

Klausur 2014 zum DAV Grundwissen „Modellierung“

Hinweise:

- Die nachfolgenden Aufgaben sind alle zu bearbeiten (d.h. keine Wahlmöglichkeiten).
- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Insgesamt haben Sie 90 Minuten Zeit und können 90 Punkte erreichen.
- Zum Bestehen der Klausur sind 36 Punkte hinreichend.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1) Vereinfachte Fortschreibung (18 Punkte)

Für die Mehrjahresplanung schreibt ein Lebensversicherungs-Unternehmen die wesentlichen Positionen der Gewinn- und Verlustrechnung auf Basis der Vorjahre fort. Dazu werden Deckungsrückstellung und Beiträge als Treiber verwendet:

- Kosten werden als konstanter Prozentsatz der Beiträge angenommen
- Leistungen als konstanter Prozentsatz der Deckungsrückstellung zum Ende des Vorjahres
- Kapitalerträge berechnen sich als ebenfalls fester Prozentsatz auf die Deckungsrückstellung zum Ende des Vorjahres
- Die Veränderung der Deckungsrückstellung ergibt sich dann als Resultierende
- Verkomplizierende Aspekte wie Gewinnbeteiligung, Steuern und Dividenden werden ignoriert bzw. sind implizit in der Veränderung der Deckungsrückstellung enthalten.

Grundwissen Modellierung 2014 - Aufgabe 1: Vereinfachte Fortschreibung										
	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Beiträge		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Kapitalerträge (% Deckungsrückstellung Vorjahr)	4%	240	249	256	263	269	274	279	283	287
Kosten (% Beitrag)	5%	50	50	50	50	50	50	50	50	50
Leistungen (% Deckungsrückstellung Vorjahr)	15%	900	932	961	987	1.009	1.029	1.047	1.062	1.076
Veränderung Deckungsrückstellung (90% Beitrag + 90% Kapitalertrag - Leistungen)		216	191	170	150	133	118	104	93	82
Deckungsrückstellung	6.000	6.216	6.407	6.577	6.727	6.860	6.978	7.083	7.175	7.257

- a) (6 Punkte) Nennen Sie bitte drei Effekte oder Treiber, welche für einen echten Bestand (Kapitalanlagen und Versicherungsverträge) zu Abweichungen der tatsächlichen Realisierung von der einfachen Fortschreibung führen würden.
- b) (6 Punkte) Nennen Sie bitte drei Gründe, warum eine solche Fortschreibung insbesondere bei einer Einstellung des Neugeschäfts nicht sachgerecht ist.

- c) (6 Punkte) Wie hoch müsste bei oben gegebenem Beitrag von 1.000 p.a. und sonstigen Parametern und Zusammenhängen wie oben die anfängliche Deckungsrückstellung sein, so dass in der Projektion eine konstante Deckungsrückstellung projiziert wird?

Lösung:

- a) (6 Punkte) Als Treiber, die zur Abweichung von der einfachen Fortschreibung führen, können u.a. genannt werden:
- a1. Die Kapitalerträge hängen zumindest mittelfristig vom aktuellen Kapitalmarkt ab, so dass eine langfristig stabile Entwicklung eher die Ausnahme als die Regel sein wird. Hier gehen Coupon- und Fristigkeitsstruktur der aktuellen Anlagen, Neuanlagezinsen und Möglichkeiten ein, den Ertrag über Bewertungsreserven zu steuern.
 - a2. Die Leistungen folgen der Ablaufstruktur des Bestandes, und werden über die Jahre zum Teil stark variieren. So gibt es immer wieder „Buckel“ als Folge besonders markanter Neugeschäftsjahre, in welchen bestimmte Vertragslaufzeiten betont wurden.
 - a3. Zudem werden die zukünftigen Beiträge von der Neugeschäftsentwicklung abhängen. Stabile Beiträge unterstellen implizit, dass der Abrieb durch Abgänge durch Neuverträge exakt kompensiert wird.
- b) (6 Punkte) Als Gründe gegen eine einfache Fortschreibung lassen sich u.a. anführen:
- b1. Die Beiträge werden mit den Abgängen kontinuierlich zurückgehen, da sie nicht durch zukünftiges Neugeschäft kompensiert werden.
 - b2. Die Kosten werden sich deutlich ändern – zum einen durch den Wegfall von Abschlusskosten, zum anderen durch die Notwendigkeit, Fixkosten in einem abnehmenden Bestand zu tragen.
 - b3. Die Abgänge werden prozentual zur Deckungsrückstellung zunehmen, da sich die durchschnittliche Restlaufzeit im Bestand laufend verringert, und so Abläufe noch stärkeres Gewicht bekommen.
- c) (6 Punkte) Die Deckungsrückstellung bleibt dann konstant, wenn die Veränderung der Deckungsrückstellung genau Null ist, d.h.:

