DAV
DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Dr. Nora Gürtler
Frank Schepers
Christian Näcker
Dr. Björn Hille
Dr. Steve Brüske

Klausur 2013 zum DAV Grundwissen „Modellierung“

Hinweise:
- Die nachfolgenden Aufgaben sind alle zu bearbeiten (d.h. keine Wahlmöglichkeiten).
- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Insgesamt haben Sie 90 Minuten Zeit und können 90 Punkte erreichen.
- Zum Bestehen der Klausur sind 36 Punkte hinreichend.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1) Berechnung eines stochastischen PVFP (18 Punkte)
Unter Vernachlässigung von Storno, Sterblichkeit und Diskontierung möchten Sie den (stochastischen) PVFP für Ihre Gesellschaft rechnen.

In Ihrem Unternehmen haben Sie nur noch eine beitragsfreie Police übrig:
- Restlaufzeit 2 Jahre
- Reserve € 1000
- Rechnungszins 4%
- Überschussbeteiligung 90% des Rohüberschusses

Sowohl der Rechnungszins als auch die Überschussbeteiligung werden jeweils am Jahresende als Cash Bonus ausgezahlt.

Die Verbindlichkeiten werden durch festverzinsliche Rentenpapiere bedeckt, die im Anlagevermögen liegen:
- Nominalwert („NW“) = Buchwert („BW“) = Marktwert („MW“) in t=0 € 1000
- Restlaufzeit 5 Jahre
- Coupon 5%

Sie planen bei Ablauf Ihrer letzten Police alle Rentenpapiere zu verkaufen um etwaige Gewinne/Verluste zu realisieren. Falls Sie zwischenzeitlich Geld neu anlegen müssen, werden Sie lediglich in Cash investieren.

Zum Bewertungszeitpunkt beträgt der risikofreie Zins konstant 5% für alle Laufzeiten. Von Ihren Kollegen aus dem Kapitalanlagecontrolling haben Sie den Verlauf der Marktwerte für das CE Szenario bekommen:

T	0	1	2
Risikofreier Zins	5.00%	5.00%	5.00%
Nominalwert Renten	1000	1000	1000
MW (Rentenpapiere)	1000	1000	1000

Benutzen Sie für die Darstellung/Berechnung der Ergebnisse die beigelegte Schablone, geben Sie Nebenrechnungen bitte auf einem separaten Blatt an und erläutern Sie kurz die wichtigsten Schritte:

a) (5 Punkte) Berechnen Sie den CE PVFP unter Vernachlässigung der Diskontierung (s.o.).

b) (9 Punkte) Berechnen Sie den stochastischen PVFP und den TV G&O für die folgenden 2 Kapitalmarktpfade:

- Iteration 1: Der risikofreie Zins steigt im ersten Jahr auf 6% und bleibt auf diesem Niveau
- Iteration 2: Der risikofreie Zins sinkt im ersten Jahr auf 4% und bleibt auf diesem Niveau.

Um die Änderung der Marktwerte abzuschätzen verwenden Sie eine vereinfachte Durationsformel:

MW(r+delta) = MW(r) – Restlaufzeit * delta * MW(r),

wobei r den anfänglichen Marktzins und delta die Zinsänderung bezeichnet.

Berechnen Sie den stochastischen PVFP und den TV G&O.

c) (4 Punkte) Wie ändert sich der stochastische PVFP, wenn Ihre Rentenpapiere sich im Umlaufvermögen statt im Anlagevermögen befinden. [Tipp: Sie müssen hierfür nur eine Iteration neu berechnen. Beachten Sie Anforderungen an die Neuanlage.]

Schablonen für die Bearbeitung der Aufgabe 1

Aufgabe a)			
CE Szenario			
t	0	1	2
Risikofreier Zins	5.00%	5.00%	5.00%
Aktiva			
MW (Rentenpapiere)	1000	1000	1000
BW (Rentenpapiere)			
Passiva			
Reserve			
GuV			
Kapitalerträge			
laufend			
Auf-/Abschreibungen			
Ertrag aus Verkäufen			
Rechnungszinsanforderung			
Rohüberschuss			
Überschussbeteiligung			
Jahresergebnis			
PVFP			

Aufgabe b)			
Szenario 1			
t	0	1	2
Risikofreier Zins	5.00%	6.00%	6.00%
Aktiva			
MW (Rentenpapiere)			
BW (Rentenpapiere)			
Passiva			
Reserve			
GuV			
Kapitalerträge			
laufend			
Auf-/Abschreibungen			
Ertrag aus Verkäufen			
Rechnungszinsanforderung			
Rohüberschuss			
Überschussbeteiligung			
Jahresergebnis			
PVFP			

Aufgabe b)			
Szenario 2			
t	0	1	2
Risikofreier Zins	5.00%	4.00%	4.00%
Aktiva			
MW (Rentenpapiere)			
BW (Rentenpapiere)			
Passiva			
Reserve			
GuV			
Kapitalerträge			
laufend			
Auf-/Abschreibungen			
Ertrag aus Verkäufen			
Rechnungszinsanforderung			
Rohüberschuss			
Überschussbeteiligung			
Jahresergebnis			
PVFP			

Aufgabe c)			
Szenario [ ]			
t	0	1	2
Risikofreier Zins	5.00%		
Aktiva			
MW (Rentenpapiere)			
BW (Rentenpapiere)			
Cash (MW=BW)			
Passiva			
Reserve			
GuV			
Kapitalerträge			
laufend			
Auf-/Abschreibungen			
Ertrag aus Verkäufen			
Rechnungszinsanforderung			
Rohüberschuss			
Überschussbeteiligung			
Jahresergebnis			
PVFP			

Lösung:

a) (5 Punkte) Im Anlagevermögen werden Rentenpapiere zum Anschaffungspreis gehalten. Bei Vernachlässigung von Agio/Disago Aufschlägen ist dieser gleich dem Nominalwert, so dass der Buchwert € 1000 beträgt.

