DAV
DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Dr. Nora Gürtler
Prof. Dr. Claudia Cottin
Frank Schepers
Thomas Schmidt

Klausur 2011 zum DAV Grundwissen „Modellierung“

Hinweise:
- Die nachfolgenden Aufgaben sind alle zu bearbeiten (d.h. keine Wahlmöglichkeiten).
- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Insgesamt haben Sie 90 Minuten Zeit und können 90 Punkte erreichen.
- Zum Bestehen der Klausur sind 36 Punkte hinreichend.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1) Deterministischer Embedded Value / Überleitungsanalyse (20 Punkte)
Sie sind Aktuar der Lebensversicherungsgesellschaft Phantasia und haben das Glück, dass es in Ihrem Bestand von Kapitallebensversicherungen weder Sterblichkeit noch Storno gibt. Die Versicherungsnehmer sind nicht gewinnberechtigt und bezahlen lediglich noch einen jährlichen Kostenbeitrag in Höhe von € 50 (nachschüssig am Jahresende). Die bislang aufgebaute Deckungsrückstellung (ohne Diskontierung) verbleibt bis zum Ablauf nach 5 Jahren bei konstant € 1000, welche nach Ablauf komplett als Leistung ausgezahlt werden. Kapitalbindungskosten können vernachlässigt werden. Eventuelle Gewinne oder Verluste werden jeweils zum Ende eines Jahres ausgeschüttet bzw. ausgeglichen, und es ist kein Eigenkapital vorhanden.

Es werden weiterhin die folgenden Annahmen getroffen:

Nettoverzinsung:	1% pro Jahr
Kosten:	Fixkosten von € 30 pro Jahr (nachschüssig am Jahresende)
Risikodiskontrate:	0%

a) (6 Punkte) Bestimmen Sie den Embedded Value zu t=0. Geben Sie auch kurz den Rechenweg an.

b) (14 Punkte) Sie müssen nun am Ende des aktuellen Jahres eine Überleitungsanalyse erstellen und den Embedded Value neu berechnen. Berücksichtigen Sie folgende Punkte in der Überleitungsanalyse:

- Sie haben im zurückliegenden Jahr Kapitalerträge in Höhe von € 15 erzielt, und generell hat sich das Kapitalmarktumfeld verbessert. Sie erwarten zukünftig nun eine Nettoverzinsung von 2%.

- Sie haben ein Kostensparprogramm durchgeführt, welches die Kosten im abgelaufenen Jahr auf € 40 anstiegen ließ und gemäß Ihrer Erwartung in den nächsten Jahren zu niedrigeren Kosten von dann nur noch € 25 führen wird.

Befüllen Sie die als Anlage vorhandene Tabelle zur Überleitungsanalyse und erläutern Sie kurz die Berechnungen.

Vorlage Überleitungsanalyse

	Net Asset Value	Cost of Capital	Bestandswert	Embedded Value	Erläuterungen / Annahmen
Startwert zum 1.1.		**0**			
Expected Return					
Abweichung des tatsächlichen Gewinns von der Planung (ohne Kapitalmarkt)					
Änderung zukünftiger Annahmen (ohne Kapitalmarkt)					
Neugeschäft					
Einfluss Kapitalmarkt auf aktuellen Gewinn					
Änderung zukünftiger Kapitalmarktannahmen					
Dividenden					
Endwert zum 31.12.		**0**			

Lösung:

a) (6 Punkte) Der Embedded Value ("EV") berechnet sich als Net Asset Value ("NAV") abzüglich Kapitalkosten („Cost of Capital", "CoC") und zuzüglich dem Bestandswert („Present Value of Future Profits", "PVFP"):

$$EV(0) = NAV(0) - CoC(0) + PVFP(0)$$

Hierbei ist der NAV das "adjustierte" Eigenkapital und somit gemäß Aufgabenstellung NAV(0) = 0. Ebenso ist gemäß Aufgabenstellung CoC(0) = 0. Für den PVFP gilt (bei einer Risikodiskontrate von rdr = 0%):

$$PVFP(0) = \sum_{t=1}^{5} J\ddot{U}(t).$$

Damit folgt (alle Wertangaben in €):

$$\begin{aligned} J\ddot{U}(t) &= \text{Kostenbeiträge}(t) + \text{Kapitalerträge}(t) - \text{Kosten}(t) \\ &= 50 + 1\% * 1000 - 30 \\ &= 30 \end{aligned}$$

für alle t=1,…,5 und somit

$$PVFP(0) = 5 * 30 = 150.$$

b) (14 Punkte) <u>Überleitungsanalyse mit Erklärung:</u>

	Net Asset Value	Cost of Capital	Bestandswert	Embedded Value	Erläuterungen / Annahmen
Startwert zum 1.1.	**0**	**0**	**150.00**	**150.00**	
Expected Return	30		-30	0	Umbuchung des erstjährigen Gewinns vom Bestandswert in das Eigenkapital
Abweichung des tatsächlichen Gewinns von der Planung (ohne Kapitalmarkt)	-10			-10	Kostensparprogramm mindert den Gewinn der Periode und somit das EK
Änderung zukünftiger Annahmen (ohne Kapitalmarkt)			20.00	20.00	Anpassung der Kostenannahmen mit Effekt auf zukünftige Gewinne
Neugeschäft					Kein Neugeschäft
Einfluss Kapitalmarkt auf aktuellen Gewinn	5			5.00	Die Kapitalerträge waren höher als erwartet (15 gegenüber 10) und erhöhen das EK
Änderung zukünftiger Kapitalmarktannahmen			40.00	40.00	Anpassung der Nettoverzinsung von 1% auf 2%, mit Effekt auf zukünftige Gewinne
Dividenden	-25			-25.00	Der Jahresgewinn wird an den Aktionär ausgeschüttet
Endwert zum 31.12.	**0**	**0**	**180.00**	**180.00**	

<u>Entwicklung des NAV:</u>

Im ersten Schritt werden die im letzten Jahr erwarteten Gewinne vom PVFP abgezogen und in das Eigenkapital überführt.