$$\begin{aligned}
 & 90\% \text{ Beitrag} + 90\% \text{ Kapitalertrag} - \text{Leistungen} = 0 \\
 & \cong 90\% \text{ Beitrag} + 90\% * 4\% * DR(\text{Vorjahr}) - 15\% DR(\text{Vorjahr}) = 0 \\
 & \cong DR(\text{Vorjahr}) = \frac{90\% * \text{Beitrag}}{15\% - 90\% * 4\%} \\
 & \cong DR(\text{Vorjahr}) = \frac{90}{11\frac{2}{5}} * \text{Beitrag} = 7\frac{17}{19} * \text{Beitrag} \approx 8 * \text{Beitrag}
 \end{aligned}$$

Für den Beitrag i.H.v. 1000 ergibt sich ein Wert der DR i.H.v. 7894,74.

Aufgabe 2) Tierlebensversicherung (18 Punkte)

Sie beraten Herrn Gutmann, den CEO des Tierlebensversicherers Tierisch Sicher Leben AG in Tierplusland. Bitte geben Sie für jede Ihrer Empfehlungen zu den unten stehenden Fragestellungen jeweils eine kurze Begründung an.

- a) (2 Punkte) Der Bestand der Tierisch Sicher Leben weist bereits zwei sehr erfolgreiche Produktlinien auf, nämlich die Tier-Rentenversicherung (mit Garantiezins von 2%) und die Tier-Risikoversicherung. Welche dieser Produktlinien hätte in Realität nicht viel Erfolg gehabt? Bei welchen Tieren ist die andere Produktlinie auch in Realität bekannt?
- b) (4 Punkte) Herr Gutmann möchte gerne Versicherungen für Verbundene Tierleben über ein Jahr anbieten, wobei eine Leistung von 10.000 Talern bei Tod beider in der Police versicherten Tiere innerhalb des Jahres fällig wäre. Bitte unterstellen Sie eine einjährige Sterbewahrscheinlichkeit von 1% pro Tier, vernachlässigen Sie Kosten sowie Kapitalerträge und sprechen Sie eine Empfehlung pro oder contra einen solchen Tarif aus. Bitte geben Sie eine kurze Begründung inkl. kurzer Berechnung an.
- c) (4 Punkte) Herr Gutmann möchte die Kundengelder soweit wie möglich in die Aktien der Vegan Max AG investieren. Für die Bilanzierung von Aktien fortschrittlicher Unternehmen wie Vegan Max gilt in Tierplusland das Extra Milde Niederwertprinzip: Etwaige gemäß Niederwertprinzip nötigen Abschreibungen können bei Bedarf einfach unterlassen werden. Bitte sprechen Sie eine Empfehlung pro oder contra ein Investment von über 50% der Kapitalanlagen in die Aktien von Vegan Max – wobei es in Tierplusland keine regulatorische Beschränkung der Aktienquoten gibt. Bitte geben Sie eine kurze Begründung an.
- d) (4 Punkte) Unabhängig von Ihren Empfehlungen zu (a) - (c) betrachten Sie nun die folgende Situation:
- Projektionshorizont von 2 Jahren
 - Kapitalanlage umfasst Aktien von Vegan Max mit einer Quote $X > 0\%$
 - Risikoloser Zins von 0% für jede Restlaufzeit in jedem Projektionsjahr
 - Es gebe nur drei mögliche, gleich wahrscheinliche, Szenarien für die Vegan Max-Aktie. Die in der folgenden Tabelle angegebenen Kurse werden jeweils zum Ende des betreffenden Jahres gestellt:

Szenario\Projektionsjahr	0	1	2
1	1.00	1.00	1.15
2	1.00	1.00	1.00
3	1.00	1.00	0.80

- i. (1 Punkt) Welche erwartete 2-Jahres-Rendite der Vegan Max-Aktie über den 2-Jahres-Horizont wird hierbei unterstellt?
- ii. (3 Punkte) Kann dieses Szenarien-Paket als risikoneutral bezeichnet werden? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.
- e) (4 Punkte) Bitte entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen i.-iii. richtig bzw. falsch sind und geben Sie jeweils kurze Begründungen an.
- i. (1 Punkt) Da im CE-Szenario keine Volatilitäten modelliert werden, werden etwaige Garantien und Optionen der Tierlebensversicherung in einem CE PVFP ignoriert.
- ii. (1 Punkt) Wenn dem Tierhalter keine Optionen (Rückkaufsrecht, Kapitalwahl) eingeräumt werden, dann muss der TV G&O gleich Null sein.

