h = -2\%$
2. a) Aufgaben der Versicherungsmathematischen Funktion sind
- Koordination und Überwachung der Berechnung der versicherungstechnischen Rückstellungen,
  - Gewährleistung der Angemessenheit der bei der Berechnung der versicherungstechnischen Rückstellungen verwendeten Methoden, Modelle und Annahmen,
  - Überprüfung der Qualität der bei der Berechnung der versicherungstechnischen Rückstellungen verwendeten Daten,
  - Vergleich der besten Schätzwerte mit den Erfahrungswerten,
  - Stellungnahme zur Angemessenheit der versicherungstechnischen Rückstellungen, der Zeichnungspolitik und des Rückversicherungsprogramms,
  - Unterstützung der Risikomanagementfunktion bei der Umsetzung des Risikomanagementsystems, insbesondere im Rahmen des ORSA und bei Verwendung eines internen Modells,
  - jährlicher Bericht an den Vorstand.

*Hinweis:* Es waren nur 4 Aufgaben gefragt.

- b) Neben der Bewertung der Angemessenheit der Standardformel muss der ORSA der RS Versicherung AG mindestens umfassen:





- i. eine eigenständige Bewertung des Solvabilitätsbedarfs unter Berücksichtigung des spezifischen Risikoprofils, der festgelegten Risikotoleranzlimite und der Geschäftsstrategie des Unternehmens (Mögliche Kurzantwort auch: Beurteilung des Gesamtsolvabilitätsbedarfs),
  - ii. eine Beurteilung der jederzeitigen Erfüllbarkeit der aufsichtsrechtlichen Eigenmitelanforderungen, der Anforderungen an die versicherungstechnischen Rückstellungen in der Solvabilitätsübersicht und der Risikotragfähigkeit (Mögliche Kurzantwort auch: Kontinuierliche Einhaltung von SCR und Anforderungen an vt. Rückstellungen).
- c) Die Basissolvenzkapitalanforderung umfasst die Hauptrisikomodule
- i. nictlebensversicherungstechnisches Risiko,
  - ii. Marktrisiko und
  - iii. Gegenparteiausfallrisiko.

Zunächst werden die Solvenzkapitalanforderungen für diese Risiken einzeln ermittelt und dann mittels der Wurzelformel und der vorgegebenen Korrelationsparameter zur Basissolvenzkapitalanforderung aggregiert.

- d) i. Aus den Beziehungen über Erwartungswert und Varianz folgt

$$c^2 = \frac{Var(X)}{(\mathbb{E}(X))^2} = \frac{\exp(2\mu + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1)}{\exp(2\mu + \sigma^2)} = \exp(\sigma^2) - 1.$$

Auflösen nach  $\sigma^2$  ergibt

$$\sigma^2 = \ln(c^2 + 1).$$

- ii. Aus der Darstellung des Erwartungswertes folgern wir mit i.

$$\mu = \ln(\mathbb{E}(X)) - \frac{\sigma^2}{2} = \ln(\mathbb{E}(X)) - \frac{\ln(c^2 + 1)}{2} = \ln\left(\frac{\mathbb{E}(X)}{\sqrt{c^2 + 1}}\right).$$

- iii. Für  $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$  gilt

$$VaR_\alpha(X) = \exp(\mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(\alpha)).$$

Mit i. und ii. erhalten wir

$$VaR_\alpha(X) = \frac{\mathbb{E}(X)}{\sqrt{c^2 + 1}} \exp\left(\Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\ln(c^2 + 1)}\right) =: f(c) \cdot \mathbb{E}(X).$$

- e) Einsetzen in die Formel liefert  $f(12\%) = \frac{\exp\left(2,5758 \cdot \sqrt{\ln((12\%)^2 + 1)}\right)}{\sqrt{(12\%)^2 + 1}} = 1,351$ . Die Solvenzkapitalanforderung für den unerwarteten Verlust betrüge damit  $(1,351 - 1) \cdot 10 \text{ Mio. EUR} = 3,51 \text{ Mio. EUR}$ .

*Anmerkung:* Tatsächlich wird in der Standardformel mit der Näherung  $3 \cdot c \cdot \text{Volumenmaß}$  gerechnet.