Des Weiteren wird in zwei Schritten der Effekt der Abweichungen des tatsächlichen Ergebnisses vom erwarteten Ergebnis auf das Eigenkapital ermittelt und in der Tabelle eingetragen. Im ersten Schritt wird die Abweichung der tatsächlichen von den erwarteten versicherungstechnischen Ergebnissen dargestellt und im zweiten die Abweichung der tatsächlichen von den erwarteten Kapitalmarkteinkünften.

Im letzten Schritt wird dann noch eine Dividende abgezogen, da laut Aufgabenstellung davon ausgegangen wird, dass der Aktionär das Jahresergebnis erhalten wird.

<u>Entwicklung des PVFP:</u>
Der finale PVFP berechnet sich analog zu a), allerdings mit Laufindex t=1,…,4 und nach Anpassung der Annahmen.

Die Anpassung der Annahmen erfolgt in zwei Schritten. Im ersten Schritt werden nur die Kostenannahmen angepasst und im zweiten Schritt dann auch noch die Kapitalertragsannahmen. Somit wird der Effekt der Annahmenänderungen getrennt abgebildet:

i) Der PVFP nach Kostenannahmenänderung berechnet sich somit mit den Jahresüberschüssen

JÜ("nach Kostenänderung", t) = 50 + 1% * 1000 – 25,   für alle t=1, …, 4

und somit

PVFP("nach Kostenänderung") = 4 * 35 = 140.

Nach Abzug des "Expected Return" beträgt der

PVFP("nach Expected Return") = 120.

Damit ergibt sich eine Änderung von +20 aus der Kostenannahmenänderung.

ii) Der PVFP nach Änderung der Kapitalertragsannahmen berechnet sich mit den Jahresüberschüssen

JÜ("neue Kapitalertragsannahmen", t) = 50 + 2% * 1000 – 25,   für alle t=1, …, 4

und somit

PVFP("neue Kapitalertragsannahmen") = 4 * 45 = 180

Damit ergibt sich eine Änderung von +40 gegenüber dem PVFP("nach Kostenänderung").

Aufgabe 2) Stochastischer Embedded Value (25 Punkte)
Zum Zeitpunkt j=0 sei ein Lebensversicherungsbestand (pro Vertrag) wie folgt charakterisiert:

- Eigenkapital = 0;
- Deckungsrückstellung in Höhe von € 1.000;
- Kapitalanlagen mit Buchwert = Marktwert in Höhe von € 1.000.

Nach einem Jahr, in j=1, muss mindestens eine Leistung von € 1.020 an den Kunden ausgezahlt werden, danach sind alle Verträge beendet. Sofern der Kapitalertrag € 20 übersteigt, müssen 90% des darüber hinausgehenden Betrags ebenfalls dem Kunden gut geschrieben werden.

Sie sollen den stochastischen Embedded Value zum Zeitpunkt j=0 bestimmen, wobei angenommen wird, dass der zufallsbehaftete jährliche prozentuale Kapitalertrag X des Portfolios gleichverteilt im Intervall [0%,6%] ist.

Kosten (auch Kapitalkosten), Storno, Sterblichkeit und Steuern sollen zur Vereinfachung vernachlässigt werden.

