DAV
DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Dr. Nora Gürtler
Frank Schepers
Dr. Michael Leitschkis
Michael Mies
Dr. Björn Hille
Dr. Steve Brüske

Klausur 2015 zum DAV Grundwissen „Modellierung“

Hinweise:

- Die nachfolgenden Aufgaben sind alle zu bearbeiten (d.h. keine Wahlmöglichkeiten).
- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Insgesamt haben Sie 90 Minuten Zeit und können 90 Punkte erreichen.
- Zum Bestehen der Klausur sind 36 Punkte hinreichend.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1) LVRG – Senkung des Höchstzillmersatzes (15 Punkte)
Das Zillmer-Verfahren ist eine Bilanzierungshilfe, mit der die Lebensversicherer einen Teil der im Geschäftsjahr angefallenen Abschlusskosten des Neugeschäfts auf die Folgejahre vortragen können, wobei der bilanziell anrechenbare Teil der Abschlusskosten durch einen Höchstsatz begrenzt ist.

Im Zuge des Lebensversicherungsreformgesetzes (LVRG) wurde dieser Höchstzillmersatz von 4% auf 2.5% der Beitragssumme reduziert. Man geht davon aus, dass damit auch die Abschlusskostenzuschläge in der Lebensversicherung auf diesen Satz begrenzt und (wie seit der VVG-Reform) über fünf Jahre verteilt werden müssen.

a) (12 Punkte) Ihr Unternehmen hat bisher an die Vermittler eine Abschlussprovisionen i.H.v. 4% der Beitragssumme gezahlt. Diese soll nun auf 2,5% der Beitragssumme reduziert werden. Ihrem Unternehmen stehen allerdings nur liquide Mittel in Höhe von 700 zur Verfügung.

Auf wie viele Jahre müssen die Abschlussprovisionen verteilt werden um die verfügbare Liquidität nicht zu übersteigen (bei gleichbleibenden Neugeschäftsvolumen)?

i) (6 Punkte) Ermitteln Sie dazu zunächst für die alte Regelung den kumulierten Liquiditätsbedarf und die kumulierten Provisionszahlungen nach 3 Jahren. Befüllen Sie dazu bitte die folgende Tabelle:

Alte Regelung		
Abschlussprovision	4%	Beitragssumme
Abschlusskostensatz	2,5%	Beitragssumme - verteilt über 5 Jahre

Jahr	**2015**	**2016**	**2017**
Beitragssumme Neugeschäft	10.000	10.000	10.000
Abschlusskostenbeiträge			
Abschlussprovisionen			
Kumulierte Provisionen			

Liquiditätsbedarf pro Jahr			
Liquiditätsbedarf kumuliert			

ii) (6 Punkte) In einem zweiten Schritt verteilen Sie nun die Abschlussprovision (AP) derart, dass der kumulierte Liquiditätsbedarf nach 3 Jahren exakt 700 beträgt. Befüllen Sie dazu bitte die folgende Tabelle:

Neue Regelung		
Abschlussprovision	4,0%	Beitragssumme
Verteilt auf		Jahre
Abschlusskostensatz	2,5%	Beitragssumme - verteilt über 5 Jahre

Jahr	**2015**	**2016**	**2017**
Abschlusskostenbeiträge			
AP für Neugeschäft aus 2015			
AP für Neugeschäft aus 2016			
AP für Neugeschäft aus 2017			
Summe AP pro Jahr			
Kumulierte Provisionen			
Liquiditätsbedarf pro Jahr			
Liquiditätsbedarf kumuliert	**-700**		

b) (3 Punkte) Beschreiben Sie kurz, welche Herausforderungen vor allem bei Maklern entstehen, wenn das Provisionssystem von einmaliger Zahlung der Abschlussprovision (Courtage) auf eine verteilte Auszahlung geändert wird.

Lösung:

a)

i) (6 Punkte)

Alte Regelung		
Abschlussprovision	4%	Beitragssumme
Abschlusskostensatz	2,5%	Beitragssumme - verteilt über 5 Jahre

Jahr	**2015**	**2016**	**2017**
Beitragssumme Neugeschäft	10.000	10.000	10.000
Abschlusskostenbeiträge	50	100	150
Abschlussprovisionen	-400	-400	-400
Kumulierte Provisionen	**-1.200**		
Liquiditätsbedarf pro Jahr	-350	-300	-250
Liquiditätsbedarf kumuliert	**-900**		

ii) (6 Punkte)

Neue Regelung		
Abschlussprovision	4,0%	Beitragssumme
Verteilt auf	2	Jahre
Abschlusskostensatz	2,5%	Beitragssumme - verteilt über 5 Jahre