- iii. (2 Punkte) Wenn man dem Tierhalter eine Überschussbeteiligung in Höhe von 80% der Kapitalerträge – sofern positiv - fest zusichern würde, dann würde dies den TV G&O erhöhen.

Lösung:

- a) (2 Punkte) In Realität gibt es kaum Bedarf für die Tier-Rentenversicherung. Solange der Tierhalter lebt, kommt er für das Tier auf, während die Versorgung des Tieres bei Ableben des Tierhalters etwa durch eine Risikoversicherung für den Tierhalter sichergestellt werden könnte. Die Tier-Risikoversicherung ist hingegen zumindest bei Pferden bekannt, da die Anschaffungskosten bei einem Pferd recht hoch sein können.
- b) (4 Punkte) Nach dem Äquivalenzprinzip könnten wir den Beitrag B für eine solche einjährige Versicherung wie folgt berechnen, wenn wir nur die Sterblichkeit beachten und die Risiken als unabhängig annehmen würden: $B = 0.01 * 0.01 * 10.000 \text{ Taler} = 1 \text{ Taler}$. Am Ergebnis sehen wir, dass ein solcher Tarif wirtschaftlich kaum Sinn ergeben würde – die Tierisch Sicher Leben würde gegen eine nicht nennenswerte Prämie signifikant ins Risiko gehen, der Ausgleich im Kollektiv würde (mangels eines großen Bestandes Verbundener Tierleben) eher schlecht funktionieren, die Risiken wären nicht unbedingt unabhängig etc. => Empfehlung gegen einen solchen Tarif.
- c) (4 Punkte) Die Möglichkeit, Abschreibungen zu unterlassen, kann in manchen Situationen hilfreich sein. Allerdings würde man bei Versicherungsfällen Mittel benötigen, um die Leistungen ausbezahlen. Wenn dafür Aktien verkauft werden müssen, dann erfolgt ein Verkauf zum Marktwert – welcher nach einem Aktiencrash recht niedrig sein kann. Bei einem Aktieninvestment in Höhe von über 50% der Kapitalanlagen wäre dieses Risiko dementsprechend gravierend. => Empfehlung gegen ein solches Investment in Aktien von Vegan Max, allenfalls für eine kleine Beimischung dieser Aktien.
- d) (4 Punkte)
- i. (1 Punkt) Über den Horizont von 2 Jahren ergibt sich eine erwartete Performance der Vegan Max – Aktie in Höhe von $(1.15 - 1)^{1/3} + (1-1)^{1/3} + (0.8-1)^{1/3} = - 1.67\%$.
- ii. (3 Punkte) Da der risikofreie Zins 0% beträgt, erwirtschaftet die Vegan Max-Aktie im Durchschnitt nicht den risikofreien Zins. Folglich ist das angegebene Szenarien-Paket nicht risikoneutral.
- e) (4 Punkte)
- i. (1 Punkt) Falsch. Es werden zwar keine Zeitwerte von Garantien und Optionen im CE-Szenario berücksichtigt, aber deren innere Werte schon.
- ii. (1 Punkt) Falsch, denn auch Zinsgarantien oder eine kapitalmarktabhängige Überschussbeteiligung können zu einem TV G&O führen.
- iii. (2 Punkte) Richtig, denn dies würde eine Asymmetrie des Geschäftsmodells zu Lasten des Aktionärs implizieren – bei schlechter Kapitalanlage-Performance müsste er die Verluste ausgleichen, obwohl er bei guter Performance einen Teil der Gewinne abgeben müsste.

Aufgabe 3) Risikokapital Leben und Komposit - Diversifikation (18 Punkte)

Der typische Lebensversicherer Leichendorfer Rentenanstalt und der typische Schaden- und Unfallversicherer Feldafinger Brandkasse werden im Jahr 1994 von einer großen ausländischen Aktiengesellschaft gekauft, die die beiden Unternehmen als Tochtergesellschaften einer deutschen Finanzholding in ihren Konzern integriert hat. Die Finanzholding hat ausschließlich diese beiden Tochtergesellschaften und betreibt kein eigenes Geschäft.