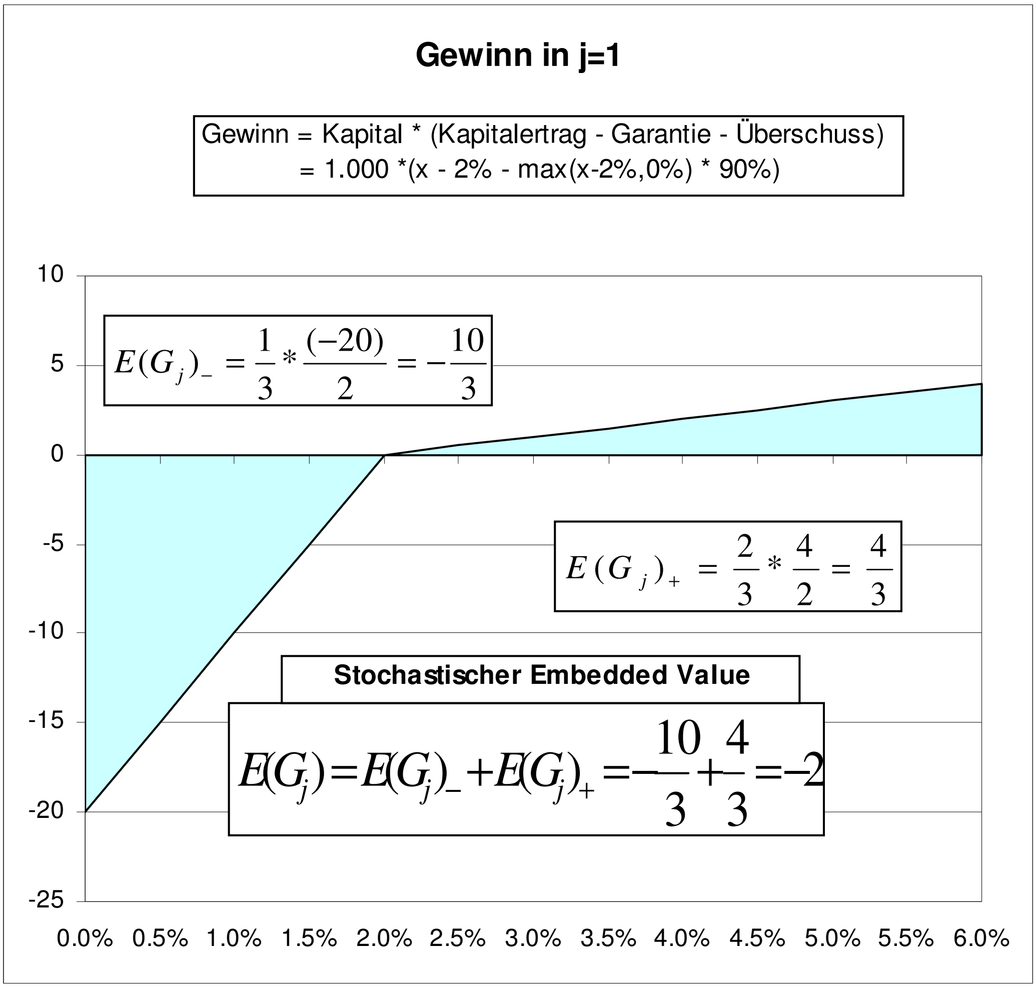
a) (4 Punkte) Skizzieren Sie die den Gewinn (Future Profit) FP = FP(x), der sich für das Unternehmen pro Vertrag für die einzelnen Realisationen des Kapitalertrags X ergibt, als Funktion von $x \in [0\%,6\%]$.

b) (6 Punkte) Bestimmen Sie bei einer Risikodiskontrate von 0% den stochastischen Embedded Value als Erwartungswert des Bestandswertes („Present Value of Future Profits“, “PVFP”) in j=0.

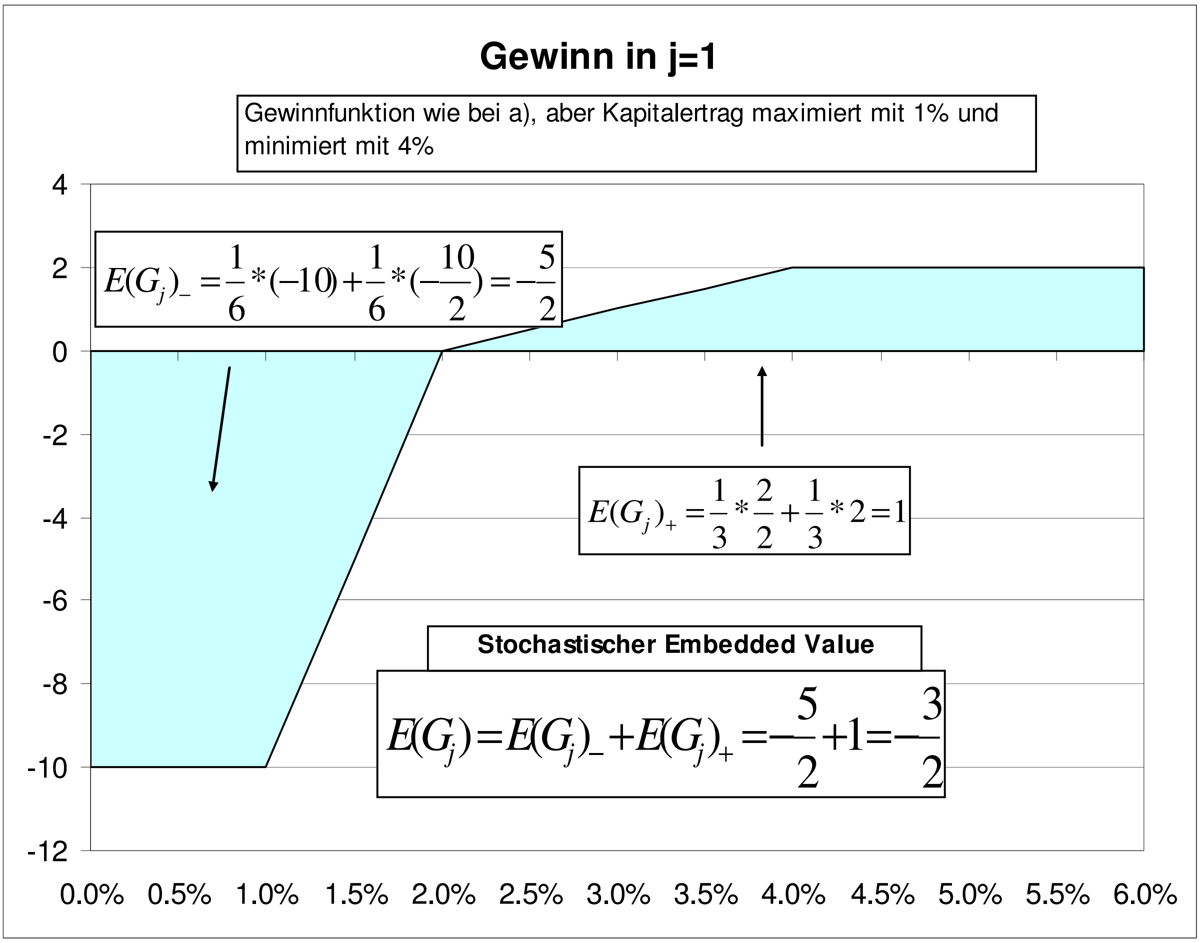
c) (9 Punkte) Wie ändern sich das Schaubild und der stochastische Embedded Value, falls eine Absicherung gekauft wird, welche bei Unterschreiten eines Kapitalertrags von 1% den Minderbetrag unterhalb dieser Grenze ausgleicht? Als Kompensation für die Absicherung nach unten wird der Ertrag oberhalb von 4% abgegeben.