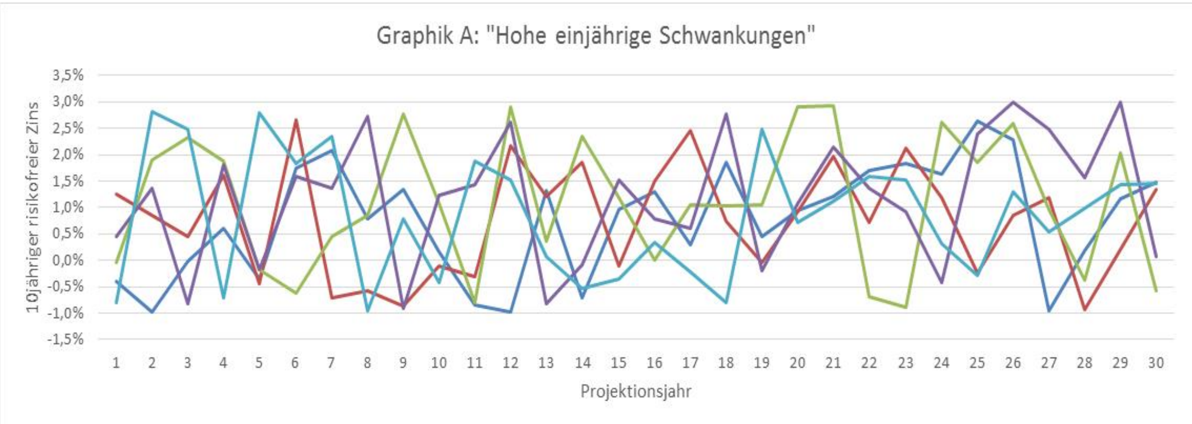
Jahr	**2015**	**2016**	**2017**
Abschlusskostenbeiträge	50	100	150
AP für Neugeschäft aus 2015	-200	-200	0
AP für Neugeschäft aus 2016		-200	-200
AP für Neugeschäft aus 2017			-200
Summe AP pro Jahr	-200	-400	-400
Kumulierte Provisionen	**-1.000**		
Liquiditätsbedarf pro Jahr	-150	-300	-250
Liquiditätsbedarf kumuliert	**-700**		

b) Ein Vermittler hat gerade bei Vertragsabschluss Aufwände, die finanziert werden müssen. Darüber hinaus fallen Fixkosten für Verwaltung, Büro, etc. an. Dadurch entsteht in der Übergangsphase ein Liquiditätsengpass. Um diesen abzumildern, arbeiten einige Unternehmen mit Überbrückungshilfen.

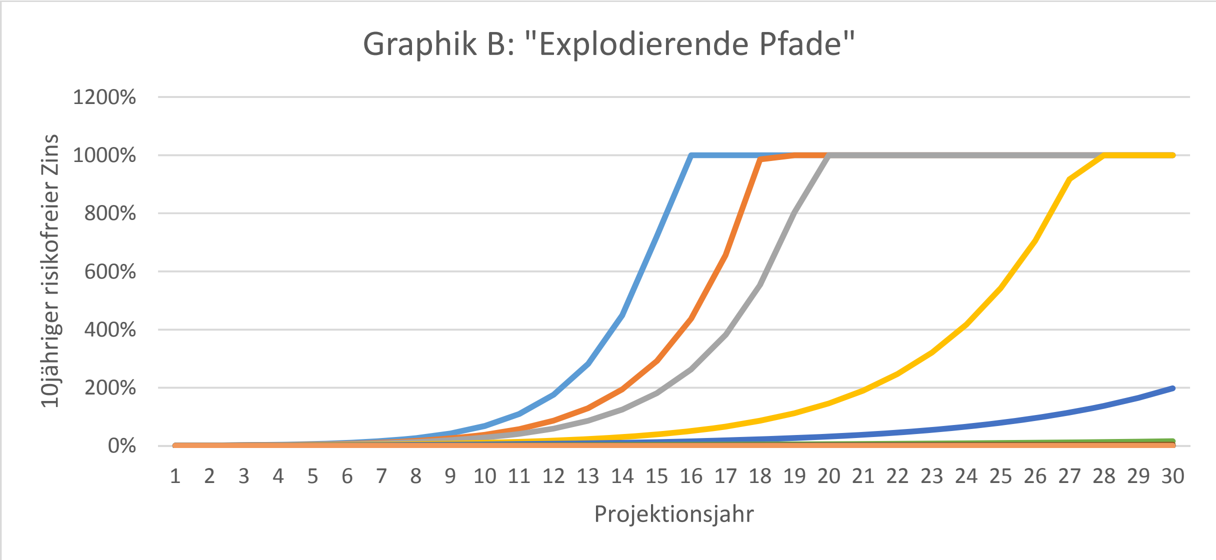
Aufgabe 2) Niedrigzins Leben (12 Punkte)

Das aktuelle Zinsniveau stellt auch für die Kalibrierung marktkonsistenter Kapitalmarktszenarien eine hohe Herausforderung dar. Neben den niedrigen risikofreien Zinsen liegt die Herausforderung insbesondere in der hohen Volatilität. Je nach Zinsmodell gibt es (mindestens) zwei Ansätze zur Kalibrierung der Szenarien:

a) Hohe einjährige Volatilitäten, d.h. starke Schwankungen um den risikofreien Zins in jedem Jahr (Graphik A)



b) Hohe langfristige Volatilitäten, bei denen viele Pfade nahe der Nulllinie liegen, und die Volatilität durch wenige „explorierende" Pfade mit sehr hohen Zinsen abgebildet wird (Graphik B)



Nennen und erörtern Sie kurz die Herausforderungen für jeden der beiden Ansätze für die stochastische Modellierung in den Bereichen Kapitalanlagestrategie, Überschussbeteiligung und dynamisches Versicherungsnehmerverhalten.

Lösung: Jeweils 2 Punkte für jede der 6 Betrachtungen.

