

## Klausur 2012 zum DAV Grundwissen „Modellierung“

### Hinweise:

- Die nachfolgenden Aufgaben sind alle zu bearbeiten (d.h. keine Wahlmöglichkeiten).
- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Insgesamt haben Sie 90 Minuten Zeit und können 90 Punkte erreichen.
- Zum Bestehen der Klausur sind 36 Punkte hinreichend.

### Viel Erfolg!

### Aufgabe 1) (15 Punkte)

Bei der Leichendorfer Rentenanstalt (LRA) wird die Verdichtung von Versicherungsvertragsdaten zu Modellpunkten per 31.12.2011 durchgeführt, um die Eingangsgrößen für ein Unternehmensprojektionsmodell zu erzeugen. Für denselben Zweck wird das Kapitalanlageportfolio verdichtet. Mit dem Projektionsmodell sollen per 31.12.2011 u.a. der Embedded Value und der zugehörige Neugeschäftswert berechnet werden. Bei der Verdichtung treten die folgenden Fragen auf.

- a) (2 Punkte) Der Versicherte Otto Müller schloss seinen Vertrag im Alter von 20 Jahren, der Versicherte Heinrich Schmidt ebenfalls mit 20 Jahren, der Versicherte Manfred Schulz mit 21 Jahren. Bei allen Verträgen handelt es sich um eine aufgeschobene Rentenversicherung gegen laufenden Beitrag. Herr Schmidt ist ein seit vielen Jahren weltweit anerkannter Professor für zeitgenössische Literatur. Die Herren Müller und Schulz arbeiten beide in unterschiedlichen Positionen für ein Chemieunternehmen und kennen sich bereits vom gemeinsam im Jahr 2000 geleisteten Wehrdienst.

Welche zwei dieser drei Verträge könnte man ggf. zusammen verdichten und warum? Bei welcher Versicherungsart könnte die Antwort auf diese Frage anders ausfallen und warum?

- b) (2 Punkte) Der Versicherte Hermann Meier, geb. am 24.05.1981, schloss einen Tag nach seinem 30. Geburtstag eine aufgeschobene Rentenversicherung bei der LRA ab. Können Sie seinen Vertrag mit einem der Verträge der Herren Müller, Schmidt und Schulz zusammen verdichten und warum (bzw. warum nicht)?
- c) (3 Punkte) Bisher wurden bei der LRA für gemischte Kapitallebensversicherungen die männlichen und die weiblichen Versicherungsnehmer getrennt verdichtet. Dies soll aus Gründen der Laufzeit der Projektionsmodelle geändert werden. Daher stellt das Aktuariat der LRA Überlegungen zur künftigen gemeinsamen Verdichtung der Männer und Frauen im Bestand an.

Bitte beschreiben Sie konkret, wie Sie die Verdichtung hinsichtlich der Biometrie geschlechtsübergreifend ausgestalten können. Welche Sterbetafel 2. Ordnung hinterlegen Sie in dem neuen Projektionsmodell?

- d) (4 Punkte) Die Arbeitsanweisung zur Verdichtung des konventionellen Geschäfts bei der LRA sieht eine Validierung durch Abgleich der Zahlungsströme aus der Projektion auf dem verdichteten Bestand mit denen aus der Projektion auf dem unverdichteten Bestand vor.

Die Verdichtung wird dabei als gut definiert, wenn die Abweichungen "verdichtet vs. unverdichtet" bei den Prämien P, der konventionellen Deckungsrückstellung R und den Gesamtleistungen L in keinem Projektionsjahr über 2% liegen. Die Ihnen zur Validierung vorgelegten Daten genügen diesem Kriterium.

Da Sie ein(e) engagierte(r) Aktuar(in) sind, stellen Sie jedoch des Weiteren fest, dass – bezogen auf das konventionelle Geschäft – die Abweichung beim Rohüberschuss bereits in den ersten Projektionsjahren bisweilen deutlich über 5% liegt. Woran könnte das liegen?

- e) (4 Punkte) Bei der Verdichtung der Anleihen im Kapitalanlagenportfolio der LRA wurden...
- 1: ...der Fälligkeitsstichtag bei allen Anleihen auf den 30. Juni eines jeden Projektionsjahres eingestellt,
  - 2: ...die Ablaufjahre in 5-Jahres-Bändern verdichtet,
  - 3: ...bei Anleihen mit quartärllicher Kuponzahlung ein jährlicher Kupon in Höhe von 4 x Quartalskupon eingestellt.

Die Marktwerte der aktivseitigen Modellpunkte des Anleihenportfolios wurden als Barwert der zugehörigen künftigen Couponzahlungen bestimmt.

Bei der Validierung der Verdichtung stellen Sie fest, dass offenbar bei der Verdichtung der Anleihen etwas schief gelaufen ist: Die Marktwerte des verdichteten und des unverdichteten Bestands an Rentenpapieren weichen um deutlich mehr als 5% voneinander ab. Was ist Ihrer Ansicht nach die wahrscheinlichste Fehlerursache und warum?

#### Lösung:

- a) (2 Punkte) Ggf. könnte man die Verträge von Herrn Müller und Herrn Schulz zusammen verdichten, da deren Alter bei Projektionsbeginn ähnlich sind (ca. 30 Jahre) - während Herr Prof. Schmidt deutlich älter als die beiden anderen Versicherungsnehmer sein dürfte.

Herr Müller und Herr Schulz könnten ggf. unterschiedlichen Berufsgruppen angehören - z.B. könnte einer dieser Versicherten einen gefährlichen Beruf bei dem Chemie-Konzern ausüben und der andere nicht. In diesem Falle könnte man die beiden Verträge bei einer SBU- oder BUZ-Versicherung nicht zusammen verdichten.