- f) Die RS Versicherung AG könnte sich die Verwendung eines unternehmensspezifischen Parameters für das Reserverisiko in der Sparte Rechtsschutz genehmigen lassen.



3. a) Stärken und Schwächen:

- Stärke: einfach berechenbar.
- Schwächen: nicht modellbasiert (außer für elliptische Verteilungen); baut auf dem problematischen Abhängigkeitskonzept der linearen Korrelation auf; Bestimmung des Parameters  $\rho$  kann problematisch sein.

b) Da  $L_1$  und  $L_2$  bivariat normalverteilt mit Mittelwert 0 sind, ist der Gesamtverlust  $L := L_1 + L_2$  normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz

$$\text{Var}(L) = \text{Var}(L_1) + 2\rho\sqrt{\text{Var}(L_1)}\sqrt{\text{Var}(L_2)} + \text{Var}(L_2).$$

Mit der Formel für den Value at Risk normalverteilter Größen erhalten wir

$$\begin{aligned} RC &= \text{VaR}_\alpha(L) = \sqrt{\text{Var}(L)} \cdot \Phi^{-1}(\alpha) \\ &= \left( \text{Var}(L_1) \cdot \Phi^{-1}(\alpha)^2 + 2\rho\sqrt{\text{Var}(L_1)}\sqrt{\text{Var}(L_2)} \cdot \Phi^{-1}(\alpha)^2 + \text{Var}(L_2) \cdot \Phi^{-1}(\alpha)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( RC_1^2 + 2\rho \cdot RC_1 \cdot RC_2 + RC_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

c) Wegen  $RC_i \geq 0$  ist  $(RC_1^2 + 2\rho \cdot RC_1 \cdot RC_2 + RC_2^2)$  monoton wachsend in  $\rho$  und somit auch  $RC$ . Die Abschätzung  $RC \leq RC_1 + RC_2$  ergibt sich für  $\rho = 1$ . Dies bedeutet, dass die Aggregationsregel einen nichtnegativen Diversifikationseffekt impliziert, d.h. die Risikomessung subadditiv ist. Da der Value at Risk im Allgemeinen nicht subadditiv ist, kann diese Aggregationsregel folglich nicht für beliebige bivariate Verteilungen hergeleitet werden.

4. a) i. Die Risikoposition verbessert sich bzgl.

- Marktrisiken mittelfristig, da die Kapitalmarktrisiken für die neuen Produkte auf die Versicherungsnehmer übertragen werden und damit auf Gesamtunternehmensebene mit dem Ablauf des Bestands zurückgehen.
- Kreditrisiko mittelfristig, da die mit der Kapitalanlage verbundenen Kreditrisiken für die neuen Produkte auf die Versicherungsnehmer übertragen werden.
- Liquiditätsrisiken mittelfristig, da die fondsgebundenen Kapitalanlagen bis auf Ausnahmen kurzfristig liquidierbar sind und vom Liquiditätsmanagement ausgeschlossen werden können.
- usw.

ii. Neue, individuelle Risiken entstehen hinsichtlich

- strategischem Risiko, da die Akzeptanz der neuen Produkte am Markt und in den Vertrieben mit Unsicherheiten verbunden ist - insbesondere bei der hier unterstellten vollständigen Umstellung des gesamten Produktspektrums.
- operationellem Risiko bzgl. Umsetzung, da bei der Implementierung und Verwaltung der neuen Produkte Fehler oder Verzögerungen auftreten können.
- Reputationsrisiko, da die sofortige und vollständige Abkehr vom bisherigen Produktspektrum aus externer Sicht (Presse, Kunden, Vertrieb) als Notfallmaßnahme interpretiert werden könnte, die aufgrund von finanziellen Schwierigkeiten nötig geworden ist.



DAV

DEUTSCHE  
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Dr. Guido Bader, Wolfgang Deichl  
Dr. Volker Goersmeyer, Prof. Dr. Jochen Wolf

- usw.

*Bemerkung:* Es waren jeweils nur zwei Beispiele gefragt.