	Hohe einjährige Schwankungen	**Explodierende Pfade**
Modellbestandteil		
Kapitalanlagestrategie	Umschichtung zwischen den Anlageklassen nach Marktwertquoten kann zur ständigen, realitätsfernen Realisierung von Gewinnen und Verlusten führen. Die Anlagestrategie muss eine Glättung der Kapitalerträge vorsehen.	Modell muss sowohl mit sehr hohen (>>100%) Zinsen als auch Zinsen nahe/unter Null umgehen können. Daher reicht es nicht, nur die Kapitalanlagestrategie der Vergangenheit abzubilden.
Überschussbeteiligung	Die Überschussbeteiligung muss kurzfristige Schwankungen glätten. Ansonsten werden hohe Kapitalerträge in einem Jahr übermäßig stark an Versicherungsnehmer weiter gegeben, wohingegen im nächsten Jahr direkt ein Einschuss durch den Aktionär erforderlich sein könnte.	Das Modell muss sowohl die Maßnahmen in anhaltenden Niedrigzinsphasen, als auch für ausgeprägte Hochzinsphasen abbilden. Eine Abbildung der gelebten Praxis über die letzten 50 Jahre ist bei weitem nicht ausreichend. In Pfaden, bei denen der Zins langfristig nahe Null liegen würde, müssen umfangreiche Notfallmaßnahmen abgebildet werden.

Dynamisches Versicherungsnehmerverhalten	Aus der Glättung der Kapitalerträge und der Überschussbeteiligung folgt, dass die Rendite für den Versicherungsnehmer regelmäßig und oft unterhalb der sicheren einjährigen Zinsen liegen wird. Wird hier eine zu große Sensitivität des Versicherungsnehmers hinsichtlich kurzfristiger Marktbewegungen angenommen, folgen daraus massive Storni im Modell, die so in der Realität bislang nicht registriert wurden.	Bei Pfaden, in denen Zinsen über viele Jahre sehr niedrig oder sehr hoch bleiben, müssen bei der Modellierung dynamischer Storni Effekte über mehrere Jahre betrachtet werden. D.h. wenn zum Beispiel angenommen wird, dass bei einer Abweichung von x% zwischen Überschussbeteiligung und Marktzins ein hoher Anteil der Versicherungsnehmer stornieren, muss im Folgejahr berücksichtigt werden, dass dieser Teil der finanzrationalen VN das Portfolio bereits verlassen hat.

Aufgabe 3) Dynamisches Versicherungsnehmerverhalten (12 Punkte)

Die Pfefferminzia AG möchte im Rahmen ihrer Vorbereitungen auf Solvency II die Modellierung des dynamischen Versicherungsnehmerverhaltens überprüfen. Bitte unterstützen Sie das Unternehmen bei den folgenden Fragestellungen.

a) (3 Punkte) Begründen Sie in kurzen Stichworten für jede der folgenden Tarifarten, warum/warum nicht Änderungen des Kapitalmarktumfeldes zu Änderungen des VN-Verhaltens führen könnten.
   i. (1 Punkt) Kapitalbildende Lebensversicherung (KLV)
   ii. (1 Punkt) Risikolebensversicherung (RILV)
   iii. (1 Punkt) Selbständige Berufsunfähigkeitsversicherung (SBU).

b) (5 Punkte) Betrachten Sie den folgenden Ansatz zur Modellierung dynamischen Stornoverhaltens bei einer KLV: Eine Police wird zum Projektionszeitpunkt t storniert, wenn RKW(t) * (1 + RF(t)) ^ r > VS gilt, wobei RKW(t) den garantierten Rückkaufswert der Police zum Zeitpunkt t, VS die garantierte Versicherungssumme, r die Restlaufzeit der Police und RF(t) den zum Zeitpunkt t gültigen risikofreien Zins für die Restlaufzeit r darstellt. Die Sterblichkeit sei vernachlässigbar.
   i. (3 Punkte) Welche impliziten Annahmen bzgl. Kapitalanlage durch den Versicherungsnehmer unterstellt die obige Formel und inwiefern sind diese Annahmen angemessen?
   ii. (2 Punkte) Angenommen der Bestand weist zum Projektionsbeginn (t = 0) 10.000 vollkommen identische Verträge auf und Sie wenden das obige Modell an, um diesen Bestand einer stochastischen Projektion über 1000 Szenarien (zum Bewertungsstichtag 31.12.2014 marktkonsistent kalibriert) zu unterziehen. Bitte geben Sie unter diesen Prämissen das 99.5%-Quantil der Bestandsgröße für das Jahr t = r – 1 an.

c) (4 Punkte) Betrachten Sie nun eine fondsgebundene Lebensversicherung (FLV), die die Kundengelder in einem extern gemanagten Fonds Top Investor anlegt. Dieser Fonds erzielte in den vergangenen Jahren Wertzuwächse zwischen 10%-20% p.a. (bis auf einen Verlust von 46% im Jahre 2008) bei einer

Fondsmanagementgebühr von 2% p.a., wovon der Fondsmanager 40% an den Versicherer weiterleitet. Bisher wurde kein dynamisches Stornoverhalten für diese FLV modelliert.

  i. (3 Punkte) Bitte schlagen Sie eine Formel zur Modellierung des dynamischen Stornoverhaltens bei der FLV vor und erläutern Sie kurz, welche Effekte diese Formel abbilden soll.
  ii. (1 Punkt) Bitte erläutern Sie qualitativ, welchen Einfluss die Umsetzung Ihres Vorschlags auf den PVFP der Gesellschaft haben würde.