- b) (2 Punkte) Bei den Verträgen der Herren Müller, Schmidt und Schulz handelt es sich um Verträge, die seit mindestens 10 Jahren im Bestand der LRA sind. Der Versicherte Meier hat seinen Vertrag in 2011 abgeschlossen und gehört damit zu dem in 2011 geschlossenen Neugeschäft. Da die LRA den Neugeschäftswert getrennt berechnen möchte, kann man den Vertrag nicht mit den anderen genannten Verträgen zusammen verdichten.
- c) (3 Punkte) Man kann gewichtete Mittelwerte zwischen der Männertafel und der Frauentafel bilden, entsprechend dem jeweiligen "gebrochenen" Geschlechtswert pro verdichteten Modelpoint. Konkret sei das Geschlecht gleich 0 bei Männern und gleich 1 bei Frauen. Ist das Geschlecht in einem verdichteten Modelpoint gleich  $g$  mit  $0 < g < 1$ , so soll für die entsprechende Sterblichkeit gelten:  $q(g) = g * q(y,i) + (1 - g) * q(x,i)$  mit  $i=1,2$ , wenn  $q(x,i)$  die Männersterblichkeit der  $i$ -ten Ordnung für das Alter  $x$  und  $q(y,i)$  die Frauensterblichkeit der  $i$ -ten Ordnung für das Alter  $y$  darstellen.
- d) (4 Punkte) Das kann z.B. daran liegen, dass die Veränderung der Deckungsrückstellung nicht in der Arbeitsanweisung bedacht wurde. Auch bei einem guten Fit der Deckungsrückstellung kann es bei der Differenzenbildung zu einer deutlichen Abweichung kommen, da eine relativ kleine Differenz zweier großer Zahlen oftmals instabil wird. Diese kann dann direkt zu einer deutlichen Abweichung in der GuV-Position "Rohüberschuss" führen.
- e) (4 Punkte) Die Bildung von 5-Jahres-Bändern bei den Anleihen ist nicht sinnvoll, da sie die Zahlungsströme der Anleihen erheblich verzerren kann - eine Verdichtung sollte die Ablaufjahre der Anleihen exakt berücksichtigen. Hingegen ist die Festlegung des Fälligkeitsstichtags auf den 30.06. für

alle Anleihen meist gut vertretbar, dieser entspricht eine implizite Gleichverteilungsannahme für die Fälligkeitsstichtage. Des Weiteren ist die Einstellung der jährlichen Kupons anstelle der quartalsweisen vertretbar, wenn die entsprechende Umrechnung der Kupon-Zahlungen mit dem Faktor 4 durchgeführt wird.

**Aufgabe 2) (15 Punkte)**

Ein Kunde schließt einen Vertrag ab, welcher ihm nach Ablauf von 10 Jahren eine feste Auszahlung garantiert. Vor dem Ablauf der 10 Jahre besteht keine Möglichkeit zum Rückkauf, das Todesfallrisiko ist aufgrund der vorbildlichen Lebensführung des Versicherungsnehmers für diese Aufgabe zu ignorieren.

Der Kunde bezahlt für diese Leistung einen Einmalbeitrag in Höhe von EUR 10.000. Kostenzuschläge werden nicht erhoben, da die Gesellschaft ihr Geschäft auf der Insel der Glückseligen zum Nulltarif betreiben kann. Auch Kapitalkosten sind vernachlässigbar, Steuern wurden gerade abgeschafft.

Die garantierte Verzinsung beträgt 1,75% p.a., eine Überschussbeteiligung gibt es nicht.

Den Betrag zur Bedeckung der Verpflichtung investiert die Gesellschaft in einen ausfallsicheren Zero Bond mit 10 Jahren Laufzeit und einem Zins von 2% p.a. Dieser Zins wird als „sicher“ betrachtet. Der Rest des Geldes wird zunächst als risikolose Anlage geparkt.

- a) (6 Punkte) Geben Sie die Werte für jedes Feld der skizzierten ökonomischen Bilanz zum Zeitpunkt des Abschlusses der Versicherung an:

<b>Ökonomischer Wert der Aktiva</b>	<b>Freie ökonomische Eigenmittel</b>
	<b>Benötigtes Risikokapital</b>
	<b>Ökonomischer Wert der Verbindlichkeiten</b>

- b) (5 Punkte) Welche Risiken würden sich aus den folgenden Änderungen der Kapitalanlage für den Betrag zur Bedeckung der Verpflichtung ergeben?

<b>Alternative Kapitalanlage</b>	<b>Zusätzliche Risiken</b>
Unternehmensanleihe mit 10 jähriger Restlaufzeit und jährlicher Coupon-Zahlung	
Anlage in einen US Dollar denominierten Zero Bond mit 5 Jahren Laufzeit	
Anlage in einen ausfallsicheren Zero Bond mit 15 Jahren Restlaufzeit	

c) (4 Punkte) Für eine Risikobewertung möchten Sie das Ausfallrisiko spanischer Staatsanleihen abschätzen. Nennen Sie zwei Informationen, die Sie zur Abwägung heran ziehen könnten, und beschreiben Sie jeweils in einem Satz, welcher Vorbehalt jeweils besteht.

**Lösung:**

a) (6 Punkte) Ökonomische Bilanz zum Zeitpunkt des Abschlusses der Versicherung (alle Beträge in EUR):

- a. Der ökonomische Wert der Aktiva entspricht dem geleisteten Einmalbeitrag i.H.v. EUR 10.000, da diese komplett zur Anlage bereit stehen.
- b. Der ökonomische Wert der Verbindlichkeiten entspricht der garantierten Ablaufleistung, diskontiert mit dem „sicheren“ Marktzins:

$$\frac{10.000 \times (1 + 1,75\%)^{10}}{(1 + 2\%)^{10}} = 9.758$$

- c. Die gesamten ökonomischen Eigenmittel entsprechen der Differenz aus den beiden vorhergehenden Positionen, also 242. Es wird kein Risikokapital benötigt, da keine Risiken vorliegen:
  - i. Die Fristigkeit der Kapitalanlage entspricht exakt derjenigen der Verbindlichkeit (welche aufgrund fehlender Rückkaufoption und Vernachlässigung Tod als fix betrachtet wird), so dass kein Wiederanlagerisiko besteht.
  - ii. Bei Anlage zum „sicheren“ Zins besteht kein Ausfallrisiko.
  - iii. Biometrische Risiken werden ebenso wie Kostenrisiken gemäß Aufgabenstellung ignoriert.
 Damit betragen die freien ökonomischen Eigenmittel 242, und das benötigte Risikokapital ist 0.