d) (6 Punkte) Welche Maßnahmen können und sollten Lebensversicherer in der Realität ergreifen, um das Auftreten negativer Jahresüberschüsse zu verhindern? Nennen Sie mindestens 3 Punkte und beschreiben Sie jeweils kurz deren Wirkung.

Lösung:
a+b) (10 Punkte)



c) (9 Punkte)



d) (6 Punkte) Lebensversicherer müssen die Volatilität der Kapitalanlage verringern, um negative Ergebnisse möglichst auszuschließen. Dieses geschieht in der Praxis primär über die Anlage in festverzinsliche Titel, welche im Anlagevermögen gehalten werden, um über die Bilanzierung Marktbewegungen zu glätten.

Weitere Möglichkeiten sind z.B.

- die Investition in Aktien- oder Zinsabsicherungen durch Puts und Swaptions und
- die Anwendung von dynamischen, die Risikotragfähigkeit des Unternehmens berücksichtigenden, Investmentstrategien.
- Des Weiteren haben Unternehmen die Möglichkeit, für bestimmte Anlagen den §341b HGB anzuwenden, um Abschreibungen aufzuschieben und bestenfalls zu vermeiden.

Zudem werden Puffer wie die freie RfB oder Bewertungsreserven aufgebaut, welche negative Ergebnisse kompensieren können. Diese können benutzt werden, um drohende Aktionärseinschüsse durch Realisation außerordentlicher Gewinne oder, falls ein Unternehmen den §56a VAG anwenden kann, durch Zugriff auf RfB-Mittel und/oder den Schlussgewinnfonds zu verhindern.

Aufgabe 3) Stochastische Modellierung von Schäden (25 Punkte)

Ein Kompositversicherer verfügt für eine Sparte über Schadenerfahrungen der Jahre 2001-2010 für Basisschäden und Großschäden. Die folgende Tabelle enthält den gesamten Schadenaufwand, den Schadenaufwand aus Basisschäden und den Aufwand aus Großschäden (abgewickelte Schadenaufwände aller einzelnen Großschäden >1,35 Mio. € sowie den gesamten Aufwand aus Großschäden pro Jahr). Alle Angaben sind bereits inflationsbereinigt. Alle Werte sind in Mio. € angegeben. Gehen Sie von konstantem Exposure aus.

	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	Schätzer für Erwartungswert	Schätzer für Standardabweichung
Großschadenanzahl	2	2	3	4	2	3	2	4	3	4	2,9	0,88
Großschäden pro Jahr	1,37	2,28	2,07	3,07	3,67	2,08	2,04	1,96	2,02	4,32		
(Aufwand)	1,37	2,09	3,17	1,35	1,87	1,68	3,55	1,78	2,67	1,81		
			1,65	1,49		1,57		1,77	1,38	1,57		
				1,39				1,61		1,38		
Aufwand aus Großschäden	2,74	4,37	6,89	7,3	5,54	5,33	5,59	7,12	6,07	9,08	6,00	1,74
Aufwand aus Basisschäden	56,38	62,99	57,5	60,09	61	64,65	70,63	62,6	57,31	59,43	61,26	4,25
Gesamter Schadenaufwand	59,12	67,36	64,39	67,39	66,54	69,98	76,22	69,72	63,38	68,51	67,26	4,54

Sie sollen als Mitglied des Schadenaktuariats die Basis- und Großschäden der vorliegenden Sparte modellieren und dabei die folgenden Verteilungen verwenden:

- Gammaverteilung $\Gamma(\alpha,\beta)$ mit Dichte $f(x)=\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\,x^{\alpha-1}\,e^{-\beta x}\;,x>0$ und Momenten $E(X)=\dfrac{\alpha}{\beta};\quad Var(X)=\dfrac{\alpha}{\beta^2}$.
- Paretoverteilung Par(λ,α) mit Verteilungsfunktion $F(x)=1-\left(\dfrac{\lambda}{x}\right)^{\alpha}\;,x>\lambda,\;(F(x)=0\;,x\le\lambda)$ sowie Momenten $E(X)=\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\lambda;\quad Var(X)=\dfrac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ für $\alpha>1$ bzw. $\alpha>2$.
- Poissonverteilung Po(η) mit Zähldichte $P(N=k)=e^{-\eta}\dfrac{\eta^k}{k!}$ (k=0,1,2,…) und Momenten $E(N)=Var(N)=\eta$.

a) (2 Punkte) Nach welchen Kriterien wählen Sie grundsätzlich die Großschadengrenze?