Die Berechnung des CE PVFP wird in der Schablone dargestellt:

Aufgabe a)			
CE Szenario			
t	0	1	2
Risikofreier Zins	5.00%	5.00%	5.00%
Aktiva			
MW (Rentenpapiere)	1000	1000	1000
BW (Rentenpapiere)	1000	1000	1000
Passiva			
Reserve	1000	1000	1000
GuV			
Kapitalerträge			
laufend		50	50
Auf-/Abschreibungen		0	0
Ertrag aus Verkäufen		0	0
Rechnungszinsanforderung		40	40
Rohüberschuss		10	10
Überschussbeteiligung		9	9
Jahresergebnis		1	1
PVFP	2		

Der CE PVFP beträgt € 2.

b) (9 Punkte) Die Restlaufzeit verändert sich jedes Jahr um ein Jahr, so dass die Restlaufzeit am Ende des ersten Jahres 4 und am Ende des zweiten Jahres 3 beträgt. Aus der vereinfachten Durationsabschätzung ergeben sich im Vergleich zum CE Szenario die in der Schablone genannten Marktwerte.

Hierbei gilt für die Iteration i:

MW(t, Iteration i) = MW(t, CE) – MW(t, CE) * RLZ(t) * [r(t, Iteration i) – r(t, CE)]

Also z.B. für i=1 und t=1:

MW(1, 1) = 1000 – 1000 * 4 * [6% - 5%] = 1000 – 40 = 960

Da im Anlagevermögen zum Anschaffungspreis bilanziert wird, bleibt der Buchwert konstant bei € 1000, und es gibt keine Abschreibungen. Bei Fälligkeit der Police werden die Kapitalanlagen allerdings veräußert und stille Reserven/Lasten aufgelöst.

Es ergeben sich die folgende Zahlen und PVFPs:

Stoch. PVFP = 0.5 * (-19 + 5) = € -7
TVGO = CE PVFP – Stoch PVFP = 2 – (-7) = € 9

Aufgabe b)			
Szenario 1			
t	0	1	2
Risikofreier Zins	5.00%	6.00%	6.00%
Aktiva			
MW (Rentenpapiere)	1000	960	970
BW (Rentenpapiere)	1000	1000	1000
Passiva			
Reserve	1000	1000	1000
GuV			
Kapitalerträge			
laufend		50	50
Auf-/Abschreibungen		0	0
Ertrag aus Verkäufen		0	-30
Rechnungszinsanforderung		40	40
Rohüberschuss		10	-20
Überschussbeteiligung		9	0
Jahresergebnis		1	-20
PVFP	-19		

Aufgabe b)			
Szenario 2			
t	0	1	2
Risikofreier Zins	5.00%	4.00%	4.00%
Aktiva			
MW (Rentenpapiere)	1000	1040	1030
BW (Rentenpapiere)	1000	1000	1000
Passiva			
Reserve	1000	1000	1000
GuV			
Kapitalerträge			
laufend		50	50
Auf-/Abschreibungen		0	0
Ertrag aus Verkäufen		0	30
Rechnungszinsanforderung		40	40
Rohüberschuss		10	40
Überschussbeteiligung		9	36
Jahresergebnis		1	4
PVFP	5		

c) (4 Punkte) Im Umlaufvermögen muss nun das Niederstwertprinzip angewendet werden, dies bedeutet insbesondere, dass der Buchwert abgeschrieben werden muss, wenn der Marktwert unter den Anschaffungspreis fällt.

Da der Marktwert nur in Iteration 1 unter den Buchwert sinkt, muss nur diese Iteration neu berechnet werden.

Durch die Abschreibung des Buchwerts entsteht im Jahr 1 eine bilanzielle Unterdeckung, die dadurch ausgeglichen werden muss, dass man am Ende des Jahres € 40 zusätzlich in Cash anlegt. Im zweiten Jahr wird auf Cash der risikofreie Zins von 6% verdient. Dadurch steigt der laufende Ertrag um € 2,4.

Es ergeben sich die folgenden neuen Zahlen:

Aufgabe c)			
Szenario 1			
t	0	1	2
Risikofreier Zins	5.00%	6.00%	6.00%
Aktiva			
MW (Rentenpapiere)	1000	960	970
BW (Rentenpapiere)	1000	960	970
Cash (MW=BW)	0	40	40
Passiva			
Reserve	1000	1000	1000
GuV			
Kapitalerträge			
laufend		50	52.4
Auf-/Abschreibungen		-40	10
Ertrag aus Verkäufen		0	0
Rechnungszinsanforderung		40	40
Rohüberschuss		-30	22.4
Überschussbeteiligung		0	20.16
Jahresergebnis		-30	2.24
PVFP	-28		

Damit ändert sich der stochastische PVFP von €-7 auf 0.5 * (-28 + 5) = € -11.5

Aufgabe 2) Rechnungsgrundlagen Unisex (18 Punkte)
Die InsureTheDay-Versicherung bietet ihrer Klientel aus Top Managern, Politikern und diversen C-Prominenten Schutz bei Reisen in Gebiete mit erhöhtem Sicherheitsrisiko.

Das Hauptprodukt leistet gegen Zahlung eines Einmalbeitrags die Versicherungssumme bei Tod oder Entführung. Um die Aufgabe simpel zu halten, lösen wir uns von den herkömmlichen Zeitbegriffen und sprechen einfach von einer Zeitperiode (gedanklich eher im Bereich von Tagen denn von Monaten).