Lösung:

a) (3 Punkte)

  i. (1 Punkt) Änderungen der Marktzinsen könnten insbesondere dann zu Änderungen des VN-Verhaltens bei der KLV führen, wenn die am Kapitalmarkt erzielbaren Zinsen die VN-Gesamtverzinsung deutlich übersteigen sollten.
  ii. (1 Punkt) Änderungen des Marktumfeldes sollten keine Auswirkungen auf das VN-Verhalten bei der RILV haben, da die RILV kein Sparprodukt ist / kaum einen Sparanteil aufweist.
  iii. (1 Punkt) Insbesondere im Kontext einer schweren Wirtschaftskrise könnte die Anzahl der BU-Anträge zunehmen, da die BU-Rente in Zeiten einer Massenarbeitslosigkeit an Attraktivität zunehmen dürfte.

b) (5 Punkte)

  i. (3 Punkte) Die obige Formel unterstellt, dass der Versicherungsnehmer den Rückkaufswert der von ihm stornierten Police in eine risikofreie Anleihe anlegen würde, deren Laufzeit mit der zum Zeitpunkt des Rückkaufs verbleibenden Restlaufzeit der Police übereinstimmen würde. Diese implizite Annahme ist aus den folgenden Gründen kritisch zu sehen:
     - Es ist fraglich, inwiefern bei längeren Restlaufzeiten risikofreie Anleihen zur Verfügung stehen.
     - Bei der Kapitalanlage durch den Versicherungsnehmer fallen Transaktionskosten an, die die obige Formel nicht berücksichtigt
     - Bei den aktuell sehr niedrigen und mitunter negativen Zinsen ist es sogar fraglich, ob die risikofreien Anleihen überhaupt eine sinnvolle Alternative für eine Lebensversicherungspolice mit einer Garantie von bis zu 4% darstellen.
  ii. (2 Punkte) Bekanntlich waren die risikofreien Zinsen zum 31.12.2014 sehr niedrig bzw. gar negativ, je nach Restlaufzeit. Daher wird ein zu diesem Stichtag kalibriertes marktkonsistentes Szenarien-Paket einen erheblichen Anteil von Szenarien mit Zinsen nahe 0% oder, je nach Zinsmodell, gar mit negativen Zinsen beinhalten. Ein mit solchen Zinsen aufgezinster Rückkaufswert wird unterhalb der Versicherungssumme bleiben [Zinsen unterhalb der Zinsgarantie von mind. 1.25%, Rückkaufswert i.a. unterhalb des Deckungskapitals, etc.] Gemäß der obigen Formel für die dynamische Stornoentscheidung würde es in Niedrigzinsszenarien also gar kein Storno geben. Von daher wird das 99.5%-Quantil der Bestandsgröße 10.000 Policen betragen, da die Sterblichkeit in dieser Aufgabe vernachlässigt wird (für das Jahr t = r-1 ebenso wie für andere Jahre vor Ablauf der Policen).

c) (4 Punkte)

  i. (3 Punkte) Die Formel sollte darstellen, dass *ein Teil* der FLV-Versicherten nach einem erheblichen Markt-Crash ihre FLV-Policen stornieren würde. Um dies im Modell abzubilden, kann das historische Storno jeweils mit einem dynamischen multiplikativen Faktor F versehen werden, welcher etwa wie folgt definiert werden könnte:

$F = MaxFaktor$, wenn $PerfPC \leq CrashThresholdPC$

$F = 1$, wenn $PerfPC \geq 0$

$$F = 1 + \frac{PerfPC}{CrashThresholdPC}(MaxFaktor - 1), \text{wenn } CrashThresholdPC < PerfPC < 0$$

Dabei bezeichnet $PerfPC$ die letzte bekannte Fondsperformance in % (praktisch könnte man im Projektionsjahr t die Performance aus dem Vorjahr t-1 zur Modellierung verwenden). Ferner bezeichnet $MaxFaktor$ (ein Parameter > 1) den maximalen Stornofaktor, der bei Unterbietung der Crash-Schwelle $CrashThresholdPC$ (ein negativer Parameter in %) gelten würde. Bei einer positiven Fondsperformance gilt das historische Storno (dynamischer Faktor ist gleich Eins), bei einer negativen Fondsperformance oberhalb der Crash-Schwelle wird der dynamische Stornofaktor mithilfe einer linearen Interpolation ermittelt.

ii. (1 Punkt) Die Umsetzung der obigen Modellierung sollte den PVFP der Gesellschaft senken. Die Bestandsgröße und das Gesamt-Fondsguthaben würden durch das nun insgesamt erhöhte Storno nämlich abnehmen, damit würde die Gesellschaft geringere Kickbacks vom Fondsmanager erhalten.

Aufgabe 4) Profitabilität Leben und Komposit (15 Punkte)

Die Holding „Gute Hoffnung“ hat zwei Versicherungstöchter:

- den Lebensversicherer Lassuns Leben aG, sowie die
- den Sachversicherer Gibmal-Feuerkasse aG.