Im Folgenden gehen wir von der Großschadengrenze 1,35 Mio. € und der in der obigen Tabelle angegebenen Unterteilung in Basis- und Großschäden aus. **Bitte beachten Sie für die folgenden Aufgabenteile die weiter unten stehenden Informationen aus dem Aktuariat!**

b) (6 Punkte) Modellieren Sie die Basisschäden, indem Sie eine Gammaverteilung mittels der Momentenmethode an den Schadenaufwand pro Jahr aus Basisschäden anpassen.

1. Berechnen Sie die Parameter α und β der an die Daten angepassten Gammaverteilung.
2. Bestimmen Sie den zugehörigen VaR zum Niveau 99,5% und das zugehörige Risikokapital.

c) (3 Punkte) Modellieren Sie die Anzahl der Großschäden pro Jahr mit einer Poissonverteilung. Welchen Wert sollte man für deren Parameter η wählen? Wieso ist die Poissonverteilung für die vorliegenden Schadendaten eventuell nicht so gut geeignet? Diskutieren Sie Alternativen.

d) (6 Punkte) Die Höhe der Großschäden wird mittels einer Paretoverteilung mit Großschadengrenze λ=1,35 und charakteristischem Index α modelliert, welcher nach der Maximum-Likelihood-Methode ermittelt wird. Geben Sie diesen für die an die Daten angepasste Paretoverteilung an. Berechnen Sie ferner die erwartete Großschadenhöhe und den VaR zum Niveau 99,5%.

e) (2 Punkte) Berechnen Sie den erwarteten Schadenaufwand der Großschäden unter dem kollektiven Modell der Risikotheorie mit den in c) und d) ermittelten Parametern.

f) (2 Punkte) Berechnen Sie den unter dem Modell erwarteten Gesamtschadenaufwand. Diskutieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf den in der Tabelle angegebenen - empirisch berechneten - erwarteten Gesamtschadenaufwand.

g) (4 Punkte) Angenommen, es läge in der Vergangenheit kein konstantes Exposure (z.B. Anzahl der Jahreseinheiten in Kraftfahrt) vor. Wie könnten Sie das Vorgehen bei der Modellierung sinnvoll modifizieren?

<u>Informationen aus dem Aktuariat:</u>
Mit „ln" sei der natürliche Logarithmus zur Basis *e* bezeichnet. Dann ist der Hill-Schätzer gegeben durch:

$$\hat{\alpha}_i := \left[\frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} \ln \frac{x_{(j)}}{x_{(i)}} \right]^{-1}$$

Das Schadenaktuariat des Versicherers hat die folgenden Informationen zur angegebenen Datenlage zusammengestellt:

Nr. i der Großschäden	Großschaden $x_{(i)}$	$\hat{\alpha}_i$	Nr. i der Großschäden	Großschaden $x_{(i)}$	$\hat{\alpha}_i$	Nr. i der Großschäden	Großschaden $x_{(i)}$	$\hat{\alpha}_i$
1	4.32	n/a	11	2.04	3.46	21	1.57	2.90
2	3.67	12.27	12	2.02	3.65	22	1.57	3.04
3	3.55	13.07	13	1.96	3.56	23	1.49	2.74
4	3.17	7.03	14	1.87	3.29	24	1.39	2.40
5	3.07	7.17	15	1.81	3.18	25	1.38	2.46
6	2.67	4.30	16	1.78	3.22	26	1.38	2.56
7	2.28	2.99	17	1.77	3.36	27	1.37	2.61
8	2.09	2.71	18	1.68	3.03	28	1.37	2.71
9	2.08	3.01	19	1.65	3.03	29	1.35	2.69
10	2.07	3.30	20	1.61	2.97			

Darüber hinaus kennen Sie die folgenden Quantile unterschiedlich parametrisierter, gammaverteilter Zufallsvariablen:

Quantil	$\Gamma(207{,}77; 3{,}39)$	$\Gamma(219{,}51; 3{,}26)$	$\Gamma(238{,}77; 3{,}14)$
80,00%	64,81	71,13	80,15
89,00%	66,52	72,96	82,13
92,50%	67,48	73,98	83,24
95,00%	68,41	74,98	84,31
96,00%	68,90	75,50	84,87
97,00%	69,50	76,14	85,56
97,50%	69,87	76,53	85,98
99,00%	71,58	78,36	87,96
99,25%	72,08	78,89	88,53
99,50%	72,76	79,62	89,31
99,75%	73,87	80,80	90,59
99,95%	76,22	83,30	93,28
99,99%	78,34	85,56	95,72

Lösung:

a) (2 Punkte) Ein Indikator für die Wahl der Großschadengrenze ist der Punkt, an dem der Hill-Schätzer keinen größeren Schwankungen mehr unterliegt. Ebenfalls sollte die Verteilungsgüte für die gewählte Großschadengrenze sichergestellt sein. Des Weiteren spielen Überlegungen z.B. zur Ausgestaltung der Rückversicherung eine Rolle. Eine weitere Nebenbedingung ist durch die Verfügbarkeit der Einzelschadendaten gegeben.