Aktuell werden die folgenden Schadeneintrittswahrscheinlichkeiten über eine Periode beobachtet:

Tod: Mann 0.2%; Frau 0.1%
Entführung: Mann 0.5%, Frau 1%

a) (4 Punkte) Berechnen Sie unter der vereinfachenden Annahme, dass sich Tod und Entführung ausschließen, einen Einmalbeitrag für eine Versicherungssumme von € 1 Mio, jeweils für einen Mann und für eine Frau. Bitte ignorieren Sie Zins, Kosten, Steuern und Diskontierung.

b) (8 Punkte) Da die InsureTheDay-Versicherung ihren Sitz in Deutschland hat, kommt auch sie nicht um das Thema Unisex herum.

    i. (3 Punkte) Wie würden Sie zur Herleitung eines geschlechts-unabhängigen Tarifes vorgehen? Beschreiben und begründen Sie, welche Rechnungsgrundlagen Sie zukünftig einsetzen würden.

    ii. (5 Punkte) Welchen Risiken unterliegt die Kalkulation? Nennen Sie drei Möglichkeiten, wie Sie dieser Unsicherheit begegnen könnten.

c) (6 Punkte) Um das Unternehmen an die Börse zu bringen, sollen die Gewinne der nächsten 10 Jahre projiziert werden. Vervollständigen Sie bitte die folgende Tabelle, welche die Informationsbasis für zwei wesentlichen Komponenten der Gewinn- und Verlustrechnung zusammenstellt (kurze Angaben reichen aus):

Komponente	Hängt ab von	Daten/Informationsbasis	Mögliche Validierung
Beitragseinnahmen	Vertriebserfolg, Beitragskalkulation	Vertriebsplanung, Unternehmens- / Mittelfristplanung	Eigene Historie; Zahlen von Wettbewerbern; Statistik/Prognose zu internationalen Geschäftstätigkeiten
Provisionen			
Leistungen			

Lösung:

a) (4 Punkte) Erwartete Leistungen

Frau: (0.1% + 1%) *EUR 1 Mio = EUR 11.000
Mann: (0.2% + 0.5%) * EUR 1 Mio = EUR 7.000

Sicherlich wäre das Unternehmen gut beraten, einen Sicherheitszuschlag zu erheben. Da die versicherte Grundgesamtheit wahrscheinlich eher klein ist, sollte dieser auch nicht zu knapp bemessen sein. Also etwa:

Einmalbeitrag Frau = EUR 11.000 * 150% = EUR 16.500
Einmalbeitrag Mann = EUR 7.000 * 150% = EUR 10.500

b) (8 Punkte)

i) (3 Punkte) Analyse der Aufteilung der Versicherten nach Geschlechtern in der Vergangenheit, unter der Annahme (Hoffnung), dass diese konstant bleibt. Entsprechend gewichtete Prämie. Da die Versicherung sehr temporär, und nicht „auf Vorrat" gekauft wird, sind Vorzieheffekte im Vertrieb, welche die Aufteilung verzerren könnte, nicht zu erwarten. Einbeziehung eines zusätzlichen Sicherheitszuschlags, da der Frauenanteil sich steigern könnte

ii) (5 Punkte)
Risiko 1: Änderung der Geschlechter-Anteile
Risiko 2: Änderung der Sterblichkeits- und Entführungsrisiken

Mögliche Maßnahmen (die folgende Liste stellt nur eine Auswahl dar):

- Rückversicherung
- Gestaffelte Beiträge nach Regionen
- Ausschluss von besonders riskanten Bereichen
- Präventive Maßnahmen, wie z.B. Verpflichtung zur Nutzung von Bodyguards
- Rahmenvereinbarung mit Entführern (Großkundenrabatt)

c) (6 Punkte)

Komponente	Hängt ab von	Daten/Informationsbasis	Mögliche Validierung
Beitragseinnahmen	Vertriebserfolg, Beitragskalkulation	Vertriebsplanung, Unternehmens- / Mittelfristplanung	Eigene Historie; Zahlen von Wettbewerbern; Statistik/Prognose zu internationalen Geschäftstätigkeiten
Provisionen	Neugeschäftsvolumen, Provisionsvereinbarung	Vertriebsplanung, Vertriebsvereinbarungen	Siehe oben,; zusätzlich bisherige Konditionen, gegebenenfalls Markt-Konditionen

Leistungen	Schadenhäufigkeit Tod und Entführung, Anzahl versicherte Personen und Versicherungssummen	Schadenstatistiken; geplante Geschäftstätigkeit nach Gefährdungsregionen	z.B. Daten/Erkenntnisse von Sicherheitsbehörden

Aufgabe 3) Unternehmensmodelle Leben und Komposit (18 Punkte)

Der typische Lebensversicherer Leichendorfer Rentenanstalt und der typische Schaden- und Unfallversicherer Feldafinger Brandkasse werden von einer großen ausländischen Aktiengesellschaft gekauft, die die beiden Unternehmen als Tochtergesellschaften einer deutschen Finanzholding in ihren Konzern integriert hat. Die Finanzholding hat ausschließlich diese beiden Tochtergesellschaften und betreibt kein eigenes Geschäft. Im Zuge dieser Umstrukturierung werden sowohl die stochastischen Unternehmensmodelle als auch die aktuariellen Bewertungen segmentübergreifend in einer Risikomanagementeinheit auf Holdingebene zentralisiert. Der neue Leiter des Risikomanagements lässt sich die vorhandenen Risikoanalysen und Informationen zu den stochastischen Unternehmensmodellen der Leichendorfer Rentenanstalt und der Feldafinger Brandkasse vorlegen.

a) (6 Punkte) Sie werden zunächst gebeten, die Informationen zu den stochastischen Unternehmensmodellen aufzubreiten.
   i. (3 Punkte) Bitte benennen Sie 5 wesentliche Komponenten eines stochastischen Unternehmensmodells für das Asset-Liability-Management in der Lebensversicherung. Welche Annahmen werden stochastisch modelliert, welche deterministisch vorgegeben?
   ii. (3 Punkte) Bitte benennen Sie 6 wesentliche Komponenten eines stochastischen Unternehmensmodells in der Schaden- und Unfallversicherung. Welche Annahmen werden stochastisch modelliert, welche deterministisch vorgegeben?

b) (8 Punkte) In einem zweiten Schritt werden Sie gebeten, die Definition und Berechnung des ökonomischen Risikokapitals zu erläutern.
   i. (1 Punkt) Wie ist das ökonomische Risikokapital gemäß den Anforderungen aus Solvency definiert?
   ii. (3 Punkte) Bitte skizzieren Sie, wie das ökonomische Risikokapital für die Lebensversicherung gemäß der Theorie ausgerechnet werden sollte. Welche Schwierigkeiten treten in der Praxis dabei auf?
   iii. (4 Punkte) Bitte skizzieren Sie, wie das ökonomische Risikokapital für die Lebensversicherung im allgemeinen in der Praxis (u.a. auch in der Standardformel) ausgerechnet wird. Bitte nennen Sie zwei Ungenauigkeiten, die man dabei in Kauf nimmt.

c) (4 Punkte) Aus den Aktuariaten der Leichendorfer Rentenanstalt und der Feldafinger Brandkasse liegen die folgenden Risikokapitalanalysen vor. Es handelt sich dabei um das Risikokapital für Kapitalanlage und Versicherungstechnik sowie für das Gesamtunternehmen. Die Risikokapitalien sind nach Diversifikation sowie nach Allokation der Diversifikationseffekte auf die Risikotreiber angegeben, die Einheit ist Mio. €. Leider sind die Tabellenüberschriften verlorengegangen.