Im Zuge dieser Umstrukturierung werden sowohl die stochastischen Unternehmensmodelle als auch die aktuariellen Bewertungen segmentübergreifend in einer Risikomanagementeinheit auf Holdingebene zentralisiert. Der neue Leiter des Risikomanagements lässt sich alle vorhandenen Analysen vorlegen.

- a) (4 Punkte) Aus den Aktuariaten der Leichendorfer Rentenanstalt und der Feldafinger Brandkasse liegen die folgenden Risikokapitalanalysen vor. Es handelt sich dabei um das Risikokapital für Kapitalanlage und Versicherungstechnik sowie für das Gesamtunternehmen. Die Risikokapitalien sind für die einzelnen Risikotreiber standalone vor Diversifikation, für das Gesamtunternehmen nach Diversifikation angegeben. Die Einheit ist Mio. €. Leider sind die Tabellenüberschriften mit den Namen der VU verlorengegangen.

Werte in Mio. €	VU 1	VU 2
Risikokapital Kapitalanlage standalone vor Div.	14,3	153,4
Risikokapital Versicherungstechnik standalone vor Div.	37,6	53,3
Risikokapital Gesamt nach Diversifikation	28,2	144,7

Bitte berechnen Sie für VU 1 und VU 2 jeweils den Diversifikationseffekt sowohl absolut in Mio. € als auch relativ in %.

- b) (4 Punkte) Allokieren Sie nun jeweils für VU 1 und VU 2 den Diversifikationseffekt mittels der proportionalen Allokationsmethode auf die beiden Risikotreiber. Füllen Sie also bitte die folgende Tabelle aus:

Werte in Mio. €	VU 1	VU 2
Risikokapital Kapitalanlage nach Diversifikation		
Risikokapital Versicherungstechnik nach Diversifikation		

- c) (2 Punkte) Welche Ergebnisse stammen von der Leichendorfer Rentenanstalt, welche von der Feldafinger Brandkasse? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.
- d) (8 Punkte) Der Leiter des Risikomanagements bittet Sie, das Gesamtrisikokapital für die Gruppe zu ermitteln, die aus der Leichendorfer Rentenanstalt und der Feldafinger Brandkasse sowie der zugehörigen Finanzholding besteht. Bitte verwenden Sie im Folgenden für alle Aggregationen die Wurzelformel.

Ein junger Kollege von Ihnen schlägt vor, die Gesamt-Risikokapitalien der Leichendorfer Rentenanstalt und der Feldafinger Brandkasse unkorreliert zum Gesamtrisikokapital zu aggregieren.

- (2 Punkte) Bitte nennen Sie zwei Fehler, die dabei auftreten können.
- (2 Punkte) Bitte ermitteln Sie das Gesamtrisikokapital für die Gruppe, das sich ergibt, wenn Sie dem Vorschlag Ihres jungen Kollegen folgen.

- iii. (1 Punkt) Bitte ermitteln Sie das Gesamtrisikokapital für die Gruppe, das sich ergibt, wenn Sie die Risikokapitalien der Leichendorfer Rentenanstalt und der Feldafinger Brandkasse mit Korrelation 1 aggregieren.
- iv. (3 Punkte) Ihre erfahrenen Aktuare haben für das Gesamtrisikokapital für die Gruppe einen Wert i.H.v. 160,2 Mio. € berechnet. Welche Korrelation wurde dabei zwischen den Risikokapitalien der Leichendorfer Rentenanstalt und der Feldafinger Brandkasse unterstellt? Wie hoch ist der resultierende Diversifikationseffekt im Vergleich zur unkorrelierten Variante?

Lösung:

- a) (4 Punkte) Der Diversifikationseffekt ergibt sich aus den Angaben durch Differenzbildung zwischen der Summe der einzelnen Risikokapitalien und dem Gesamtrisikokapital nach Diversifikation:

Werte in Mio. €	VU 1	VU 2
Risikokapital Kapitalanlage standalone vor Div.	14,3	153,4
Risikokapital Versicherungstechnik standalone vor Div.	37,6	53,3
Summe der einzelnen Risikokapitalien	51,9	206,7
Risikokapital Gesamt nach Diversifikation	28,2	144,7
Diversifikation absolut	23,7	62,0
Diversifikation relativ	46%	30%

Dabei berechnet man die relative Diversifikation als Quotient der absoluten Diversifikation und der Summe der einzelnen Risikokapitalien.