- b)
  - i. Das Marktrisiko steigt durch diese Maßnahme in der Regel. Bei Quantifizierung durch die Solvency II-Standardformel wird dies durch den verhältnismäßig hohen Risikofaktor auf Aktienanlagen ausgedrückt.
  - ii. Das Zinsänderungsrisiko hängt im Gegensatz zum Aktienrisiko nicht in erster Linie vom Volumen der relevanten Kapitalanlagen ab, sondern von der Cashflow-Struktur der Kapitalanlagen und der Verbindlichkeiten. Es ist umso größer, je größer die Unterschiede zwischen diesen beiden Cashflow-Strukturen sind. Durch eine Reduktion der festverzinslichen Anlagen kann es leicht zu einem größeren Unterschied zwischen Cashflow-Struktur der Kapitalanlagen und der Verbindlichkeiten kommen als vorher (Vergrößerung des Cashflow-Mismatch) und damit zu höherem Zinsänderungsrisiko.
- c) Die Änderung des Produktspektrums muss aufgrund ihres erheblichen Einflusses auf die Unternehmensstrategie im ORSA berücksichtigt werden. Zudem führen beide Maßnahmen zu einer veränderten Entwicklung des Risikoprofils der Gesellschaft. Für eine vorausschauende Entwicklung der Risikosituation sind daher die Einflüsse beider Maßnahmen zu untersuchen und im ORSA-Bericht transparent zu machen.
- d) Ein Stresstest analysiert qualitativ oder quantitativ die Auswirkungen stark negativer Szenarien (Stresse/Stressszenarien) für ein Unternehmen oder einen Wirtschaftszweig. Dabei können ein oder mehrere Risikofaktoren gestresst werden. Stressszenarien sollen „extrem“, aber dennoch plausibel sein. Unter einem Reverse-Stresstest wird hingegen eine Methode zur Identifikation eines oder mehrerer Szenarien verstanden, die zu einem vorgegebenen finanziellen Verlust führen.  
Ein Reverse-Stresstest für die unter Teilaufgabe b) beschriebene Umschichtung könnte folgendermaßen lauten: Welcher Aktienstress kann nach der Umschichtung der Kapitalanlagen maximal verkraftet werden, ohne eine Zielsolvabilität von 150% nach Solvency II zu unterschreiten?
- e) Integrierte Risikomanagementprozesse sind unmittelbar in die steuerungsrelevanten Geschäftsprozesse eingebunden, risikorelevante Steuerungsimpulse erfolgen also unmittelbar in diesen Geschäftsprozessen. Demgegenüber werden supplementäre Risikomanagementprozesse eigenständig aufgesetzt und in der Praxis durch Limitsysteme mit den Prozessen zur Geschäftssteuerung verzahnt.  
Beispiel zur Teilaufgabe b): Bei einer integrierten Risikobewertung werden die Risikokapitalanforderungen auf der Basis der geplanten neuen Anlagestrategie berechnet – insbesondere die Marktrisiken, die sich hierdurch ergeben. Die Ergebnisse aus der Risikobewertung fließen in die finale Entwicklung des Vorschlags für die neue Strategie ein. Erst wenn sich auf dieser Basis die Risikotragfähigkeit nachweisen lässt, wird die Strategieentwicklung abgeschlossen.



5. a) Mit dem Theorem von Sklar ergibt sich die gemeinsame Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= C_\theta \left(1 - x_1^{-b}, 1 - x_2^{-b}\right) \cdot 1_{[1, \infty)^2}(x_1, x_2) \\ &= \exp\left(-\left(\left(-\ln(1 - x_1^{-b})\right)^\theta + \left(-\ln(1 - x_2^{-b})\right)^\theta\right)^{1/\theta}\right) \cdot 1_{[1, \infty)^2}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

b) Ein Schätzer für  $\rho_\tau$  gegeben  $n$  Beobachtungen  $(x_{i1}, x_{i2})$ ,  $1 \leq i \leq n$ , ist

$$\hat{\rho}_\tau = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{sign}[(x_{i1} - x_{j1})(x_{i2} - x_{j2})].$$

Gemäß der Momentenmethode ist dann  $\hat{\theta} = \frac{1}{1 - \hat{\rho}_\tau}$  ein Schätzer für  $\theta$ .