Werte in Mio. €	**VU 1**	**VU 2**
Risikokapital Kapitalanlage	7,9	107,4
Risikokapital Versicherungstechnik	20,7	37,3
Risikokapital Gesamt	**28,6**	**144,7**

i. (2 Punkte) Welche Ergebnisse stammen von der Leichendorfer Rentenanstalt, welche von der Feldafinger Brandkasse? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

ii. (2 Punkte) Der Leiter des Risikomanagements bittet Sie, das Gesamtrisikokapital für die Gruppe zu ermitteln, die aus der Leichendorfer Rentenanstalt und der Feldafinger Brandkasse sowie der zugehörigen Finanzholding besteht. Ein junger Kollege von Ihnen schlägt vor, die Gesamt-Risikokapitalien der Leichendorfer Rentenanstalt und der Feldafinger Brandkasse unkorreliert zum Gesamtrisikokapital zu aggregieren. Bitte nennen Sie zwei Fehler, die dabei auftreten können.

Lösung:

a) (6 Punkte) Die stochastischen Unternehmensmodelle in der Lebensversicherung bzw. in der Schaden- und Unfallversicherung sind wie im folgenden beschrieben strukturiert.

i. (3 Punkte) Die fünf wesentlichen Komponenten des stochastischen Unternehmensmodells für das Asset-Liability-Management in der Lebensversicherung sind die folgenden:

- Kapitalmarktmodell
- Kapitalanlagemodell
- Projektionsmodell der Passivseite
- Managementmodell
- Ergebnismodell

In der Lebensversicherung wird von den Inputgrößen ausschließlich der Kapitalmarkt stochastisch modelliert. alle anderen Annahmen fließen deterministisch in das Modell ein, insbesondere die Annahmen der Passivseite wie Kosten und Biometrie.

ii. (3 Punkte) Die sechs wesentlichen Komponenten des stochastischen Unternehmensmodells in der Schaden- und Unfallversicherung sind die folgenden:

- Kapitalmarktmodell
- Kapitalanlagemodell
- Bruttomodell der Passivseite zur Abbildung des Zeichnungsrisikos
- Rückversicherungsmodell
- Reserverisikomodell
- Ergebnismodell

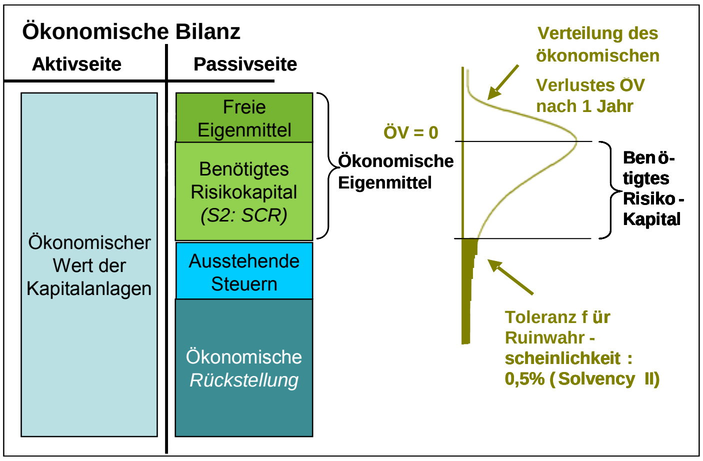
In der Schaden- und Unfallversicherung wird von den Inputgrößen nicht nur der Kapitalmarkt stochastisch modelliert, sondern auch die Schäden der Passivseite. Üblicherweise modelliert man Masseschäden, Großschäden und Schäden aus Naturereignissen (NatCat-Schäden) separat.

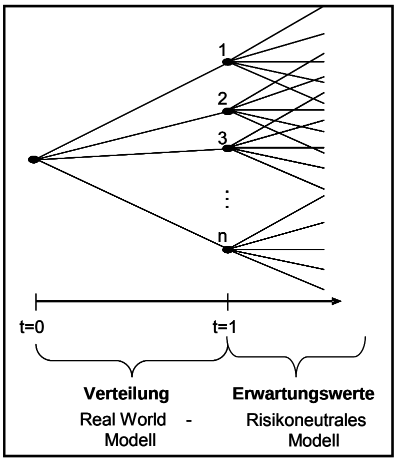
b) (8 Punkte) Die Definition und Berechnung des ökonomischen Risikokapitals stellen sich wie folgt dar.

i. (1 Punkt) Das ökonomische Risikokapital gemäß den Anforderungen aus Solvency (SCR – Solvency Capital Requirement) ist der Betrag, um welchen die ökonomischen Eigenmittel mit (1-x)% Wahrscheinlichkeit innerhalb eines Jahres höchstens abnehmen. Im Solvency II-Prozess wurde x gleich 0,5 gesetzt, d.h. man betrachtet ein Konfidenzniveau von 99,5%.

Anders ausgedrückt: Wenn ein Unternehmen exakt mit Eigenmitteln in Höhe des ökonomischen Risikokapitals startet, beträgt das ökonomische Insolvenzrisiko gerade x%.