- b) (4 Punkte) Das proportional allokierte Risikokapital ergibt sich zu:

Werte in Mio. €	VU 1	VU 2
Risikokapital Kapitalanlage nach Diversifikation	7,8	107,4
Risikokapital Versicherungstechnik nach Diversifikation	20,4	37,3
Risikokapital Gesamt	28,2	144,7

- c) (2 Punkte) Die mit „VU1“ beschrifteten Ergebnisse stammen von der Feldafinger Brandkasse, die mit „VU2“ beschrifteten Ergebnis von der Leichendorfer Rentenanstalt. Denn bei einem typischen Schaden- und Unfallversicherer überwiegen i.a. die versicherungstechnischen Risiken, während bei einem typischen Lebensversicherer v.a. die Kapitalanlagerisiken vorherrschen.
- d) (8 Punkte) Aggregation der Risikokapitalien der Leichendorfer Rentenanstalt und der Feldafinger Brandkasse zum Gesamtrisikokapital.
- i. (2 Punkte) Aggregiert man die Gesamt-Risikokapitalien der Leichendorfer Rentenanstalt und der Feldafinger Brandkasse einfach unkorreliert zu einem Gesamtrisikokapital, so läuft man Gefahr, die folgenden Fehler zu begehen:
 - Die Annahme der Unkorreliertheit ist nicht gerechtfertigt, weil i.a. eine hohe Korrelation zwischen den Kapitalanlagerisiken der beiden VU besteht.
 - Des Weiteren ist zu prüfen, ob bei den Beteiligungen der Finanzholding Konsolidierungen vorgenommen werden müssen.

- ii. (2 Punkte) Das Gesamtrisikokapital für die Gruppe mit unkorrelierter Aggregation der einzelnen Risikokapitalien ergibt sich mit der Wurzelformel zu:

$$147,4 = (28,2^2 + 144,7^2)^{0,5}$$

- iii. (1 Punkt) Ohne Diversifikation ergibt sich einfach die Summe der einzelnen Risikokapitalien:

$$172,9 = 28,2 + 144,7$$

- iv. (3 Punkte) Mit Ansatz einer Korrelation rho ergibt sich das Gesamtrisikokapital z aus den einzelnen Risikokapitalien x_1 und x_2 zu

$$z^2 = x_1^2 + 2 \cdot \rho \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$$

Auflösen nach rho liefert

$$\rho = (z^2 - x_1^2 - x_2^2) / (2 \cdot x_1 \cdot x_2)$$

Und damit

$$\rho = (160,2^2 - 28,2^2 - 144,7^2) / (2 \cdot 28,2 \cdot 144,7) = 48,01\%$$

Der resultierende Diversifikationseffekt beträgt $12,7 = 172,9 - 160,2$ bzw. $7,37\% = 1 - 160,2 / 172,9$.

Bei der unkorrelierten Variante betrug der Diversifikationseffekt $25,5 = 172,9 - 147,4$ bzw. $14,74\% = 1 - 147,4 / 172,9$. Er ist genau doppelt so hoch wie die Diversifikation, die sich aus den Berechnungen der erfahrenen Aktuare ergibt.

Aufgabe 4) Risikozerlegung (18 Punkte)

Anmerkung: In dieser Aufgabe sind die absoluten Werte in Mio. € mit einer Nachkommastelle angegeben. Runden Sie bitte Ihre Ergebnisse ebenfalls auf Mio. € mit einer Nachkommastelle.

Sie haben für die Feldafinger Brandkasse ein Internes Modell erstellt und erhalten für das ökonomische Ergebnis die folgende Ausgabe.

Pfad	Erg _{KA}	B	K	Z _{GJ}	R _{GJ}	R ₀	Z _{VJ}	R _{VJ}	O
1	13,3	127,5	26,6	40,5	53,0	82,9	37,3	48,4	0,0
2	6,7	126,5	26,6	42,2	54,1	82,9	35,4	53,8	0,0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
585	-10,6	127,5	26,6	43,4	52,6	82,9	29,7	51,7	4,8
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3.964	-8,0	127,4	26,6	39,9	49,8	82,9	29,0	49,8	0,0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4.631	13,6	127,7	26,6	37,0	50,8	82,9	39,3	56,0	0,0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5.612	7,4	118,4	26,6	54,1	60,1	82,9	30,9	49,8	0,0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
7.155	-7,7	126,5	26,6	47,5	59,7	82,9	34,9	52,6	0,0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10.000	4,1	122,2	26,6	49,8	60,8	82,9	33,6	53,1	0,0
MW	6,3	127,1	26,6	42,1	54,5	82,9	32,1	52,3	0,1

Erg _{KA}	Kapitalanlageergebnis
B	verdiente Netto Beiträge
K	Netto Kosten
Z _{GJ}	Netto Geschäftsjahreszahlungen
R _{GJ}	Netto Rückstellungen für Geschäftsjahresschäden