Die Vorstände der beiden Gesellschaften haben große Pläne: die Lassuns Leben aG kann ein einjähriges reines Sparprodukt ohne jegliche Kosten und ohne Biometrie, mit 1% Kapitalmarge (2% sicherer Marktzins, 1% Garantie, keine Überschussbeteiligung) in den Markt drücken, die Gibmal-Feuerkasse aG eine Cyber-Risk-Versicherung mit einer Combined Ratio von 97%.

Das Lebenprodukt muss mit einem Kapital von 4% des Beitrags hinterlegt werden, die Sachversicherung mit 16% des Beitrags. Leider ist die Gute Hoffnung knapp bei Kasse (besser gesagt: blank), und kann nur ein Kapital von 80 zu einem Wucherzins von 10% aufnehmen.

Bitte unterstellen Sie für diese Aufgabe, dass die Kapitalanlage für alle Marktteilnehmer zum sicheren Marktzins i.H.v. 2% erfolgt.

a) (6 Punkte) Wo ist das Geld der Guten Hoffnung besser investiert, in der Lassuns Leben aG oder in der Gibmal-Feuerkasse aG? Bitte betrachten Sie das anstehende Geschäftsjahr und belegen Sie Ihre Antwort durch eine konkrete, mit Zahlen unterlegte Vergleichsrechnung.
b) (6 Punkte) Wie hoch ist in beiden Fällen jeweils die Rendite auf das eingesetzte Kapital, nach Berücksichtigung der Kapitalkosten?
c) (3 Punkte) Welche Combined Ratio müsste die Gibmal-Feuerkasse aG erreichen, die gleiche Profitabilität wie die der Lassuns Leben aG zu erzielen?

Lösung:

a) (6 Punkte) Das Geschäft, das sowohl die Lassuns Leben aG als auch die Gibmal-Feuerkasse aG im nächsten Jahr zeichnen können, ist limitiert durch das Risikokapital i.H.v. 80, das die Gute Hoffnung maximal aufnehmen kann.

Da der gezeichnete Beitrag in der Lebensversicherung mit 4% Kapital unterlegt werden muss, ergibt sich ein maximal mögliches Volumen von 2000 (80 = 4% x 2000). Dieses erwirtschaftet eine Kapitalmarge i.H.v. 1%, also 20.

In der Sachversicherung muss der gezeichnete Beitrag mit 16% Kapital unterlegt werden, also sind maximal 500 möglich (80 = 16% x 500), mit einer Gewinnmarge von 3% (=1-97% CR). Daraus ergibt sich ein Gewinn i.H.v. 15.

Unter den gegebenen Annahmen ist bei vergleichbarem Volumen das Geschäft der Lassuns Leben aG profitabler und das Risikokapital dort somit besser investiert.

b) (6 Punkte) Für das aufzunehmende Risikokapital sind in jedem Fall Kapitalkosten i.H.v. 10% zu zahlen, wobei 2% Kapitalertrag gegengerechnet werden können. Im Saldo ergeben sich also Opportunitätskosten i.H.v. 8% bzw. absolut von 6,4:

Risikokapital		80
Kapitalkosten	-10%	-8
Kapitalertrag	2%	1,6
Saldo	-8%	-6,4

Daraus resultieren unter Berücksichtigung der Erträge aus dem Versicherungsgeschäft die folgenden Gesamterträge bzw. Renditen auf das Risikokapital:

	Leben	**Sach**
Beitrag	2000	500
Marge	1%	3%
Ertrag aus dem Versicherungsgeschäft	20	15
Saldo Kapitalkosten/-ertrag	-6,4	-6,4
Gesamtertrag	13,6	8,6
Rendite auf das Risikokapital i.H.v. 80	17,0%	10,8%

c) (3 Punkte) Um die gleiche Profitabilität wie die Lassuns Leben aG zu erzielen, müsste die Gibmal-Feuerkasse aG einen Ertrag i.H.v. 20 an Stelle von 15 aus dem Versicherungsgeschäft erzielen. Dies entspricht einer technischen Marge i.H.v. 4% an Stelle von 3%.

Die Gibmal-Feuerkasse aG müsste also die Combined Ratio im einen Prozentpunkt von 97% auf 96% senken.

Aufgabe 5) Stochastische Modellierung von Schäden (18 Punkte)

Anmerkung: In dieser Aufgabe sind die absoluten Werte in ganzen Tsd. Euro angegeben. Runden Sie bitte die Ergebnisse auf ganze Tsd. Euro.

Sie arbeiten im Modellierungsteam der Westfälischen Haftpflicht Versicherung (WHV) und sind verantwortlich für die Sparte Haftpflichtversicherung. Für die Modellierung der Großschäden verwenden Sie die folgende Historie von 2000-2014 von abgewickelten und inflationierten Schäden ab zwei Millionen Euro.