b) (6 Punkte) Aus $E(X) = \dfrac{\alpha}{\beta}$; $Var(X) = \dfrac{\alpha}{\beta^2}$ erhält man durch Auflösen nach α und β

$$\alpha = \frac{(E(X))^2}{Var(X)}, \quad \beta = \frac{E(X)}{Var(X)}$$

und damit

$$\alpha = 207{,}77 \quad \text{und} \quad \beta = 3{,}39.$$

Für diese Werte von α und β erhält man aus der ersten Spalte der in der Aufgabenstellung angegebenen Tabelle den VaR für das 200-Jahresereignis, d.h. das 99,5%-Quantil, in Höhe von 72,76. Das zugehörige Risikokapital ergibt sich durch Differenzbildung mit dem Mittelwert zu 11,5.

c) (3 Punkte) Der Wert η der angepassten Poissonverteilung entspricht dem Mittelwert der Anzahl der Großschäden, d.h. 2,90. Bei Poissonverteilungen stimmen Erwartungswert und Varianz überein. Da in diesem Fall die Varianz in Höhe von 0,77 deutlich kleiner als der Erwartungswert ist, wäre eine binomialverteilte Schadenanzahl eine Alternative. Andererseits hat diese einen beschränkten Träger.

d) (6 Punkte) Den charakteristischen Index der an Großschäden über einer bestimmten Grenze angepassten Paretoverteilung liest man in der zweiten Tabelle aus der Aufgabenstellung ab (2,69 zur Grenze 1,35 Mio.).

Der Erwartungswert der Schadenhöhe ist gegeben durch $E(X) = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}\lambda$ mit $\lambda = 1{,}35$ und $\alpha = 2{,}69$, also $E(X) = \dfrac{2{,}69}{2{,}69 - 1} \cdot 1{,}35 = 2{,}15$.

Das p-Quantil x einer Paretoverteilung ist für $p \in [0,1)$ gegeben durch

$$p = 1 - \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\lambda}{(1-p)^{1/\alpha}} \quad .$$

Für das 99,5%-Quantil und die Parameter $\lambda = 1{,}35$ und $\alpha = 2{,}69$ ergibt sich

$$x \quad = \quad \frac{1{,}35}{(1 - 0{,}995)^{1/2{,}69}} \quad = \quad 9{,}68\,.$$

e) (2 Punkte) Der Gesamtaufwand S aus Großschäden ist gemäß dem kollektiven Modell der Risikotheorie gegeben durch

$$ES = EN \cdot EX = 2{,}90 \cdot 2{,}15 = 6{,}23 > 6{,}00.$$

Aufgrund der Schiefe der Paretoverteilung liegt dieser Wert leicht über dem Mittelwert der Daten (6,01). Da wir hier Großschäden modellieren, ist das Ergebnis plausibel.

f) (2 Punkte) Der erwartete Gesamtschadenaufwand ergibt sich zu

$$67{,}49 = 61{,}26 + 6{,}23 \; > \; 67{,}26.$$

Der Unterschied erklärt sich in der Verwendung der Maximum-Likelihood-Methode zur Modellierung der Großschadenhöhe, die empirische Erwartungswerte nicht reproduziert.

g) (4 Punkte) Um den Einfluss von Bestandsveränderungen im Laufe der Zeit zu berücksichtigen, sollten anstelle der absoluten Schadenanzahl und des Basisschadenaufwands besser volumenbezogene Größen wie der Schadenbedarf betrachtet werden. Z.B. können die Größen Schadenfrequenz und (Basis-)Schadendurchschnitt modelliert werden. Diese sind auf das Exposure des zu simulierenden Jahres anzuwenden. Des Weiteren sollte man analysieren, ob die Bestandsveränderungen einhergehen mit einer veränderten Zeichnungspolitik und ob sich daraus die Notwendigkeit für Adjustierungen bei den Schätzwerten ergibt.

Aufgabe 4) Monte-Carlo-Simulation von Schäden (20 Punkte)
Ein Kollege von Ihnen hat für den Schadenaufwand eines Segments die folgenden Verteilungen angepasst:

1. Basisschadenaufwand (in Mio. €) B:
   B ist lognormalverteilt mit den Parametern m=4,3742 und s^2=0,0155.
2. Großschadenanzahlverteilung N:
   N ist binomialverteilt Bin(n;p) mit den Parametern n=4 und p=0,25.
3. Großschadenhöhenverteilung (in Mio. €) H:
   H ist normalverteilt mit den Parametern μ=5,9 und σ^2=2,89.