R ₀	Netto Rückstellungen in t=0
Z _{VJ}	Netto Vorjahreszahlungen
R _{VJ}	Netto Rückstellungen für Vorjahresschäden
O	Einfluss der operationellen Risiken
MW	Mittelwert

- (2 Punkte) Berechnen Sie anhand der obigen Bezeichnungen das ökonomische Ergebnis Erg_{Ökon} für den ersten Simulationspfad. Hat das Unternehmen hier einen Verlust oder einen Gewinn erzielt?
- (4 Punkte) Definieren Sie anhand der obigen Bezeichnungen das Abwicklungsergebnis Erg_{Abw.}. Berechnen Sie dieses für den Pfad 2 und Pfad 585. Wo liegt ein Abwicklungsgewinn und wo ein Abwicklungsverlust vor?
- (12 Punkte) Sie müssen nun das Risiko, d.h. die Differenz zwischen dem Mittelwert und dem 0,5% Quantil für die folgenden Risikokategorien ermitteln:
 - Kapitalanlagerisiko (Pfad 3.964)
 - Zeichnungsrisiko (Pfad 5.612)
 - Reserverisiko (Pfad 4.631)
 - operationelles Risiko (Pfad 585)
 - Gesamtrisiko (Pfad 7.155)

Der 50st schlechteste Pfad für die jeweilige Risikokategorie steht in Klammern hinter dieser Risikokategorie und gibt hier das 0,5%-Quantil an. Er kann in der Tabelle abgelesen werden.

Stellen Sie das Ergebnis in einem Wasserfalldiagramm mit den obigen Kategorien dar. Wie groß ist der Diversifikationseffekt?

Lösung:

a) (2 Punkte) Das ökonomische Ergebnis ermittelt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{Erg}_{\text{ökon}} &= \text{Erg}_{\text{KA}} + B - K - Z_{\text{GJ}} - R_{\text{GJ}} + R_0 - Z_{\text{VJ}} - R_{\text{VJ}} - O \\ &= 13,3 + 127,5 - 26,6 - 40,5 - 53,0 + 82,9 - 37,3 - 48,4 - 0 = 17,9 \text{ (Mio. Euro)} \end{aligned}$$

Die Feldafinger Brandkasse hat im ersten Simulationspfad einen Gewinn i.H.v. 17,9 Mio. Euro zu verzeichnen.

b) (4 Punkte) Das Abwicklungsergebnis ist definiert als

$$\text{Erg}_{\text{Abw}} = R_0 - Z_{\text{VJ}} - R_{\text{VJ}}$$

Für den 2. Pfad liegt ein Abwicklungsverlust vor, da das Abwicklungsergebnis negativ ist.

$$\text{Erg}_{\text{Abw}} = 82,9 - 35,4 - 53,8 = - 6,3 \text{ (Mio. Euro)}$$

Für den 585ten Pfad liegt ein Abwicklungsgewinn vor, da die Startreserve kleiner ist als die Summe der Zahlungen und Reserven für Vorjahresschäden zum Ende der Periode.

$$\text{Erg}_{\text{Abw}} = 82,9 - 29,7 - 51,7 = 1,5 \text{ (Mio. Euro)}$$

c) (12 Punkte) Das Risiko berechnet sich zu:

- Kapitalanlagerisiko:

Das Kapitalanlagerisiko besteht lediglich aus der Komponente K und errechnet sich zu

$$\text{MW}(K) - K(3964) = 6,3 - (- 8) = 14,3 \text{ (Mio. Euro)}$$

- Zeichnungsrisiko:

Das Zeichnungsrisiko wird über die Grundlage $\text{VT}_{\text{GJ}} = B - K - Z_{\text{GJ}} - R_{\text{GJ}}$ berechnet:

$$\begin{aligned} \text{MW}(\text{VT}_{\text{GJ}}) - \text{VT}_{\text{GJ}}(5612) \\ &= (127,1 - 26,6 - 42,1 - 54,5) - (118,4 - 26,6 - 54,1 - 60,1) \\ &= (3,9) - (- 22,4) = 26,3 \text{ (Mio. Euro)} \end{aligned}$$

- Reserverisiko:

Das Reserverisiko wird über das Abwicklungsergebnis $\text{Erg}_{\text{Abw}} = R_0 - Z_{\text{VJ}} - R_{\text{VJ}}$ berechnet:

$$\begin{aligned} \text{MW}(\text{Erg}_{\text{Abw}}) - \text{Erg}_{\text{Abw}}(4631) \\ &= (82,9 - 32,1 - 52,3) - (82,9 - 39,3 - 56,0) \\ &= (- 1,5) - (- 12,4) = 10,9 \text{ (Mio. Euro)} \end{aligned}$$