Anfalljahr	Anzahl	Schadenhöhe in Tsd. Euro				
2000	2	5.868	4.826	0	0	0

2001	3	2.294	2.058	2.044	0	0
2002	3	2.896	2.159	2.416	0	0
2003	2	3.379	2.144	0	0	0
2004	1	2.275	0	0	0	0
2005	1	4.208	0	0	0	0
2006	1	12.715	0	0	0	0
2007	2	2.000	2.189	0	0	0
2008	2	2.089	4.267	0	0	0
2009	1	7.918	0	0	0	0
2010	3	2.349	2.478	2.243	0	0
2011	0	0	0	0	0	0
2012	2	5.565	2.633	0	0	0
2013	5	11.017	10.201	3.016	2.294	2.287
2014	3	2.573	3.025	2.079	0	0

a) (6 Punkte) Parametrisierung

i. (2 Punkte) Parametrisieren Sie über die obige Liste für die Schadenanzahlverteilung mittels Momentenmethode eine Poissonverteilung mit der Zähldichte

$$P_\eta(N=k)=e^{-\eta}\frac{\eta^k}{k!} \quad \text{für } k=0,1,2,\ldots$$

ii. (4 Punkte) Für die Parametrisierung der Schadenhöhenverteilung entscheiden Sie sich für die Paretoverteilung mit Verteilungsfunktion

$$F(x)=1-\left(\frac{\lambda}{x}\right)^{\alpha}, \; x>\lambda \qquad (F(x)=0\;,\; x\le\lambda).$$

Außerdem erhalten Sie aus Ihrem Analysetool mittels Hill-Schätzer

$$\hat{\alpha}_n=\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{X_{(i)}}{X_{(n)}}\right]^{-1}$$

die folgende Ausgabe

Nr.	Aufwand $X_{(k)}$ in Tsd. Euro	$\hat{\alpha}_n$
1	12.715	nicht definiert
2	11.017	**?**
3	10.201	10,09
4	7.918	3,78
⋮	⋮	⋮
28	2.079	2,04
29	2.058	2,07
30	2.044	2,11
31	2.000	2,08

Berechnen Sie den fehlenden Hill-Schätzer in der letzten Spalte und skizzieren Sie mit den gegebenen Punkten den zugehörigen Hill-Plot.

Sie entscheiden sich für die Großschadengrenzen i.H.v. zwei Millionen Euro. Geben Sie die Parameter der Paretoverteilung für diesen Threshold nach Maximum-Likelihood-Schätzung an.

b) (10 Punkte) Inversionsmethode

Nr.	Zufallszahl
1	0,4217
2	0,1742
3	0,9876
4	0,5917
5	0,4259

i. (3 Punkte) Ermitteln Sie die Werte der Zähldichte und der Verteilungsfunktion für die Schadenanzahl k = 0, 1, 2, 3 mit der unter a) parametrisierten Schadenanzahlverteilung.

ii. (2 Punkte) Welche Anzahl von Schäden wird durch Nutzung der ersten Zufallszahl der obigen Liste erzeugt?

iii. (5 Punkte) Simulieren Sie mit den nächsten verbleibenden Zufallszahlen (ab Nr. 2) für die in ii. simulierte Schadenanzahl die Schadenhöhen mit der unter a) parametrisierten Schadenhöhenverteilung.

c) (2 Punkte) Rückversicherung
In Ihrem Simulationsmodell verwenden Sie einen XL-Vertrag mit Selbstbehalt 2,5 Mio. Euro und Haftungsstrecke 5 Mio. Euro. Wiederauffüllungen sind unbegrenzt und frei, d.h. „gratis". Berechnen Sie den an den Rückversicherer zedierten Schadenaufwand pro simulierten Schaden aus b).

Lösung:

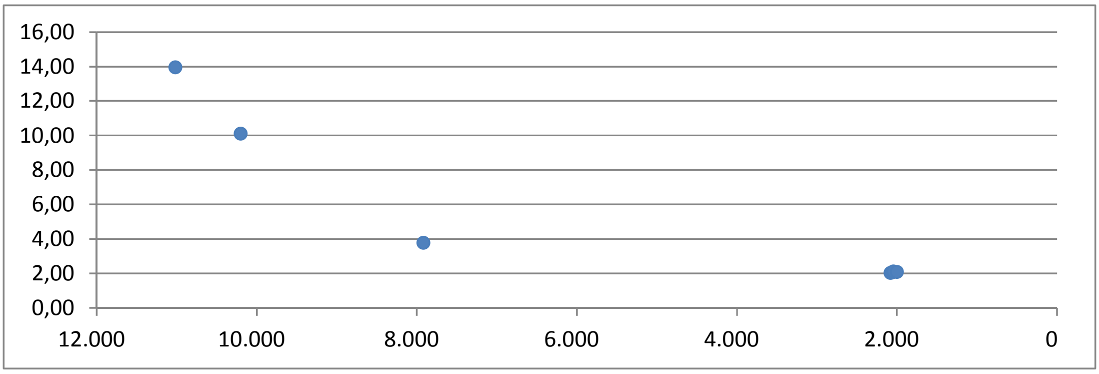
a) (6 Punkte)

i. (2 Punkte) Der Parameter η der Poissonverteilung ist durch den Erwartungswert E(X) bestimmt. Der empirische Erwartungswert der Schadenanzahl liegt gerundet auf zwei Nachkommastellen bei 2,07. Somit kann der Parameter der Poissonverteilung auf 2,07 geschätzt werden.

ii. (4 Punkte) Zur Berechnung des fehlenden Hill-Schätzers setze man die beiden größten Schadenaufwände in die Formel des entsprechenden ML-Schätzers ein.

$$\hat{\alpha}_2 = \left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \ln \frac{X_{(i)}}{X_{(2)}}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{2}\left(\ln \frac{12.715}{11.017} + \ln \frac{11.017}{11.017}\right)\right]^{-1} \approx \left[\frac{1}{2}\cdot 0{,}1433\right]^{-1} \approx 13{,}95$$

Trägt man nun die Schadenhöhe absteigend auf der x-Achse und den Hill-Schätzer auf der y-Achse ab, erhält man den folgenden Hill-Plot.