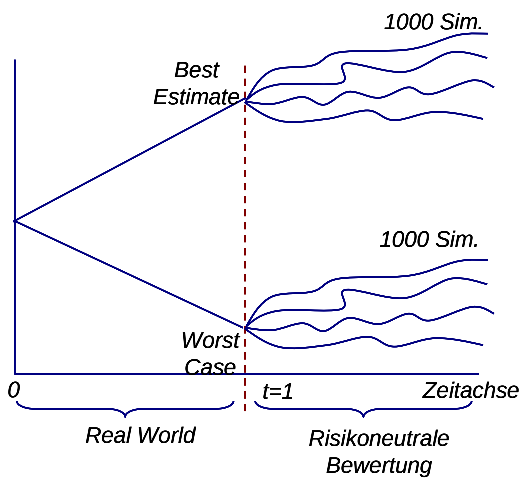
ii. (3 Punkte) Gemäß der Theorie sollte das ökonomische Risikokapital für ein Lebensversicherungsunternehmen als 99,5%-Quantil seiner ökonomischen Eigenmittel nach Ablauf eines Jahres ausgerechnet werden, wobei während dieses Jahres (also zwischen t=0 und t=1) alle Risikofaktoren variieren können:





Um die Verteilung der ökonomischen Eigenmittel zum Zeitpunkt t=1 zu bestimmen, wird zunächst das erste Bilanzjahr unter Berücksichtigung aller relevanten Risikotreiber simuliert, d.h. der Übergang von t=0 auf t=1. Dies geschieht in der Praxis anhand von stochastischen Simulationen, z.B. 1000 Stück. Zur Bestimmung der ökonomischen Eigenmittel in jedem dieser 1000 Simulationspfade sind wiederum stochastische Simulationen nötig, z.B. wiederum 1000 Stück („Stochastik in der Stochastik“ oder „Nested Simulations“). Insgesamt ergibt sich daraus in unserem Beispiel die Notwendigkeit von 1 Mio Simulationen. Dies ist mit den heutzutage verfügbaren Rechenkapazitäten i.a. nicht darstellbar, d.h. es ergeben sich in der Praxis nicht tragbare viel zu lange Laufzeiten.

iii. (4 Punkte) Aufgrund der Schwierigkeit, das Problem der „Nested Simulations“ in der Praxis zu lösen, verwendet man oftmals die folgende Näherung, u.a. wird diese auch bei der Standardformel eingesetzt:
Anstatt die vollständige Verteilung der ökonomischen Eigenmittel zu simulieren, ermittelt man diese im Basisfall unter Best Estimate Annahmen sowie in verschiedenen Stress-Situationen, in denen jeweils nur ein einziger Risikofaktor einem Stress unterworfen wird. Damit berechnet man einzelne Risikokapitalien als Differenz der ökonomischen Eigenmittel im Basisfall und im jeweiligen Stressfall (z.B. für das Zinsrisiko, das Aktienrisiko, das Immobilienrisiko, das Stornorisiko, …..)



und aggregiert diese mittels einer Korrelationsmatrix zu einem Gesamtrisikokapital. Den ersten Zeitschritt von t=0 auf t=1 vernachlässigt man dabei i.a. und setzt statt dessen instantane

Stresse im Zeitpunkt t=0 an. Dabei nimmt man die folgenden Ungenauigkeiten bzw. Fehler in Kauf (in der Aufgabenstellung waren nur zwei Angaben gefordert):

- Die Aggregation der einzelnen Risikokapitalien mittels einer Korrelationsmatrix ist eigentlich nur bei gemeinsamer multivariater Normalverteilung zulässig. Diese liegt i.a. nicht vor.
- Doppelnutzung von Puffern: Bei der o.g. Näherung werden stets nur einzelne Risikofaktoren gestresst und während der Simulation dieses einzelnen Stresses zur Bestimmung der ökonomischen Eigenmittel die zur Verfügung stehenden Puffer wie freie RfB oder aktivische Bewertungsreserven voll ausgenutzt. In der Realität hat man es jedoch oft mit kombinierten Stressen mehrerer Risikofaktoren zu tun, und dabei stehen die Puffer nur ein einziges Mal zur Verfügung.
- Bei der Anwendung der Standardformel erfolgt die Kalibrierung der Stressfaktoren standalone auf der Inputseite, z.B. wird die Höhe eines Aktienstresses anhand von Daten der Vergangenheit zur Entwicklung von Aktienindizes und deren Schwankungen bestimmt. Damit ermittelt man den Stressfaktor als das 99,5%-Quantil des Risikofaktors ohne Berücksichtigung des Unternehmensexposures. SII fordert jedoch das 99,5%-Quantil der ökonomischen Eigenmittel des Versicherungsunternehmens, d.h. die Bestimmung auf der Outputseite der stochastischen Simulationen unter Berücksichtigung des Unternehmensexposures.
- Die Vernachlässigung des ersten Zeitschrittes von t=0 auf t=1 und der Ansatz von instantanen Stressen in t=0 ist eine weitere Ungenauigkeit der Standardformel und vielen gängigen Näherungen für die Risikokapitalberechnung.

c) (4 Punkte) Die Risikokapitalien nach Diversifikation sowie nach Allokation der Diversifikationseffekte auf die Risikotreiber sind gemäß den vorliegenden Analysen wie folgt:

Werte in Mio. €	**VU 1**	**VU 2**
Risikokapital Kapitalanlage	7,9	107,4
Risikokapital Versicherungstechnik	20,7	37,3
Risikokapital Gesamt	**28,6**	**144,7**

i. (2 Punkte) Die mit „VU1“ beschrifteten Ergebnisse stammen von der Feldafinger Brandkasse, die mit „VU2“ beschrifteten Ergebniss von der Leichendorfer Rentenanstalt. Denn bei einem typischen Schaden- und Unfallversicherer überwiegen i.a. die versicherungstechnischen Risiken, während bei einem typischen Lebensversicherer v.a. die Kapitalanlagerisiken vorherrschen.

ii. (2 Punkte) Aggregiert man die Gesamt-Risikokapitalien der Leichendorfer Rentenanstalt und der Feldafinger Brandkasse einfach unkorreliert zu einem Gesamtrisikokapital, so läuft man Gefahr, die folgenden Fehler zu begehen (in der Aufgabenstellung war nur ein möglicher Fehler gefragt):
   - Die Annahme der Unkorreliertheit ist nicht gerechtfertigt, weil i.a. eine hohe Korrelation zwischen den Kapitalanlagerisiken der beiden VU besteht.
   - Des Weiteren ist zu prüfen, ob bei den Beteiligungen der Finanzholding Konsolidierungen vorgenommen werden müssen.