- Operationelles Risiko:

Das operationelle Risiko besteht lediglich aus der Komponente O und errechnet sich zu

$$\text{MW}(-O) + O(585) = - 0,1 - (- 4,8) = 4,7 \text{ (Mio. Euro)}$$

- Gesamtrisiko SCR:

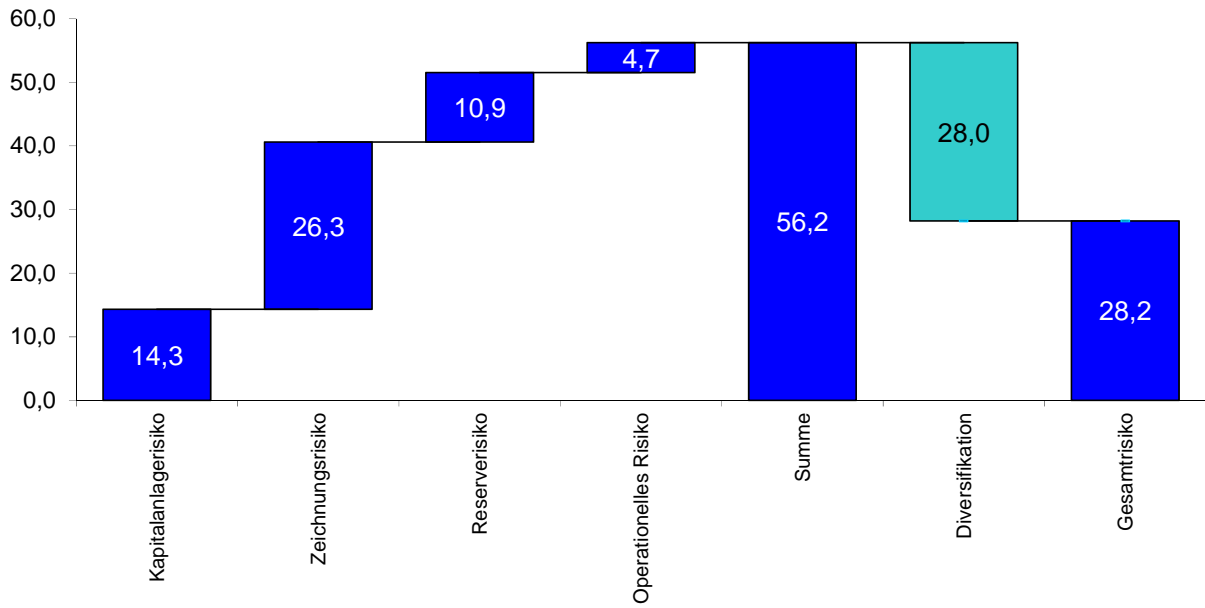
Das Gesamtrisiko ergibt sich über das ökonomische Ergebnis

$$\text{Erg}_{\text{Ökon}} = \text{Erg}_{\text{KA}} + \text{B} - \text{K} - \text{Z}_{\text{GJ}} - \text{R}_{\text{GJ}} + \text{R}_0 - \text{Z}_{\text{VJ}} - \text{R}_{\text{VJ}} - \text{O}$$

$$\text{MW}(\text{Erg}_{\text{Ökon}}) - \text{Erg}_{\text{Ökon}} (7155)$$

$$= (6,3 + 127,1 - 26,6 - 42,1 - 54,5 + 82,9 - 32,1 - 52,3 - 0,1) \\ - (-7,7 + 126,5 - 26,6 - 47,5 - 59,7 + 82,9 - 34,9 - 52,6 - 0,0) \\ = (8,6) - (-19,6) = 28,2 \text{ (Mio. Euro)}$$

Im Wasserfalldiagramm stellen sich die Werte wie folgt dar.



Der Diversifikationseffekt ergibt sich zu 28,0 Mio. Euro.