b) (5 Punkte)

Alternative Kapitalanlage	Zusätzliche Risiken
Unternehmensanleihe mit 10 jähriger Restlaufzeit und jährlicher Coupon-Zahlung	i) Wiederanlagerisiko für die jährlichen Coupons ii) Ausfallrisiko der Unternehmensanleihe
Anlage in einen US Dollar denominierten ausfallsicheren Zero Bond mit 5 Jahren Laufzeit	iii) Wiederanlagerisiko nach 5 Jahren iv) Wechselkursrisiko EUR/USD
Anlage in einen ausfallsicheren Zero Bond mit 15 Jahren Restlaufzeit	v) Marktwertisiko bei Verkauf wegen Ablauf der Verbindlichkeit

c) (4 Punkte)

i) Historische Beobachtung über die letzten n Jahre: durch politische Stützung in der Euro-Zone waren Ausfälle weitgehend ausgeschlossen, so dass die Historie das heutige Risiko nicht notwendigerweise vollständig widerspiegelt.

ii) Differenz der Rendite spanischer Staatsanleihen zum „sicheren“ Zins: Diese beinhaltet neben echten Ausfallrisiken auch Kurs- bzw. Spreadrisiken.

### Aufgabe 3) Embedded Value / Überleitungsanalyse (15 Punkte)

Sie sind Aktuar in der Embedded Value Gruppe der Lebensversicherungsgesellschaft „Park Dein Geld“. Ihr Unternehmen verkauft seit letztem Jahr Policen, bei denen die Versicherungsnehmer Geld für drei Jahre sicher parken können, d.h. ein eingezahlter Betrag wird nach 3 Jahren ohne Verzinsung als garantierte Erlebensfalleistung ausgezahlt. Im Falle von Storno wird der Betrag ohne Kürzung vorzeitig ausgezahlt.

Sie sollen für den Bestand zum 31.12.2010 einen traditionellen Embedded Value berechnen.

- a) (3 Punkte) Aus welchen Komponenten besteht per definitionem der traditionelle Embedded Value? Bitte beschreiben Sie kurz die Bedeutung der einzelnen Komponenten.

Für die Aufgabenteile b) und c) gelten die im Folgenden beschriebenen Annahmen und Vereinfachungen.

Produktbeschreibung:

- Die Versicherungsnehmer sind nicht gewinnberechtigt.
- Die Versicherungsnehmer bezahlen zusätzlich zu ihrem Einmalbeitrag noch einen jährlichen nachschüssigen Kostenbeitrag in Höhe von 1% der Erlebensfallsumme.
- Die Reservierung erfolgt ohne Berücksichtigung von Sterblichkeit und mit einem Rechnungszins von 0%.
- Abschlusskosten betragen € 10 pro Police.

Vereinfachungen:

- Kapitalbindungskosten und Sterblichkeit können vernachlässigt werden.
- Die Risikodiskontrate beträgt 0%.

Es werden von Ihnen weiterhin folgende Annahmen getroffen:

Nettoverzinsung:	1% pro Jahr
Kosten:	Fixe Verwaltungskosten von € 10 pro Jahr und Police
Storno:	0%
Dividendenpolitik:	Eventuelle Gewinne bzw. Verluste werden jeweils zum Ende eines Jahres an den Aktionär ausgeschüttet bzw. von diesem ausgeglichen. Dies war auch im zurückliegenden Jahr der Fall. Das EK zum 31.12.2010 ist daher null.

- b) (4 Punkte) Ihr Bestand zum 31.12.2010 umfasst 10 Policen mit einer Versicherungssumme von jeweils € 1000 und Restlaufzeiten von jeweils 2 Jahren. Bestimmen Sie den Embedded Value zu  $t=0$ . Geben Sie auch kurz den Rechenweg an.

- c) (8 Punkte) Sie müssen nun am Ende des nächsten Jahres zum 31.12.2011 eine Überleitungsanalyse erstellen und den Embedded Value neu berechnen. Bitte berücksichtigen Sie dabei folgende Punkte:

- Sie hatten im zurückliegenden Jahr doch eine Stornierung eines Vertrags zum 31.12.2011. Sie erwarten aber zukünftig weiterhin kein Storno.
- Sie haben am 01.01. des abgelaufenen Jahres 10 neue Policen verkauft mit einer Versicherungssumme von jeweils € 500. Auch bei diesen Policen wird dieser Betrag nach 3 Jahren ohne Verzinsung als garantierte Erlebensfalleistung und im Falle von Storno ohne Kürzung vorzeitig ausgezahlt.

Befüllen Sie die folgende auf die relevanten Schritte verkürzte Tabelle zur Überleitungsanalyse und erläutern Sie kurz die Berechnungen.

	Net Asset Value	Cost of Capital	Bestandswert	Embedded Value	Erläuterungen / Annahmen
<b>Startwert zum 1.1.</b>					
Expected Return					
Abweichung des tatsächlichen Gewinns von der Planung (ohne Kapitalmarkt)					
Neugeschäft					
Dividenden					
<b>Endwert zum 31.12.</b>					

**Lösung:**

- a) (3 Punkte) Der traditionelle Embedded Value ("EV") berechnet sich als Net Asset Value ("NAV") abzüglich Cost of Capital ("CoC") und zuzüglich dem Present Value of Future Profits ("PVFP"):

$$EV = NAV - CoC + PVFP$$

Hierbei ist:

NAV: HGB-Buchwert des Eigenkapitals („EK“), adjustiert um nicht eingezahltes Eigenkapital, im Bilanzgewinn enthaltene Dividenden, sowie immaterielle Vermögensgegenstände.