Bei einer Großschadengrenze i.H.v. 2 Mio. Euro bestimmt sich der Hill-Schätzer laut Tabelle zu 2,08. Der Parameter der Paretoverteilung ist dann genau dieser Hill-Schätzer.

b) (10 Punkte)

i. (3 Punkte) Die Werte der Zähldichte und der Verteilungsfunktion ergeben sich zu:

k	η^k	k!	Zähldichte	Verteilungsfunktion	Intervall
0	1,0000	1	0,12619	0,12619	[0 ; 0,12619)
1	2,0700	1	0,26120	0,38739	[0,12619 ; 0,38739)
2	4,2849	2	0,27035	0,65774	[0,38739 ; 0,65774)
3	8,8697	6	0,18654	0,84428	[0,65774 ; 0,84428)

ii. (2 Punkte) Die erste Zufallszahl 0,4217 fällt in das Intervall für k=2. Somit werden zwei Schäden erzeugt.

iii. (5 Punkte) Um die Schadenhöhe zu simulieren, benötigen wir die Quantilsfunktion der Paretoverteilung. Diese berechnet man als Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion mittels der Umformung:

$$\text{für} \quad p \in [0,1): \quad p = 1 - \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\lambda}{(1-p)^{1/\alpha}} = \frac{2.000.000}{(1-p)^{1/2{,}08}}$$

Für den ersten Großschaden, welcher mit der zweiten Zufallszahl 0,1742 berechnet wird, ergibt sich die Höhe von 2.193 Tsd. Euro. Der zweite Großschaden errechnet sich zu 16.507 Tsd. Euro mittels Zufallszahl 0,9876.

(2 Punkte) Um den zedierten Schaden zu berechnen, wird die Formel Z = min (max (0 ; B - P) ; L) verwendet, wobei B den Brutto-Schaden, P den Selbstbehalt, L die Haftungsstrecke und Z den zedierten Schaden bezeichnet. Da der erste Großschaden komplett im Selbstbehalt liegt, wird somit nichts an den Rückversicherer zediert. Für den zweiten Großschaden hat man eine Abgabe i.H.v. 5.000 Tsd. Euro an den Rückversicherer.

Aufgabe 6) Naturkatastrophenmodellierung (18 Punkte)

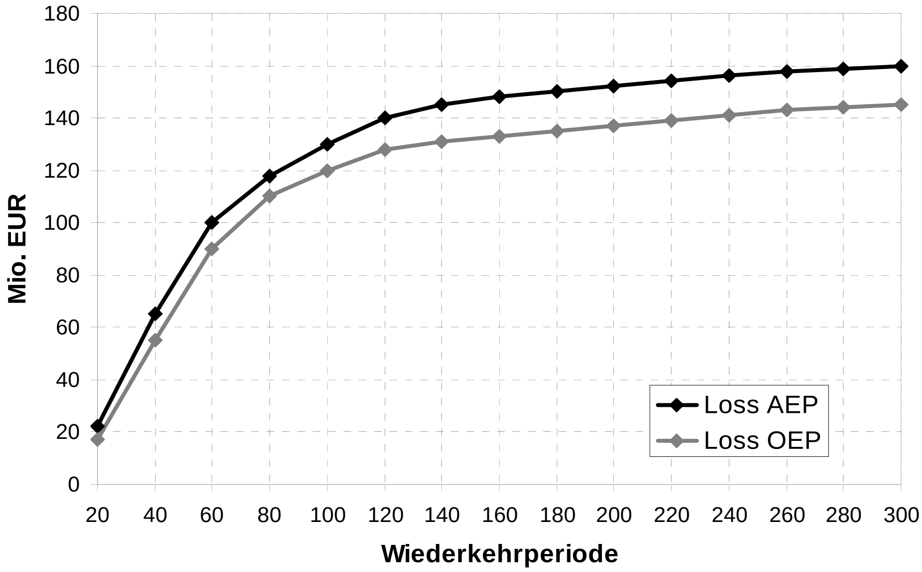
Die Feldafinger Brandkasse erwägt aus Diversifikationsgründen im Jahr 2015 den Kauf eines Bestandes an Wohngebäudeversicherungen in Norddeutschland. Bevor Sie sich als Schadenmodellierer mit den Zahlen auseinandersetzen, beantworten Sie stichpunktartig die folgenden Fragen:

a) (5 Punkte) Charakteristika der Cat-Modellierung

1. (1 Punkt) Was unterscheidet Cat-Schäden von Großschäden (im Hinblick auf ihr Schadenverhalten)?
2. (1 Punkt) Welche Probleme können bei der Sturm-Modellierung mit Hilfe eines mathematisch-statistischen Modells auf Grundlage des Unternehmensbestandes auftreten?
3. (3 Punkte) Sie wollen ein exposurebasiertes (geophysikalisch-meteorologisches) Modell im Rahmen Ihres Internen Modells einsetzen. Skizzieren Sie, wie ein solches exposurebasiertes Modell funktioniert.