Aufgabe 5) Schadenmodellierung (18 Punkte)

Für die vergangenen Geschäftsjahre 2007 bis 2013 liegen Ihnen für eine Non-Life-Sparte folgende Brutto-Daten vor:

Geschäftsjahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Anzahl Verträge (Jahreseinheiten)	312.123	318.365	331.100	334.411	341.099	349.626	360.115
Anzahl aller gemeldeter Schäden im Geschäftsjahr	6.555	7.322	8.940	8.695	9.448	9.790	9.363
(durchschn.) Höhe der Schäden des Geschäftsjahres in EUR	3.611	3.651	3.575	3.727	3.601	3.781	3.661
verdiente Prämie in Tsd. EUR	34.334	35.020	38.077	40.129	41.273	43.703	43.306
Kosten in Tsd. EUR	5.150	4.903	5.711	5.618	6.397	6.993	6.929
Schadenaufwand in Tsd. EUR der im GJ gemeldeten Schäden	23.670	26.733	31.961	32.406	34.022	37.016	?

- a) (5 Punkte) Berechnen Sie für das Geschäftsjahr 2013 die Schadenfrequenz und die kombinierte Schaden/Kosten-Quote (d.h. die Combined Ratio). Berücksichtigen Sie hierzu nur die in der Tabelle dargestellten Informationen, d.h. ausschließlich die im Geschäftsjahr gemeldeten Schäden. Leider wurde der Schadenaufwand für 2013 in der Tabelle nicht mit ausgedruckt.
- b) (3 Punkte) Wie ist der Schadenbedarf definiert und wie wird er im Frequency-Severity-Ansatz dargestellt?
- c) (3 Punkte) Sie versuchen nun, auf Basis der Tabelle eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die durchschnittliche Schadenhöhe des Geschäftsjahres anzupassen. Als Vorarbeit führen Sie eine lineare Regression der durchschnittlichen Schadenhöhen durch. Für die Jahre 2007 und 2008 sind bereits zwei Punkte der Regressionsgeraden in der folgenden Tabelle angegeben. Die Extrapolation dieser Geraden auf das Jahr 2014 liefert Ihnen einen Schätzer für den Erwartungswert der anzupassenden Verteilung. Wie lautet dieser Schätzwert?

Geschäftsjahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
(durchschn.) Höhe der Schäden des Geschäftsjahres in EUR	3.611	3.651	3.575	3.727	3.601	3.781	3.661
Werte auf der Regressionsgeraden	3.611	3.627					

- d) (7 Punkte) Zusätzlich zur Schätzung des Erwartungswertes aus c) schätzen Sie aus Ihrer Zeitreihe für die durchschnittlichen Schadenhöhen einen Variationskoeffizienten von 1,8%. Wie ermitteln sich die Parameter einer Gamma-Verteilung, wenn Sie mit den Ergebnissen der Zeitreihenanalyse die Momentenmethode anwenden?

Verwenden Sie dabei die folgenden Informationen aus dem Aktuariat:

Gammaverteilung $\Gamma(\alpha, \beta)$ mit Dichte $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, x > 0$ und Momenten

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}; \quad Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Lösung:

- a) (5 Punkte) Für die Schadenfrequenz gilt:

$$\text{Freq} := \frac{\text{Anzahl Schäden}}{\text{Anzahl Verträge}} = \frac{9.363}{360.115} = 2,6\%$$

und die kombinierte Schaden/Kosten-Quote berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \text{CR} &:= \frac{\text{Schadenaufwand} + \text{Kosten}}{\text{Prämie}} = \frac{(\text{durschn.}) \text{ Schadenhöhe} * \text{Anzahl Schäden} + \text{Kosten}}{\text{Prämie}} \\ &= \frac{3.661 * 9.363 + 6.929.000}{43.306.000} = 95,15\% \end{aligned}$$

- b) (3 Punkte) Für den Schadenbedarf gilt:

$$\begin{aligned} \text{Schadenbedarf} &:= \frac{\text{Schadenaufwand}}{\text{Exposure}} = \frac{\text{Schadenaufwand}}{\text{Anzahl Schäden}} * \frac{\text{Anzahl Schäden}}{\text{Exposure}} \\ &= (\text{durschn.}) \text{ Schadenhöhe} * \text{Frequenz} \end{aligned}$$

- c) (3 Punkte) Der Schätzwert für den Erwartungswert lautet (mit den Werten der Tabelle ermittelt):

$$\hat{\mu} = 3.611 + (2014 - 2007) * (3.627 - 3.611) = 3.723$$

- d) (7 Punkte) Auflösen des Gleichungssystems $E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$; $Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$ nach α und β ergibt:

$$\alpha = \frac{E(X)^2}{Var(X)}; \beta = \frac{E(X)}{Var(X)}$$

Einsetzen der Schätzwerte 3.723 für $E(X)$ und $4490,88 = (3.723 * 1,8\%)^2$ für $Var(X)$ liefert die Parameter $\alpha = 3086,42$; $\beta = 0,829$