Aufgabe 4) Reserverisiko (18 Punkte)

Anmerkung: In dieser Aufgabe sind die absoluten Werte in Mio. € angegeben. Runden Sie bitte auf Mio. €.

Sie arbeiten im Risikomanagement der SII-Versicherung AG, welche Geschäft in den Versicherungssparten Feuer und Kraftfahrt zeichnet. Eine XL-Rückversicherungsdeckung für die Sparte Feuer besteht seit 2008. Sie sind für die Ermittlung des Reserverisikos zuständig und haben nur noch 18 Minuten Zeit bis zur Präsentation bei ihrem Vorgesetzten. Leider besteht zurzeit ein Systemausfall, so dass Ihnen nur die folgenden ausgedruckten Informationen vorliegen, welche aufgrund eines Druckerdefekts auch nicht vollständig sind.

Chain-Ladder **Zahlungsabwicklung** Sparte **Feuer** (kumulierte Zahlung) :

	Abwicklungsjahr				
Anfalljahr	1	2	3	4	5
2008	**50**	**110**	**135**	**140**	**140**
2009	**10**	**80**	**100**	**105**	105
2010	**75**	**80**	**110**	115	115
2011	**40**	**110**	141	147	147
2012	**90**	195			

Werte in Mio. Euro

Anfalljahr	Best-Estimate-Reserve	Standard-abweichung
2008		0
2009		0
2010		1
2011		10
2012		190
Gesamt		190

Chain-Ladder **Aufwandsabwicklung** Sparte **Feuer** (kumulierte Zahlung + Einzelschadenreserve):

	Abwicklungsjahr				
Anfalljahr	1	2	3	4	5
2008	**160**	**155**	**145**	**140**	**140**
2009	**130**	**120**	**110**	**105**	105
2010	**160**	**150**	**130**	125	125
2011	**180**	**160**	145		
2012	**170**	158	143	137	137

Anfalljahr	Best-Estimate-Reserve	Standard-abweichung
2008		0
2009		0
2010		1
2011		6
2012		8
Gesamt		12

a) (4 Punkte) Berechnen Sie über das Chain-Ladder-Verfahren die fehlenden Stellen in den Abwicklungsrechtecken, sowie die Brutto-Best-Estimate Reserve für jedes Anfalljahr und über alle Anfalljahre (jeweils für das Zahlungs- und für das Aufwandsdreieck).

b) (4 Punkte) Ermitteln Sie nun das Brutto-Risikokapital analog zum Skript als Differenz Quantil zum Erwartungswert für beide Dreiecke über einen Normalverteilungsansatz zum 99,5%-Konfidenzniveau, mit den Parametern Erwartungswert und Standardabweichung für die Gesamtreserve (Verfahren nach Mack). Hinweis: Das 99,5% Quantil der Standardnormalverteilung beträgt 2,58.

c) (2 Punkte) Legen Sie sich eine Begründung für Ihren Vorgesetzten zurecht, warum die Aufwandsabwicklung eine realistischere Betrachtung der Brutto-Best-Estimate Reserve sowie des Risikokapitals ist. Bitte halten Sie diese kurz schriftlich fest.

d) (6 Punkte) Sie haben sich nun für die Aufwandsabwicklung der Sparte Feuer entschieden. Auf Ihrem Schreibtisch finden Sie außerdem Notizen zur Standardabweichung für die Gesamtreserve der zweiten Sparte Kraftfahrt i.H.v. 20 Mio. Euro. Sie nehmen eine Korrelation von 20% zur ersten Sparte an. Ermitteln Sie zunächst die Standardabweichung für die Gesamtreserve (Feuer + Kraftfahrt), dann das benötigte Risikokapital analog zu b), und skizzieren Sie alle drei Risikokapitalpositionen mit dem Diversifikationseffekt in einem Wasserfalldiagramm analog zu den Darstellungen im Modellierungs-Skript.

e) (2 Punkte) Da Ihnen die Daten nur als Jahresgesamtschaden vorliegen, benötigen Sie für Ihren Vorgesetzten noch eine Erklärung, warum eine Ermittlung des Netto-Reserverisikos (nach Rückversicherung) nur sehr approximativ erfolgen kann. Bitte schildern Sie diese kurz.

Lösung:

a) (4 Punkte) Sie ermitteln zunächst über das Chain-Ladder Verfahren die Übergangsfaktoren und wenden diese auf die Vorperiode an.

Zahlungsabwicklung:
Anfalljahr 2012, Abwicklungsjahr 3: (135+100+110)/(110+80+80)*195 ≈ 249
Anfalljahr 2012, Abwicklungsjahr 4: (140+105)/(135+100)*249 ≈ 260
Anfalljahr 2012, Abwicklungsjahr 5: 140/140*260=260

Die Best-Estimate Reserve ermitteln Sie aus der Differenz Abwicklungsjahr 5 (Ultimate) zur Diagonalen (kumulierte Zahlungen bis 2012) pro Anfalljahr.

	Abwicklungsjahr					Best-Estimate
Anfalljahr	1	2	3	4	5	Reserve
2008	**50**	**110**	**135**	**140**	**140**	0
2009	**10**	**80**	**100**	**105**	105	0
2010	**75**	**80**	**110**	115	115	5
2011	**40**	**110**	141	147	147	37
2012	**90**	195	249	260	260	170

In Summe erhalten Sie für das Zahlungsdreieck eine Best-Estimate Reserve von 212 Mio. Euro.

Aufwandsabwicklung:
Anfalljahr 2011, Abwicklungsjahr 4: (140+105)/(145+110)*145 ≈ 139
Anfalljahr 2011, Abwicklungsjahr 5:: 140/140*139 = 139

Die Best-Estimate Reserve ermitteln Sie aus der Differenz Abwicklungsjahr 5 zur Diagonalen aus dem Zahlungsdreieck pro Anfalljahr.