b) (6 Punkte) Ergebnisse eines Cat-Modells

Sie haben für das Sturm-Exposure des zu kaufenden Bestands mit Ihrem Nat-Cat-Modell 10.000 Simulationsjahre („Pfade“) erzeugt und haben die folgenden AEP/OEP-Kurven (brutto) erhalten:



Zusätzlich haben Sie sich die Events ausgeben lassen, die um das 1%-Quantil des Jahresschadenaufwands aus Naturkatastrophen herum simuliert wurden (das 1%-Quantil entspricht dem Pfad Nr. 1742). In der zugehörigen Tabelle finden Sie die Brutto-Aufwände der simulierten Events:

Pfad-Nr.	Event 1	Event 2	Event 3	Event 4	Event 5	Event 6
1134	110	11	7			
9123	55	45	14	7	5	2
1742	83	13	7	5	?	
23	23	28	8	42	32	
7218	5	12	49	66		

1. (4 Punkte) Leider ist Event Nr. 5 im Pfad 1742 nicht richtig ausgedruckt worden. Bestimmen Sie den zugehörigen Aufwand mit Hilfe der AEP/OEP-Kurven.
2. (2 Punkte) Im Pfad 1134 ist ein Event mit 110 Mio. EUR Schadenaufwand angegeben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit übersteigt der Jahresmaximalschaden diese 110 Mio. EUR?

c) (7 Punkte) Allokation von Risikokapital

In der folgenden Tabelle finden Sie Daten zu den beiden Beständen (hier: Brutto-Sicht):

	Prämie	Kosten	Erwarteter Gesamtschadenaufwand (diskontiert)	RBC (Niveau 0,5%)
Bestand Süddeutschland	51,2	7,9	39,2	128,3
Bestand Norddeutschland	62,4	9,8	52,1	155,8
Gesamtbestand	113,6	17,7	91,3	228,3

1. (2 Punkte) Allozieren Sie das RBC des Gesamtbestands proportional auf die beiden Teilbestände.
2. (1 Punkt) Wie hoch wäre das proportional allozierte RBC für den süddeutschen Bestand bei einer perfekten Abhängigkeit (Korrelationskoeffizient 100%) des Risikos der beiden Bestände?
3. (4 Punkte) Wie verändert sich der RORAC für den süddeutschen Bestand, wenn der norddeutsche Bestand hinzugekauft wird (bei proportionaler Allokation des Risikokapitals gemäß Teil 1)?

Lösung:

a) (5 Punkte)

1. (1 Punkt) Cat-Schäden haben i. A. Kumulcharakter, sie wirken also über die Anzahl einzelner Schäden eines Events.

2. (1 Punkt) Analyse auf eigenem Bestand:
   – meist zu wenig Schadenerfahrung
   – schwierige Aggregation einzelner Schäden
   – Tendenz zur Unterschätzung des Risikos

3. (3 Punkte)
   (1) Nat-Cat-Ereignisse erzeugen (häufig: Vendor-Modelle)
   (2) Standortinformationen (Exposure, Geocodierung) bereitstellen
   (3) Ermittlung der Zerstörung (Ground-Up Loss)
   (4) Vertragskonditionen berücksichtigen und Brutto-Schaden berechnen
   (5) Auswertung und Plausibilisierung
   (6) Übergabe der Year-Loss-Table (oder Event-Loss-Table) an das Interne Modell

b) (6 Punkte)

1. (4 Punkte) Es ist nach dem Jahresgesamtschaden gefragt, der dem 1%-Quantil entspricht. Dieses ist gemäß AEP-Kurve mit 130 Mio. EUR bezifferbar (100-Jahresereignis). Schaut man sich nun die einzelnen Events des Pfades 1742 an, welche das 100-Jahresereignis bestimmen, so sind 4 Events mit einer Gesamthöhe von 108 Mio. EUR angegeben. Das 5. Event muss also eine Schadenhöhe von 130-108=22 Mio. EUR haben.

2. (2 Punkte) Laut OEP-Kurve hat ein solches Event eine Wiederkehrperiode von 80. Also übersteigt der Jahresmaximalschaden die 110 Mio. EUR in 1/80=1,25% aller Fälle.

c) (7 Punkte)

1. (2 Punkte)
   Bestand Süddeutschland: $RBC_{1,\ alloziert}$ = 128,3/(128,3+155,8) * 228,3 = 103,1.
   Bestand Norddeutschland: $RBC_{2,\ alloziert}$ = 155,8/(128,3+155,8) * 228,3 = 125,2.

2. (1 Punkt)
   Bei einer perfekten positiven Abhängigkeit der Risiken der beiden Teilbestände ist das allozierte Risiko eines Teilbestandes gleich dem undiversifizierten Risiko dieses Teilbestandes.

3. (4 Punkte)
   vor Kauf: RORAC = vt. Erg./RBC_1 = (51,2-7,9-39,2)/128,3 = 3,20%
   nach Kauf: RORAC = vt. Erg./$RBC_{1,\ alloziert}$ = (51,2-7,9-39,2)/103,1=3,98%.

   Der RORAC steigt für den süddeutschen Bestand also absolut um ca. 0,78%, was einem relativen Anstieg von ca. 24,4% entspricht.