CoC: Kapitalbindungskosten, die durch die Zinsdifferenz zwischen Risikodiskontrate und erwarteter Rendite auf das EK, gegebenenfalls durch die Beteiligung der Versicherungsnehmer an den Kapitalerträgen auf das EK und durch Steuern auf die Kapitalerträge auf das EK entstehen.

PVFP: Barwert der künftig aus dem vorhandenen Versicherungsbestand zu erzielenden HGB-Jahresüberschüsse

- b) (4 Punkte) Laut Aufgabenstellung gelten

NAV = 0, da der letztjährige Gewinn auch als Dividende gezahlt wird

CoC = 0, da Kapitalbindungskosten vernachlässigt werden

Für den PVFP zum 31.12.2010 gilt (bei  $r_{dr} = 0$ ):  $PVFP = \sum_{t=1}^2 J\ddot{U}(t)$ , wobei für alle  $t$  ( $t=1,2$ ):

$$\begin{aligned}
 J\ddot{U}(t) &= \text{Kostenbeiträge}(t) & + & \text{Kapitalerträge}(t) & - & \text{Kosten}(t) \\
 &= 10 * 1\% * 1000 & + & 1\% * 10 * 1000 & - & 10 * 10 \\
 &= 100 & + & 100 & - & 100 \\
 &= 100
 \end{aligned}$$

Somit gilt  $PVFP = 2 * 100 = 200$  und folglich auch  $EV = 200$ .

- c) (8 Punkte) Überleitungsanalyse mit Erklärung:

Expected Return:

Die im ersten Jahr erwarteten Gewinne i.H.v. 100 werden in den NAV umgebucht.

Experience Variance:

Durch das Storno der einen Police hat sich das Volumen geändert, es gab aber keinen Einfluss auf den Jahresgewinn. Der PVFP ergibt sich nun als

$$PVFP(\text{"nach Exp. Variance"}) = 9 * 1\% * 1000 + 1\% * 9 * 1000 - 9 * 10$$

$$= 90$$

Neugeschäft:

Für das Neugeschäft war das Ergebnis im ersten Jahr:

$$\begin{aligned} \text{JÜ (NG, 2011)} &= 10 * 1\% * 500 \text{ "Kostenbeitrag"} \\ &\quad - 10 * \text{€} 10 \quad \text{"Abschlusskosten"} \\ &\quad - 10 * \text{€} 10 \quad \text{"Verwaltungskosten"} \\ &\quad + 10 * 1\% * 500 \quad \text{"Kapitalertrag"} \\ &= 50 - 100 - 100 + 50 \\ &= - 100 \end{aligned}$$

Der vom Neugeschäft verursachte (negative) Jahresüberschuss wird vom NAV abgezogen.  
Für den PVFP des Neugeschäfts zum 31.12.2011 gilt:  $\text{PVFP} = 2 * [50 - 100 + 50] = 0$ .

Dividende:

Der Jahresgewinn des letzten Jahres war

$$\begin{aligned} \text{JÜ(2011)} &= 100 \quad \text{(aus Altbestand)} \\ &\quad - 100 \quad \text{(Neugeschäft)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

und somit wird keine Dividende gezahlt.

Durch die Summe der Effekte der einzelnen Schritte ergibt sich ein EV zum 31.12.2011 von 90:

$$\text{NAV} = 0$$

$$\text{COC} = 0$$

$$\text{PVFP} = \text{PVFP}(\text{Bestand}) + \text{PVFP}(\text{NG}) = 90 + 0 = 90$$

	Net Asset Value	Cost of Capital	Bestandswert	Embedded Value	Erläuterungen / Annahmen
<b>Startwert zum 1.1.</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>200.00</b>	<b>200.00</b>	
Expected Return	100		-100	0	Umbuchung des erstjährigen Gewinns vom Bestandswert in das Eigenkapital
Abweichung des tatsächlichen Gewinns von der Planung (ohne Kapitalmarkt)	0		-10	-10	Durch Storno vermindert sich das Volumen für das letzte Jahr des Bestands auf 90%
Neugeschäft	-100		0.00	-100	Neugeschäft schlägt sich nur mit überrechnungsmäßigen Abschlusskosten nieder
Dividenden	0			0.00	Der Jahresgewinn wird an den Aktionär ausgeschüttet
<b>Endwert zum 31.12.</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>90.00</b>	<b>90.00</b>	

#### Aufgabe 4) (20 Punkte)

Sie wollen für eine Ihrer Sachversicherungssparten ein Großschadenmodell anpassen. Eine Schadenanzahlverteilung haben Sie bereits modelliert, nun beschäftigen Sie sich mit der Anpassung einer Schadenhöhenverteilung an Ihre historischen Großschäden.

a) (3 Punkte) Nennen Sie drei Methoden, mit deren Hilfe Sie die Güte der Anpassung Ihres parametrischen Verteilungsmodells an Ihre vorliegenden Daten beurteilen können.

b) (3 Punkte) Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit stetiger und streng monotoner Verteilungsfunktion  $F$  und  $U$  eine auf dem Intervall  $[0;1]$  gleichverteilte Zufallsvariable. Beschreiben und begründen Sie, wie Sie mit Hilfe von  $U$  Realisationen von  $X$  erzeugen können.

c) (5 Punkte) Sie entscheiden sich, eine verschobene Weibull-Verteilung zur Modellierung der Großschadenhöhenverteilung  $X$  zu verwenden. Als Großschadengrenze wählen Sie  $t = 1.000.000$  EUR. Die Verteilungsfunktion der verschobenen Weibull-Verteilung ist für  $x \geq t$  gegeben durch

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-[\lambda \cdot (x - t)]^k\right\},$$

und deren Parameter bestimmen Sie zu:

$$k = 0,57 \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{1}{1.400.000}$$

Wenden Sie die Inversionsmethode an und bestimmen Sie für den ersten Simulationspfad zwei Großschäden unter Verwendung der Realisationen 0,752 und 0,991 einer auf  $[0;1]$  gleichverteilten Zufallsvariablen.

d) (9 Punkte)

Vorabhinweis: Nur für den Fall, dass Sie Teil c) nicht gelöst haben, rechnen Sie im Folgenden für den ersten Pfad mit den (fiktiven) Großschäden 5.000.000 und 25.000.000 EUR.