Für die Zähldichte $g(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ der Binomialverteilung Bin(4;0,25) hat Ihr Kollege die folgende Tabelle ermittelt:

k	$g(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$G(k):=P(N\leq k)=\sum_{i=0}^{k} g(i)$
0	*0,3164*	*0,3164*
1	*0,4219*	*0,7383*
2	*0,2109*	*0,9492*
3	*0,0469*	*0,9961*
4	*0,0039*	*1,0000*

a) (4 Punkte) Die Verteilungsfunktion der Lognormalverteilung (also von B) lautet $F(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x)-m}{s}\right)$. Dabei bezeichnet Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung (Tabelle s.u.). Wie groß ist das 99,5%-Quantil von B?

b) (3 Punkte) Die Parameter m und s^2 einer lognormalverteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert E und Standardabweichung Std erfüllen das Gleichungssystem

$$m = \ln(E) - \frac{s^2}{2} \qquad \text{und} \qquad s^2 = \ln\left(\frac{Std^2}{E^2} + 1\right).$$

Wie lauten der Erwartungswert und die Standardabweichung der Basisschadenverteilung B?

c) (1 Punkt) Wie lautet der Erwartungswert der Großschadenanzahlverteilung N?

d) (3 Punkte) Diskutieren Sie die Schadenmodellierung Ihres Kollegen im Hinblick auf die angesetzten Verteilungen.

e) (3 Punkte) Ihr Kollege behauptet, er habe mittels einer von ihm durchgeführten Monte-Carlo-Simulation mit 100.000 Pfaden den Mittelwert des Gesamtschadenaufwands zu 97,8 Mio. € bestimmt. Diskutieren Sie diese Aussage! Halten Sie dieses Ergebnis für plausibel?

f) (6 Punkte) Sie wollen eine Monte-Carlo-Simulation durchführen und ermitteln hierzu unter anderem die Ergebnisse des Simulationspfades mit der Nummer 1742, indem Sie zunächst mehrere auf (0;1) gleichverteilte Zufallsvariablen simulieren. Die so generierten, näherungsweise U(0;1)-verteilten Pseudozufallszahlen sind in der folgenden Tabelle angegeben, der Pfad 1742 ist hervorgehoben:

Simulationspfad	**für B**	**für N**	**für H**					
…								
1741	0,5277	0,6999	0,3806	0,5615	0,2625	0,7861	0,8161	…
1742	**0,3821**	**0,7062**	**0,8810**	**0,1189**	**0,0298**	**0,5455**	**0,3221**	**…**
1743	0,3393	0,7633	0,2751	0,4187	0,5748	0,3619	0,6020	…
1744	0,5748	0,7659	0,0512	0,9532	0,9495	0,8296	0,4205	…
…								

Wie lauten die Realisationen von B, N und H unter Verwendung der Inversionsmethode für den Pfad 1742? Wie hoch ist der Gesamtschaden in diesem Pfad?

Hinweise für f):

- Es genügt, für H nur eine Realisation auszurechnen.
- Aufgrund der Symmetrie der Standardnormalverteilung gilt: $\Phi^{-1}(1-p) = -\Phi^{-1}(p)$.
- Da H normalverteilt ist, ist $\frac{H-\mu}{\sigma}$ standardnormalverteilt.

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung:

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,500000	1,00	0,841345	2,00	0,977250	3,00	0,998650
0,02	0,507978	1,02	0,846136	2,02	0,978308	3,02	0,998736
0,04	0,515953	1,04	0,850830	2,04	0,979325	3,04	0,998817
0,06	0,523922	1,06	0,855428	2,06	0,980301	3,06	0,998893
0,08	0,531881	1,08	0,859929	2,08	0,981237	3,08	0,998965
0,10	0,539828	1,10	0,864334	2,10	0,982136	3,10	0,999032
0,12	0,547758	1,12	0,868643	2,12	0,982997	3,12	0,999096
0,14	0,555670	1,14	0,872857	2,14	0,983823	3,14	0,999155
0,16	0,563559	1,16	0,876976	2,16	0,984614	3,16	0,999211
0,18	0,571424	1,18	0,881000	2,18	0,985371	3,18	0,999264
0,20	0,579260	1,20	0,884930	2,20	0,986097	3,20	0,999313
0,22	0,587064	1,22	0,888768	2,22	0,986791	3,22	0,999359
0,24	0,594835	1,24	0,892512	2,24	0,987455	3,24	0,999402
0,26	0,602568	1,26	0,896165	2,26	0,988089	3,26	0,999443
0,28	0,610261	1,28	0,899727	2,28	0,988696	3,28	0,999481
0,30	0,617911	1,30	0,903200	2,30	0,989276	3,30	0,999517
0,32	0,625516	1,32	0,906582	2,32	0,989830	3,32	0,999550
0,34	0,633072	1,34	0,909877	2,34	0,990358	3,34	0,999581
0,36	0,640576	1,36	0,913085	2,36	0,990863	3,36	0,999610
0,38	0,648027	1,38	0,916207	2,38	0,991344	3,38	0,999638
0,40	0,655422	1,40	0,919243	2,40	0,991802	3,40	0,999663
0,42	0,662757	1,42	0,922196	2,42	0,992240	3,42	0,999687
0,44	0,670031	1,44	0,925066	2,44	0,992656	3,44	0,999709
0,46	0,677242	1,46	0,927855	2,46	0,993053	3,46	0,999730
0,48	0,684386	1,48	0,930563	2,48	0,993431	3,48	0,999749
0,50	0,691462	1,50	0,933193	2,50	0,993790	3,50	0,999767
0,52	0,698468	1,52	0,935745	2,52	0,994132	3,52	0,999784
0,54	0,705401	1,54	0,938220	2,54	0,994457	3,54	0,999800
0,56	0,712260	1,56	0,940620	2,56	0,994766	3,56	0,999815
0,58	0,719043	1,58	0,942947	2,58	0,995060	3,58	0,999828
0,60	0,725747	1,60	0,945201	2,60	0,995339	3,60	0,999841
0,62	0,732371	1,62	0,947384	2,62	0,995604	3,62	0,999853
0,64	0,738914	1,64	0,949497	2,64	0,995855	3,64	0,999864
0,66	0,745373	1,66	0,951543	2,66	0,996093	3,66	0,999874
0,68	0,751748	1,68	0,953521	2,68	0,996319	3,68	0,999883
0,70	0,758036	1,70	0,955435	2,70	0,996533	3,70	0,999892
0,72	0,764238	1,72	0,957284	2,72	0,996736	3,72	0,999900
0,74	0,770350	1,74	0,959070	2,74	0,996928	3,74	0,999908
0,76	0,776373	1,76	0,960796	2,76	0,997110	3,76	0,999915
0,78	0,782305	1,78	0,962462	2,78	0,997282	3,78	0,999922
0,80	0,788145	1,80	0,964070	2,80	0,997445	3,80	0,999928
0,82	0,793892	1,82	0,965620	2,82	0,997599	3,82	0,999933
0,84	0,799546	1,84	0,967116	2,84	0,997744	3,84	0,999938
0,86	0,805105	1,86	0,968557	2,86	0,997882	3,86	0,999943
0,88	0,810570	1,88	0,969946	2,88	0,998012	3,88	0,999948
0,90	0,815940	1,90	0,971283	2,90	0,998134	3,90	0,999952
0,92	0,821214	1,92	0,972571	2,92	0,998250	3,92	0,999956
0,94	0,826391	1,94	0,973810	2,94	0,998359	3,94	0,999959
0,96	0,831472	1,96	0,975002	2,96	0,998462	3,96	0,999963
0,98	0,836457	1,98	0,976148	2,98	0,998559	3,98	0,999966
1,00	0,841345	2,00	0,977250	3,00	0,998650	4,00	0,999968