	Abwicklungsjahr					Best-Estimate
Anfalljahr	1	2	3	4	5	Reserve
2008	**160**	**155**	**145**	**140**	**140**	0
2009	**130**	**120**	**110**	**105**	105	0
2010	**160**	**150**	**130**	125	125	15
2011	**180**	**160**	145	139	139	29
2012	**170**	158	143	137	137	47

In Summe erhalten Sie für das Aufwandsdreieck eine Best-Estimate Reserve von 91 Mio. Euro.

b) (4 Punkte) Das Risikokapital ist die Differenz aus dem 99,5%-Quantil (Q) zum Erwartungswert (EW). Das bedeutet hier:

Q – EW = Std * 2,58 + EW – EW = Std * 2,58

Risikokapital durch Zahlungsabwicklung = 190 * 2,58 ≈ 490
Risikokapital durch Aufwandsabwicklung = 12 * 2,58 ≈ 31
Das Risikokapital für Reserverisiko ist mit 490 Mio. nach Zahlungsabwicklung deutlich größer als mit 31 Mio. nach Aufwandsabwicklung.

c) (2 Punkte) Die extrem unterschiedlichen Steigerungen von der ersten zur zweiten Buchungsperiode im Zahlungsdreieck führen dazu, dass einerseits eine sehr hohe Best-Estimate Reserve für das Anfalljahr 2012 ermittelt wird und andererseits es zu einer extremen Volatilität, welche sich im Reserverisiko widerspiegelt, kommt. Im Aufwandsdreieck stabilisieren sich diese Unterschiede durch die Aufwandsbetrachtung.

d) (6 Punkte) Um die Standardabweichung für das gesamte Reserverisiko zu ermitteln, wenden Sie die Varianz-Kovarianzformel an:

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2 * \mathrm{Cov}(X,Y)$$

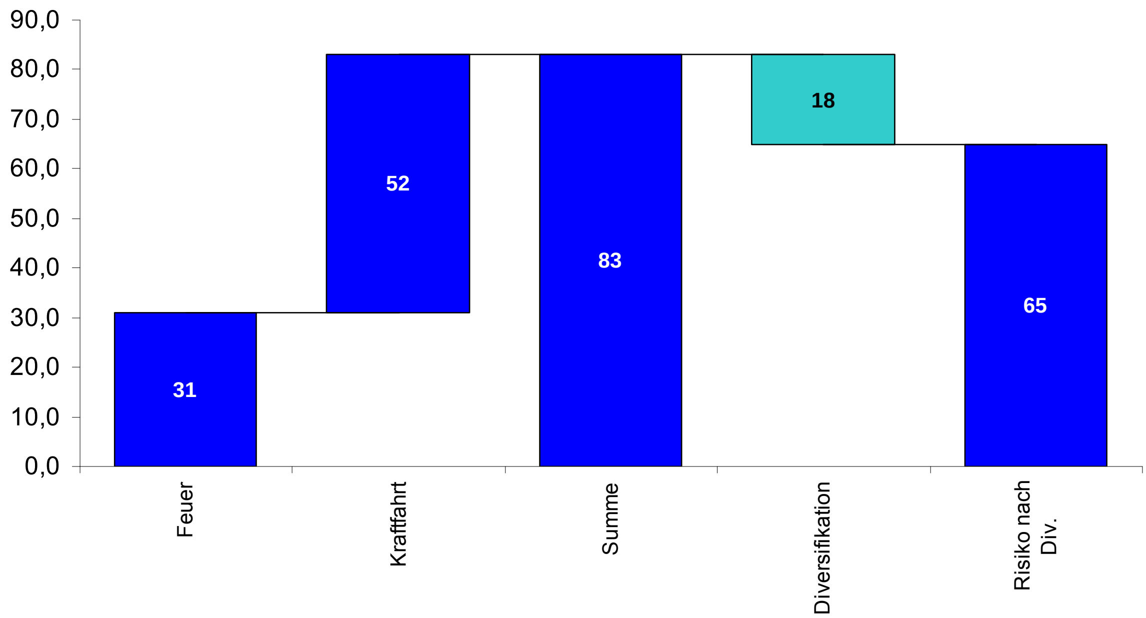
$$\Rightarrow \mathrm{Std}(X+Y) = (\mathrm{Std}(X)^2 + \mathrm{Std}(Y)^2 + 2 * \rho_{X,Y} * \mathrm{Std}(X) * \mathrm{Std}(Y))^{0,5}$$
$$= (144 + 400 + 2 * 20\% * 12 * 20)^{0,5}$$
$$\approx 25$$

Die Standardabweichung für die Reserve des Gesamtunternehmens errechnet sich zu ungefähr 25 Mio. Euro.

Nach Aufgabeteil b) erhalten wir folgendes Risikokapital:

Feuer: 31 Mio. Euro
Kraftfahrt: 52 Mio. Euro
Gesamtunternehmen: 65 Mio. Euro
Diversifikation: (31+52-65) Mio. Euro = 18 Mio. Euro

Im Wasserfalldiagramm stellt sich das wie folgt dar:



e) (2 Punkte) Um das Netto-Reserverisiko über eine XL-Rückversicherungsstruktur abzubilden, müssen Einzelschadendaten vorliegen. Da Sie aber nur ein Jahresaggregat zur Verfügung haben, müssen Sie die Rückversicherungsstruktur approximiert abbilden.

Aufgabe 5) Simulation des Brutto- und Nettoschadenaufwands (18 Punkte)
Es seien a>0 und X eine verschobene exponentialverteilte Zufallsgröße, d.h. ihre Verteilungsfunktion ist für λ>0 gegeben durch

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\lambda \cdot (x-a)\right) & \text{für x} \geq \text{a} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für den Erwartungswert gilt: $E(X) = a + \frac{1}{\lambda}$.