Die Großschäden der zu modellierenden Sparte sind während des Simulationszeitraums durch einen XL-Vertrag rückgedeckt:

- Selbstbehalt: 1 Mio. EUR
- Haftungstrecke: 19 Mio. EUR
- Eine Wiederauffüllung zu 100%.

- (i) (3 Punkte) Wie hoch ist die zedierte Schadenssumme für den ersten Pfad (mit den Schäden aus Teil c) bzw. mit den im Vorabhinweis angegebenen fiktiven Schäden)?
- (ii) (3 Punkte) Wie hoch dürfte im ersten Simulationspfad ein dritter Schaden zusätzlich zu den Schäden aus Teil c) (bzw. zusätzlich zu den fiktiven Schäden aus dem Vorabhinweis) maximal sein, damit er abzüglich des Selbstbehalts von 1 Mio. EUR komplett zediert werden kann?
- (iii) (3 Punkte) Sollte sich im ersten Pfad ein dritter Schaden tatsächlich ereignen: Mit welcher Wahrscheinlichkeit übersteigt ein Großschaden den in Teil (ii) bestimmten Aufwand? (Sollten Sie (ii) nicht gelöst haben, bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Großschaden, der größer ist als 20 Mio. EUR.)

### Lösung:

a) (3 Punkte) Q-Q-Plot, P-P-Plot, Mean-Excess-Funktion, Anpassungstests (Kolmogorov-Smirnov,  $\chi^2$ , Anderson-Darling, ...), Stabilitätstests (Hill-Plot, Quantilplots), Backtesting, usw.

b) (3 Punkte) Inversionsmethode: Ist  $U$  eine auf  $[0;1]$ -gleichverteilte Zufallsvariable und  $F$  die (streng monotone) Verteilungsfunktion einer stetigen Verteilung, so besitzt auch  $X := F^{-1}(U)$  die Verteilungsfunktion  $F$ , denn es gilt

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x).$$



Man kann also Realisationen von X erzeugen, in dem man Realisationen von U in die Quantilsfunktion  $F^{-1}$  einsetzt.

c) (5 Punkte)  $F^{-1}(x) = t + \frac{1}{\lambda} [-\ln(1-x)]^{\frac{1}{k}}$  und es gilt:

$$F^{-1}(0,752) = 3\,508\,413$$

$$F^{-1}(0,991) = 22\,230\,113$$

d) (i) (3 Punkte) Für den ersten Simulationspfad ergibt sich durch Anwendung des XL-Vertrags auf die beiden Schäden der zedierte Schadenaufwand zu:

$$2.508.413 + 19.000.000 = 21.508.413$$

bzw. im Fall der Nutzung des Vorabhinweises:

$$4.000.000 + 19.000.000 = 23.000.000$$

Man beachte hierbei die eine Wiederauffüllung in den Konditionen des XL-Vertrags.

(ii) (3 Punkte) Mit der maximalen Haftungsstrecke aus dem XL-Vertrag inkl. einer Wiederauffüllung ergibt sich für die Höhe eines möglichen dritten Schadens:

$$38.000.000 - 2.508.413 - 19.000.000 = 16.491.587 \text{ zzgl. } 1.000.000 \text{ Selbstbehalt,}$$

also 17.491.587. Im Fall der fiktiven Schäden aus dem Vorabhinweis ergibt sich analog:

$$38.000.000 - 4.000.000 - 19.000.000 = 15.000.000 \text{ zzgl. } 1.000.000 \text{ Selbstbehalt,}$$

also 16.000.000.

(iii) (3 Punkte) Mit der Verteilungsfunktion F der verschobenen Weibullverteilung ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu:

$$P(X > 17.491.587) = 1 - P(X \leq 17.491.587) = 1 - F(17.491.587)$$

$$= \exp \left\{ - \left[ \frac{1}{1.400.000} \cdot (17.491.587 - 1.000.000) \right]^{0,57} \right\} = 1,69\%$$

bzw. im Fall der Alternativbetrachtung:

$$P(X \geq 20.000.000) = 1 - P(X \leq 20.000.000) = 1 - F(20.000.000)$$

$$= \exp \left\{ - \left[ \frac{1}{1.400.000} \cdot (20.000.000 - 1.000.000) \right]^{0,57} \right\} = 1,20\%.$$

### Aufgabe 5) (25 Punkte)

Sie haben für das interne Modell einer Versicherungsgesellschaft mit Kompositgeschäft für zwei Sparten ein stochastisches Modell erstellt. Hierzu haben Sie aus der Planung die folgenden Parameter für das Neugeschäft des kommenden Geschäftsjahres erhalten (diese und alle anderen Werte in TEUR):

	verdiente Prämie	Kosten (gesamt)	erwarteter diskontierter Schadenaufwand
Sparte 1	14.000	2.100	10.500
Sparte 2	24.000	4.080	19.400
Gesamt	38.000	6.180	29.900

Risikokapital RBC: Bei den nachfolgenden Aufgaben bezeichne der Begriff „Risikokapital (RBC)“ wie im Repetitorium immer den Differenzbetrag vom Erwartungswert zum Risikomaß Value-at-Risk (VaR). Für die vorliegende Aufgabe wird der VaR zum Konfidenzniveau 5% bestimmt.

Ökonomisches Versicherungstechnisches Ergebnis: Das ökonomische versicherungstechnische Ergebnis ist die Differenz von verdiente Prämie zur Summe aus Kosten und diskontiertem Schadenaufwand, d.h.

ökonom. vt. Ergebnis = verdiente Prämie – (Kosten + diskontierter Schadenaufwand).