Im konkreten Fall erhalten wir  $\binom{4}{2} = 6$  und

$$\hat{\rho}_\tau = \frac{1}{6}(1 + 1 + (-1) + (-1) + 1 + 1) = \frac{1}{3};$$

dies führt auf  $\hat{\theta} = 1,5$ .

c) Da die Verteilungsfunktion der Pareto-Verteilung stetig und streng monoton wachsend ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_1 > VaR_\alpha(X_1), X_2 > VaR_\alpha(X_2)) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 \leq VaR_\alpha(X_1)) - \mathbb{P}(X_2 \leq VaR_\alpha(X_2)) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_1 \leq VaR_\alpha(X_1), X_2 \leq VaR_\alpha(X_2)) \\ &= 1 - 2\mathbb{P}(X_1 \leq VaR_\alpha(X_1)) + F(F_{X_1}^{-1}(\alpha), F_{X_2}^{-1}(\alpha)) \\ &= 1 - 2\alpha + C_\theta(\alpha, \alpha) \\ &= 1 - 2\alpha + \exp\left(-\left(2(-\ln(\alpha))^\theta\right)^{1/\theta}\right) \\ &= 1 - 2\alpha + \exp\left(2^{1/\theta} \ln(\alpha)\right). \end{aligned}$$

Da  $F_{X_i}$ ,  $i = 1, 2$ , auf  $[1, \infty)$  streng monoton wachsend und invertierbar sind, gilt

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_1 > VaR_\alpha(X_1), X_2 > VaR_\alpha(X_2)) \\ &= \mathbb{P}(F_{X_1}(X_1) > F_{X_1}(F_{X_1}^{-1}(\alpha)), F_{X_2}(X_2) > F_{X_2}(F_{X_2}^{-1}(\alpha))) \\ &= \mathbb{P}(F_{X_1}(X_1) > \alpha, F_{X_2}(X_2) > \alpha). \end{aligned}$$

Da die Pareto-Verteilung stetig ist, sind die Zufallsgrößen  $F_{X_i}(X_i)$ ,  $i = 1, 2$ , gleichverteilt. Daher hängt die gemeinsame Überschreitungswahrscheinlichkeit der jeweiligen VaR-Werte nicht vom Parameter der Randverteilungen ab (Messung auf der Quantilskala).



d) Mit der Definition der oberen Tailabhängigkeit berechnen wir

$$\begin{aligned}\lambda_u(X_1, X_2) &= \lim_{q \rightarrow 1} \mathbb{P}(X_2 > VaR_q(X_2) \mid X_1 > VaR_q(X_1)) \\ &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\mathbb{P}(X_1 > VaR_q(X_1), X_2 > VaR_q(X_2))}{\mathbb{P}(X_1 > VaR_q(X_1))} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - 2q + \exp(2^{1/\theta} \ln(q))}{1 - q} \\ &= 2 + \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\exp(2^{1/\theta} \ln(q)) - 1}{1 - q} \\ &= 2 - \left( \exp(2^{1/\theta} \ln(q)) \right)'_{|q=1} \\ &= 2 - \left[ \frac{2^{1/\theta}}{q} \exp(2^{1/\theta} \ln(q)) \right]_{|q=1} \\ &= 2 - 2^{1/\theta}.\end{aligned}$$

Die obere Tailabhängigkeit gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass im Falle, dass bereits eine Sparte einen höheren Verlust als ihren Value at Risk aufweist, auch die zweite Sparte einen höheren Verlust als ihren Value at Risk verursacht. Sie quantifiziert die Eintrittswahrscheinlichkeit, dass in einer Krisensituation in einem Teilbereich noch ein weiterer hoher Verlust in einem anderen Bereich bewältigt werden muss.

Für  $\theta = 1$  ist die Gumbel-Copula gleich der Unabhängigkeitscopula. Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass eine Sparte ihren Value at Risk überschreitet, gegeben dass die andere Sparte ihren Value at Risk überschreitet, geht im Falle der Unabhängigkeit gegen 0. Dies bedeutet, dass in einer Krisensituation in einem Teilbereich nicht mit einer weiteren Krisensituation in einem anderen Teilbereich gerechnet wird.