Im Rahmen einer Großschadenhöhenmodellierung wollen Sie nun für eine Ihrer Sparten eine solche Verteilung mittels Momentenmethode an Ihre Schadendaten anpassen. Es liegen Ihnen zum 01.01.2013 die folgenden Schadendaten nach HGB für alle Schäden mit einem Aufwand von mehr als 1.000 T€ vor (alle Angaben in T€):

Schadennr.	Anfalljahr	kumulierte Zahlungen	Einzelschadenreserve	Aufwand
1	2011	1.700	700	2.400
2	2006	2.100	0	2.100
3	2012	90	1.600	1.690
4	2005	1.200	0	1.200
5	2009	1.050	0	1.050
6	2010	550	500	1.050
7	2000	800	210	1.010

Sie entscheiden sich, dass die Großschadengrenze bei a=1.000 T€ liegen soll. Der durchschnittliche Schadenaufwand der historischen Großschäden beträgt 1.500 T€.

a) (3 Punkte) Sie möchten eine verschobene Exponentialverteilung an die dargestellten Aufwände der Schäden anpassen. Wie lautet der Parameter λ bei Verwendung der Momentenmethode?

b) (2 Punkte) Ihr Kollege, der das DAV-Repetitorium „Modellierung“ gehört hat, kritisiert Sie, da Sie in Teil a) die verschobene Exponentialverteilung an die HGB-Aufwände der Schäden angepasst haben. Welche Schritte sollte man eigentlich vor Verteilungsanpassung durchführen?

c) (4 Punkte) Sie ermitteln als Realisation einer auf [0;1] gleichverteilten Zufallsvariablen den Wert 0,9132. Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Wertes unter Verwendung der Inversionsmethode eine Realisation der verschobenen Exponentialverteilung, parametrisiert gemäß a).

d) (3 Punkte) Die modellierte Sparte ist durch einen XL-Rückversicherungsvertrag 3.000 xs 1.000 gedeckt (in T€ und mit unendlich vielen freien Wiederauffüllungen). Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzeugt die in a) angepasste Verteilung einen Schaden, dessen Nettoschadenaufwand 1.000 T€ echt übersteigt?

e) (6 Punkte) Erstellen Sie zu der in Teil a) angepassten Verteilung einen Q-Q-Plot. Welchen Schluss ziehen Sie aus Ihrem Q-Q-Plot?
Hilfestellung: Ihr Aktuariat hat freundlicherweise bereits die in der folgenden Tabelle aufgeführten Werte der unter a) parametrisierten Verteilungsfunktion bestimmt. Eventuell müssen Sie einige Werte für den Q-Q-Plot noch selbst errechnen.

x	F(x)
1.003	0,005
1.026	0,050
1.053	0,100
1.067	0,125
1.077	0,143
1.081	0,150

x	F(x)
1.091	0,167
1.112	0,200
1.144	0,250
1.168	0,286
1.178	0,300
1.203	0,333

x	F(x)
1.215	0,350
1.235	0,375
1.255	0,400
1.280	0,429
1.299	0,450
1.347	0,500

x	F(x)
1.399	0,550
1.424	0,571
1.458	0,600
1.490	0,625
1.525	0,650
...	...

Lösung:

a) (3 Punkte) Aus $E(X) = a + \frac{1}{\lambda}$ folgt $\lambda = \frac{1}{E(X) - a}$. Durch Einsetzen von a=1.000 und E(X)=1.500 erhält man den Parameter λ zu $\lambda = 1/500 = 0{,}002$.

b) (2 Punkte) Zum einen sind die Schäden geeignet auf das zu simulierende Jahr zu inflationieren. Zum anderen sollte man die HGB-Einzelschadenreserve durch eine aktuarielle Reserve ersetzen, um so zu einem aus aktuarieller Sicht endabgewickelten Schadenaufwand zu gelangen, den man simulieren will.

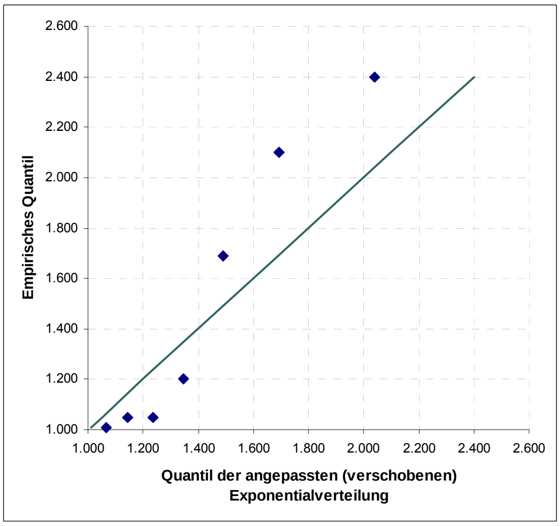
c) (4 Punkte) Die Quantilfunktion von X lautet $F^{-1}(u) = a - \frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$ und mit Hilfe der angegebenen Zufallszahl erhält man die Realisation 2.222 T€.

d) (3 Punkte) Der Bruttoschaden müsste hierzu 4.000 T€ überschreiten. Die Wahrscheinlichkeit, dass dies geschieht, ist $P(X > 4.000) = 1 - P(X \le 4.000) = 1 - F(4.000) = 1 - 0{,}9975 = 0{,}0025$. Dies geschieht also in ca. 0,25% aller Fälle.

e) (6 Punkte) Die folgende Tabelle enthält die oberen $\frac{i}{n+1}$-Quantile bzw. die unteren $1-\frac{i}{n+1}$-Quantile der in a) angepassten verschobenen Exponentialverteilung gemäß der Formel $F^{-1}\left(1-\frac{i}{n+1}\right) = a - \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{i}{n+1}\right)$:

Schadennr. i	Schadenhöhe $x_{(i)}$	i/(n+1)	oberes i/(n+1)-Quantil von X
1	2.400	0,125	2.040
2	2.100	0,250	1.693
3	1.690	0,375	1.490
4	1.200	0,500	1.347
5	1.050	0,625	1.235
6	1.050	0,750	1.144
7	1.010	0,875	1.067

Die in dieser Tabelle dargestellten letzten fünf Quantile der exponentialverteilten Zufallsvariablen X konnten auch aus den Aktuariatsinformationen entnommen werden. Es ergibt sich ein Q-Q-Plot wie folgt:



Die in Teil a) angepasste verschobene Exponentialverteilung scheint die historischen Schäden nicht gut anzupassen. Kleinere Schäden werden von ihr überschätzt, größere Schäden unterschätzt.