- a) (3 Punkte) Bestimmen Sie mit den obigen Werten für die Sparten 1 und 2 sowie für die gesamte Gesellschaft jeweils die erwartete (diskontierte) Schadenquote, die Kostenquote und die kombinierte Schaden-/Kostenquote (also die Combined Ratio).
- b) (3 Punkte) Nachdem Sie für beide Sparten Schadenverteilungen modelliert haben, simulieren Sie für jede Sparte 100 mal die ökonomischen versicherungstechnischen Ergebnisse, wobei Prämien und Kosten deterministisch und der diskontierte Schadenaufwand stochastisch in das Modell eingehen. Die auf TEUR gerundeten Ergebnisse der Simulation sind in Tabelle A des Anhangs dargestellt.

Des Weiteren haben Sie die Ränge der jeweiligen Realisationen ermittelt (individuell für jede Sparte und für das Gesamtergebnis; Rang 1 ist jeweils die kleinste Realisation, Rang 2 jeweils die zweitkleinste, usw). Die Ränge sind in Tabelle B dargestellt.

Bestimmen Sie für jede Sparte und für beide Sparten zusammen (d.h. inkl. Diversifikation) aus den Simulationsergebnissen den Value-at-Risk zum Niveau 5% und das jeweilige Risikokapital RBC.

- c) (5 Punkte) Allokieren Sie das gesamte diversifizierte Risikokapital mittels proportionaler Allokation auf die Sparten 1 und 2 und bestimmen Sie den Diversifikationseffekt zwischen den beiden Sparten. Stellen Sie Ihre Ergebnisse in einem Wasserfalldiagramm dar (entsprechend den Darstellungen im Repetitorium).
- d) (4 Punkte) Bestimmen Sie für Sparte 1 den diskontierten Jahresschadenaufwand mit Wiederkehrperiode 5 Jahre. Tipp: Verwenden Sie alle drei Tabellen.
- e) (2 Punkte) Zeigen Sie die positive Homogenität des  $VaR_\alpha$ , d.h. dass für alle  $\alpha \in (0;1)$ , alle  $c > 0$  und alle Zufallsvariablen  $X$  gilt:  $VaR_\alpha(cX) = c \cdot VaR_\alpha(X)$ .
- f) (3 Punkte) Seien  $\alpha \in (0;1)$  und  $Y \geq 0$  eine stetige Zufallsvariable („Verlustgröße“) mit streng monotoner Verteilungsfunktion derart, dass  $RBC(-Y) := E(-Y) - VaR_\alpha(-Y) > 0$ . Ferner seien  $d > 0$ ,  $d' > 0$  sowie  $p$  und  $k$  reelle (deterministische) Zahlen. Zeigen Sie:

$$d > d' \Leftrightarrow RBC(p - k - Y \cdot d) > RBC(p - k - Y \cdot d')$$

Wie kann dieses Ergebnis im Hinblick auf das ökonomische versicherungstechnische Ergebnis interpretiert werden, wenn  $p$  die Prämie,  $k$  die Kosten und  $Y$  den nominellen Schadenaufwand einer Sparte bezeichnen?

- g) (5 Punkte) Die Sparten 1 und 2 sind hinsichtlich der Ergebnisse aus a) profitabel. Sind diese Sparten auch unter wertorientierten Gesichtspunkten („Value Based Management“) profitabel?

Verwenden Sie zur Beantwortung der Frage eine Risikodiskontrate i.H.v. 12%. Ferner benutzen Sie zur Beantwortung der Frage nur die Werte der Planung (Tabelle oben, also keine simulierten Mittelwerte) und das in Teil b) bestimmte Risikokapital vor Allokation.

**Tabelle A:** Realisationen (100 Pfade) des ökonomischen versicherungstechnischen Ergebnisses von Sparte 1, Sparte 2 und dem Gesamtergebnis (Sparte 1 und 2 zusammen)

ökon. Versicherungstechnisches Ergebnis				ökon. Versicherungstechnisches Ergebnis			
Pfad	Sparte 1	Sparte 2	Gesamt	Pfad	Sparte 1	Sparte 2	Gesamt
1	733	617	1.350	51	-2.109	-2.796	-4.905
2	4.924	3.906	8.830	52	4.818	2.439	7.257
3	4.373	-1.986	2.387	53	-26.012	-1.376	-27.387
4	1.937	668	2.605	54	2.541	4.886	7.427
5	4.410	-2.280	2.130	55	5.265	-936	4.330
6	7.529	4.863	12.393	56	3.374	1.422	4.796
7	6.022	3.416	9.438	57	636	-3.520	-2.884
8	3.424	3.339	6.763	58	5.993	5.325	11.318
9	4.833	555	5.388	59	-1.764	788	-976
10	-549	-557	-1.106	60	4.929	3.486	8.415
11	1.929	74	2.004	61	-403	-6.310	-6.713
12	1.261	5.728	6.989	62	4.450	383	4.833
13	5.251	1.963	7.214	63	4.894	2.046	6.940
14	5.067	578	5.645	64	7.099	2.539	9.638
15	-660	1.788	1.128	65	3.814	-952	2.862
16	-381	-4.355	-4.736	66	1.313	-1.845	-531
17	-2.688	852	-1.835	67	7.722	1.342	9.064
18	-14.313	-4.232	-18.545	68	2.904	-821	2.083
19	-3.633	2.277	-1.355	69	4.094	289	4.383
20	1.156	-3.199	-2.043	70	4.909	1.001	5.910
21	1.917	727	2.644	71	6.469	5.441	11.910
22	1.684	3.498	5.182	72	-1.043	-2.932	-3.975
23	2.665	2.502	5.167	73	4.868	1.512	6.380
24	5.154	2.436	7.590	74	2.424	1.908	4.332
25	74	1.140	1.214	75	2.985	447	3.432
26	-2.115	-2.636	-4.751	76	1.177	925	2.102
27	4.544	1.679	6.223	77	4.697	-735	3.962
28	-246	2.010	1.764	78	3.762	1.747	5.509
29	-16	1.675	1.659	79	-1.303	-825	-2.128
30	-1.249	-2.919	-4.169	80	8.551	711	9.262
31	-802	-1.611	-2.413	81	3.166	1.718	4.884
32	3.942	1.156	5.098	82	5.138	-1.845	3.293
33	2.200	1.372	3.572	83	3.796	2.133	5.929
34	628	1.314	1.942	84	-157	2.150	1.993
35	1.872	1.924	3.796	85	-3.157	2.128	-1.030
36	1.787	-2.652	-865	86	106	-2.604	-2.498
37	2.216	-944	1.272	87	-4.021	-2.887	-6.908
38	2.676	-55	2.621	88	165	1.265	1.430
39	-3.904	590	-3.314	89	4.746	781	5.527
40	3.254	2.418	5.672	90	141	3.122	3.263
41	-1.026	-3.499	-4.525	91	7.643	990	8.633
42	-4.676	-1.442	-6.118	92	-45.701	-1.024	-46.726
43	3.425	4.137	7.562	93	2.683	-986	1.697
44	3.531	535	4.066	94	6.035	2.422	8.456
45	-12.343	-6.911	-19.254	95	4.128	-1.158	2.970
46	4.213	5.315	9.528	96	-4.099	2.211	-1.888
47	5.923	331	6.254	97	-1.250	1.691	440
48	5.169	-2.874	2.295	98	4.533	4.040	8.573
49	-345	3.015	2.670	99	8.711	325	9.035
50	-1.549	-4.371	-5.920	100	2.564	1.108	3.672
Mittelwert	1.255	530	1.785				
Standardabw.	6.662	2.554	7.885				