Lösung:

a) (4 Punkte) Es gilt: $F(x) = y \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\ln(x) - m}{s}\right) = y \Leftrightarrow x = \exp(s \cdot \Phi^{-1}(y) + m)$. Die Quantilsfunktion von B lautet also $F^{-1}(y) = \exp(s \cdot \Phi^{-1}(y) + m)$. Damit ergibt sich laut Tabelle das 99,5%-Quantil von B (ungefähr) zu $F^{-1}(0{,}995) = \exp(\sqrt{0{,}0155} \cdot 2{,}58 + 4{,}3742) = 109{,}44$ Mio. €.

b) (3 Punkte) Löst man das Gleichungssystem nach E und Std auf, erhält man

$$E = \exp(m + \frac{s^2}{2}) \qquad \text{und} \qquad .\,Std = \exp(m + \frac{s^2}{2}) \cdot \sqrt{\exp(s^2) - 1}$$

Der Erwartungswert und die Standardabweichung von B berechnen sich zu

$$E(B) = \exp(4{,}3742 + \frac{0{,}0155}{2}) = 79{,}9939$$

und

$$Std(B) = \exp\left(4{,}3742 + \frac{0{,}0155}{2}\right) \cdot \sqrt{\exp(0{,}0155) - 1} = 9{,}9979\,.$$

c) (1 Punkt) Der Erwartungswert der Schadenanzahl bestimmt sich zu $E(N) = n \cdot p = 1$. Dies erhält man auch durch Bilden der gewichteten Summe über die einzelnen Werte der Zähldichte.

d) (3 Punkte) Es erscheint sehr ungewöhnlich, die Großschadenhöhen mittels Normalverteilung zu modellieren. Zum einen generiert diese Verteilung negative Werte, zum anderen ist ihr Tail relativ schwach. Außerdem könnte man die Modellierung der Großschadenanzahl mittels Binomialverteilung kritisch hinterfragen (beschränkter Träger!).

e) (3 Punkte) Der rechnerische Erwartungswert des Gesamtschadenaufwands ergibt sich zu 79,9939+1*5,9=85,8939. Aus diesem Grund hat Ihr Kollege möglicherweise einen Fehler begangen. Seine Behauptung erscheint fragwürdig.

f) (6 Punkte) Die gesuchten Realisationen ergeben sich zu:

- Basisschäden:

  $F^{-1}(0{,}3821) = \exp(s \cdot \Phi^{-1}(0{,}3821) + m) = \exp(-s \cdot \Phi^{-1}(1 - 0{,}3821) + m)$ bzw.

  $F^{-1}(0{,}3821) = 76{,}4663$.
- Schadenanzahl (laut Tabelle): 1 (da 0,3164 ≤ 0,7062 ≤ 0,7383).
- Schadenhöhe (es ist ein Großschaden zu ermitteln): Bezeichnet D die Verteilungsfunktion von H, so gilt nach Hinweis:

  $$D(x) = P(H \le x) = P\left(\frac{H - \mu}{\sigma} \le \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

  Damit folgt für die Quantilsfunktion von H: $D^{-1}(y) = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(y)$, und es ist $D^{-1}(0{,}8810) = 5{,}9 + 1{,}7 \cdot 1{,}18 = 7{,}906$
- Gesamtschaden: 76,4663+7,906=84,3723.