**Tabelle B:** Die jeweiligen Ränge der Realisationen aus Tabelle A (aufsteigende Sortierung)

Pfad	Rang des vt. Ergebnis			Pfad	Rang des vt. Ergebnis		
	Sparte 1	Sparte 2	Gesamt		Sparte 1	Sparte 2	Gesamt
1	36	45	33	51	13	13	9
2	82	92	91	52	77	83	83
3	70	18	45	53	2	23	2
4	46	46	46	54	50	96	84
5	71	17	43	55	89	29	60
6	96	95	100	56	59	62	63
7	92	89	95	57	35	6	16
8	60	88	79	58	91	98	98
9	78	42	69	59	14	50	26
10	23	33	24	60	83	90	87
11	45	35	40	61	24	2	6
12	39	100	81	62	72	39	64
13	88	72	82	63	80	74	80
14	84	43	72	64	95	85	97
15	22	69	30	65	65	27	50
16	25	4	11	66	40	20	28
17	11	51	22	67	98	60	93
18	3	5	4	68	55	31	41
19	9	79	23	69	67	36	62
20	37	8	20	70	81	54	74
21	44	48	48	71	94	99	99
22	41	91	68	72	19	9	14
23	52	84	67	73	79	63	78
24	86	82	86	74	49	70	61
25	30	56	31	75	56	40	54
26	12	15	10	76	38	52	42
27	74	65	76	77	75	32	58
28	27	73	37	78	63	68	70
29	29	64	35	79	16	30	19
30	18	10	13	80	99	47	94
31	21	21	18	81	57	67	65
32	66	57	66	82	85	19	53
33	47	61	55	83	64	76	75
34	34	59	38	84	28	77	39
35	43	71	57	85	10	75	25
36	42	14	27	86	31	16	17
37	48	28	32	87	7	11	5
38	53	34	47	88	33	58	34
39	8	44	15	89	76	49	71
40	58	80	73	90	32	87	52
41	20	7	12	91	97	53	90
42	5	22	7	92	1	25	1
43	61	94	85	93	54	26	36
44	62	41	59	94	93	81	88
45	4	1	3	95	68	24	51
46	69	97	96	96	6	78	21
47	90	38	77	97	17	66	29
48	87	12	44	98	73	93	89
49	26	86	49	99	100	37	92
50	15	3	8	100	51	55	56

**Lösung:**

a) (3 Punkte) Die Schadenquoten, Kostenquoten und Combined Ratios ergeben sich zu:

	SQ	KQ	CR
Sparte 1	75%	15%	90%
Sparte 2	81%	17%	98%
Gesamt	79%	16%	95%

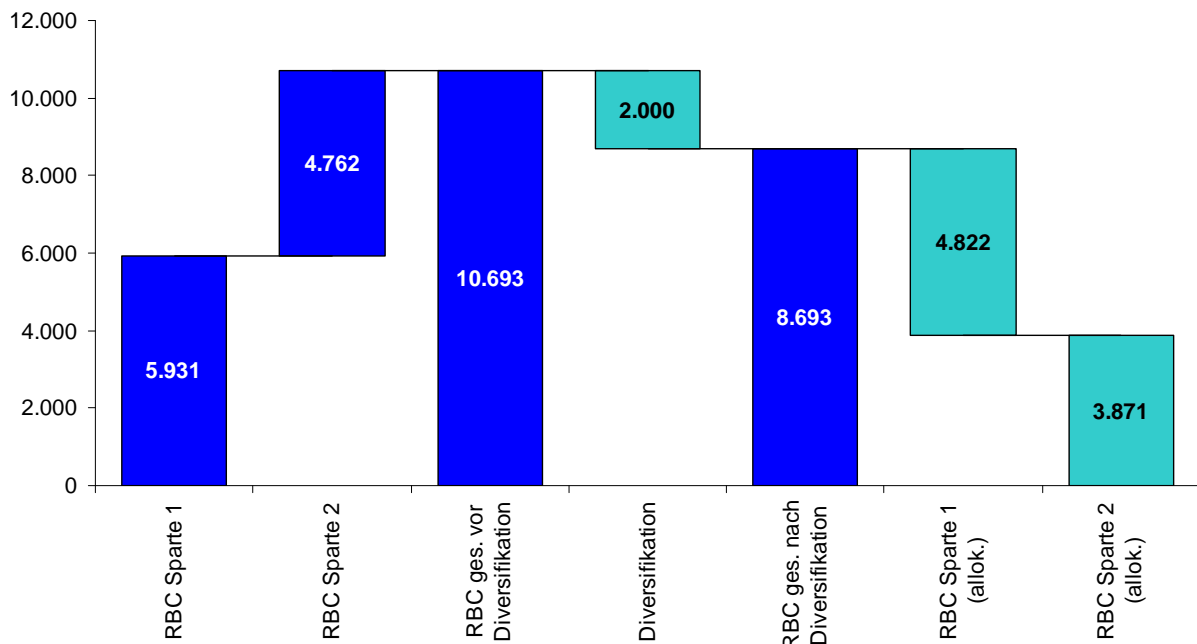
b) (3 Punkte) Der VaR zum Niveau 5% ist jeweils das 5-kleinste Simulationsergebnis. Das RBC ergibt sich resultierend als Differenzbetrag zum Mittelwert:

	Sparte 1	Sparte 2	Gesamt
VaR 5%	-4.676	-4.232	-6.908
Mittelwert	1.255	530	1.785
RBC	5.931	4.762	8.693

c) (5 Punkte) Der Diversifikationseffekt ergibt sich zu:  $(5.931+4.762) - 8.693 = 2.000$  bzw.  $2.000 / (5.931+4.762) = 18,7\%$ . Proportionale Allokation:

	Sparte 1	Sparte 2	Gesamt
Faktor	55,5%	44,5%	100%
RBC_allok	4.822	3.871	8.693

Wasserfall-Diagramm zur Veranschaulichung von Diversifikationseffekt und Allokation:



d) (4 Punkte) Es seien  $p=14.000$  die verdiente Prämie der Sparte 1 und  $k=2.100$  die Kosten der Sparte 1. Ferner bezeichne  $Y$  den stochastischen (diskontierten) Jahresgesamtschadenaufwand. Das ökonomische versicherungstechnische Ergebnis schreibt sich also als Zufallsvariable  $Erg = p - k - Y$ .

Für den Jahresschadenaufwand  $s$  mit Wiederkehrperiode 5 gilt also:

$$\frac{1}{5} = P(Y \geq s) = P(p - k - \text{Erg} \geq s) = P(\text{Erg} \leq p - k - s) = P(\text{Erg} \leq 11.900 - s)$$

Aus den Simulationen (Tabelle A und B) ist also für Sparte 1 dasjenige vt. Ergebnis zu suchen, bei welchem 20% aller Realisationen kleiner oder gleich diesem sind, bei 100 Pfaden also die 20.-kleinste Realisation. Dieses vt. Ergebnis liegt bei -1.026 (Pfad 41). Der gesuchte Jahresschadenaufwand mit Wiederkehrperiode 5 ergibt sich somit zu  $11.900 - s = -1.026$  bzw.  $s = 12.926$ .

e) (2 Punkte) Für alle  $\alpha \in (0;1)$ , alle  $c > 0$  und alle Zufallsvariablen  $X$  mit Verteilungsfunktion  $F$  gilt:

$$F_{cX}(x) = P(cX \leq x) = P\left(X \leq \frac{x}{c}\right) = F_X\left(\frac{x}{c}\right)$$

und damit

$$\text{VaR}_\alpha(cX) = \inf\{x \mid F_{cX}(x) \geq \alpha\} = \inf\{x \mid F_X\left(\frac{x}{c}\right) \geq \alpha\} = c \cdot \inf\{x \mid F_X(x) \geq \alpha\} = c \cdot \text{VaR}_\alpha(X).$$

f) (3 Punkte) Für das RBC der Zufallsvariablen  $p - k - Y \cdot d$  gilt wegen der Translationsinvarianz und der positiven Homogenität des VaR für reelle Zahlen  $p$  und  $k$  sowie für  $d > 0$ :

$$\begin{aligned} \text{RBC}(p - k - Y \cdot d) &= E(p - k - Y \cdot d) - \text{VaR}_\alpha(p - k - Y \cdot d) = (p - k + d \cdot E(-Y)) - (p - k + d \cdot \text{VaR}_\alpha(-Y)) \\ &= d \cdot (E(-Y) - \text{VaR}_\alpha(-Y)) = d \cdot \text{RBC}(-Y) \end{aligned}$$

Ebenso gilt:  $\text{RBC}(p - k - Y \cdot d') = d' \cdot \text{RBC}(-Y)$ . Zusammen mit  $\text{RBC}(-Y) > 0$  folgt dann:

$$d > d' \Leftrightarrow d \cdot \text{RBC}(-Y) > d' \cdot \text{RBC}(-Y) \Leftrightarrow \text{RBC}(p - k - Y \cdot d) > \text{RBC}(p - k - Y \cdot d').$$

Interpretation: Bei steigendem Zinsniveau (d.h. sinkendem Diskontfaktor) sinkt das Risikokapital der Sparte.

g) (5 Punkte) Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} \text{RORAC} &= \text{ökonom. vt Ergebnis} / \text{RBC} \\ \text{CoC} &= \text{RDR} \cdot \text{RBC} \\ \text{EVA} &= \text{ökonom. vt Ergebnis} - \text{CoC} \end{aligned}$$

ergibt sich die folgende wertorientierte Profitabilitätsrechnung:

	mittleres Ergebnis (aus der Planung)	RBC	CoC = RBC * 12%	EVA = mittleres Ergebnis - CoC	RORAC = mittleres Ergebnis / RBC
Sparte 1	1.400	5.931	712	688	23,6% > 12%
Sparte 2	520	4.762	571	-51	10,9% < 12%
Gesamt	1.920	8.693	1.043	877	22,1% > 12%

Vor Anwendung des Diversifikationseffektes ist also Sparte 1 profitabel, Sparte 2 ist nicht profitabel. In Summe ist das Geschäft profitabel. Zur Beantwortung der Aufgabe genügt die EVA- oder die RORAC-Berechnung.