DAV
DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Dr. Nora Gürtler
Prof. Dr. Claudia Cottin
Frank Schepers
Thomas Schmidt

Klausur 2010 zum DAV Grundwissen „Modellierung“

Hinweise:

- Die nachfolgenden Aufgaben sind alle zu bearbeiten (d.h. keine Wahlmöglichkeiten).
- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Insgesamt haben Sie 60 Minuten Zeit und können 60 Punkte erreichen.
- Zum Bestehen der Klausur sind 24 Punkte hinreichend.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1) Profit Test für eine Risikolebensversicherung (15 Punkte)
Ein Lebensversicherer möchte die Werthaltigkeit seiner Produkte überprüfen und hierzu für seinen Risikolebensversicherungsbestand einen Profit Test durchführen.

a) (3 Punkte) Beschreiben Sie die Grundzüge eines deterministischen Profit Tests, d.h.
(i) die Basisformel zur Berechnung des "Profits" und des PVFP,
(ii) den dabei verwendeten Input und die Annahmen,
(iii) die üblicherweise verwendeten Größen zur Profitabilitätsmessung.

b) (2 Punkte) Nennen Sie vier wesentliche Faktoren, die bei der Herleitung einer Sterbetafel 2. Ordnung Berücksichtigung finden sollten.

c) (2 Punkte) Der Versicherer führt für seine Risikolebensversicherung eine strenge Risikoprüfung durch. Welche Auswirkung hat dies auf die Sterblichkeiten 2. Ordnung und wie können Sie dies in ihrem Profit Test modellieren?

d) (1 Punkt) Bei einer Bestandsanalyse haben Sie festgestellt, dass sich ein bedeutender Teilbestand mit sehr hohen Versicherungssummen in Ihrem Portfolio befindet. Ist es gerechtfertigt, für diesen Teilbestand dieselben Sterblichkeiten 2. Ordnung anzusetzen wie für den übrigen Bestand? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) (3 Punkte) Ein junger Kollege aus dem Embedded Value-Team merkt an, dass dort die Abschluss- und Verwaltungskosten mit erheblich geringerem Aufwand modelliert werden als bei Ihnen. Für die Embedded Value-Berechnungen werden pauschal über alle Produktgruppen hinweg Abschlusskosten mit x‰ der Beitragssumme und Verwaltungskosten mit y% der Bruttobeiträge angesetzt. Wie modellieren Sie angemessen Kosten für den Profit Test Ihrer Risikolebensversicherung? Würden Sie die vorgeschlagene Vereinfachung übernehmen? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

f) (2 Punkte) Sie beschließen, einen bestehenden Schadenexzedenten-Rückversicherungsvertrag in Ihrem deterministischen Profit Test abzubilden. Welche Auswirkungen hat diese Modellerweiterung auf die Ergebnisse Ihres Profit Tests? Wie müssten Sie Ihr Modell für den Profit-Test ändern, um den Nutzen des RV-Vertrags für Ihr Unternehmen quantifizieren zu können?

g) (2 Punkte) Ihr junger Kollege aus dem Embedded Value-Team schlägt vor, Ihren bislang deterministischen Profit Test für die Risikolebensversicherung zu modernisieren und die Profitabilitätsmessung unter Verwendung eines marktkonsistenten Kapitalmarktmodells stochastisch auszugestalten.
(i) Beschreiben Sie, wie sich Ihr Modell dadurch ändert und was zu beachten ist.

(ii) Welche Änderung der bislang deterministischen Profit Test Ergebnisse für Ihre Risikolebensversicherungen erwarten Sie durch die Modelländerung?

Lösung:

a) (3 Punkte) Ein deterministischer Profit Test besitzt die im Folgenden beschriebenen Charakteristika:

(i) Basisformel zur Berechnung des "Profits" und des PVFP: Berechne für jedes Jahr j = t+1, …, w

$$\begin{aligned}\text{Profit}_j = {} & \text{Beiträge}_j + \text{Kapitalerträge}_j \\ & - \text{Leistungen}_j - \text{Kosten}_j \\ & +/- \text{Veränderung der Rückstellungen}_j\end{aligned}$$

Der Present Value of Future Profits zum Bewertungszeitpunkt t (Default: t = 0) ist

$$\text{PVFP}_t = \sum_{j=t+1}^{w} \text{Profit}_j \cdot (1+\text{rdr})^{-(j-t)},$$

wobei rdr die im Modell festzulegende Risikodiskontrate bezeichnet.

(ii) In einen deterministischen Profit Test gehen die folgenden Annahmen und Inputgrößen ein:

- Input auf einzelvertraglicher Basis, d.h. "Model Points" für spezifische Kombinationen von Geschlecht, Alter, Vertragsdauer, ….
- Für Sterblichkeit, Kosten, Storno werden Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung zu Grunde gelegt.
- Kapitalerträge werden pauschal durch eine Nettoverzinsung (Konstante oder Vektor mit je einem Wert pro Projektionsjahr) modelliert.

(iii) Üblicherweise verwendete Größen zur Profitabilitätsmessung:

- Profitabilität wird i.a. relativ zu dem zu Grunde liegenden Volumen gemessen ("Profit pro Euro Beitrag"), etwa als:
  - Marge auf APE: PVFP/APE
    (APE = Annual Premium Equivalent = laufende Beiträge plus 10% der Einmalbeiträge)
  - Marge auf PV(Prem): PVFP/PV(Prem)
    (PV(Prem) = Barwert der Beitragseinnahmen im Verlauf der Projektion)
- Alternatives Profitabilitätsmaß: Internal rate of return (IRR; Interner Zinsfuß)
  (IRR = Diskontierungszinssatz, für die der zugehörige PVFP gleich 0 ist)
- Break Even Point

b) (2 Punkte) Alter, Geschlecht, Geburtsjahrgang, Rauchverhalten

c) (2 Punkte) Es treten Selektionseffekte auf, d.h. die Sterblichkeit in den ersten Jahren nach Vertragsabschluss ist geringer als ohne Risikoprüfung. Dies kann im Profit Test durch Multiplikation der Sterbewahrscheinlichkeiten 2. Ordnung mit sog. Selektionsfaktoren berücksichtigt werden.

d) (1 Punkt) Nein, da höhere Versicherungssummen in der Regel mit geringeren Sterblichkeiten verbunden sind. Zum einen liegt das an einer üblicherweise strengeren Risikoprüfung und damit länger anhaltenden Selektionseffekten. Zum anderen lebt die zugehörige Klientel i.a. gesünder und damit länger.

e) (3 Punkte) Risikoleben ist eher kleinvolumig mit im Vergleich zu anderen Formen der Lebensversicherung geringen Beiträgen. Damit haben die Kosten eher den Charakter von Stückkosten als von prozentualen Kosten. Die Kosten der Risikoprüfung bei Abschluss spielen eine wichtige Rolle und sollten separat modelliert werden. Oft werden Risikolebensversicherungen anders verprovisioniert (t.w. Unterscheidung zwischen Bruttobeitrag und Sparbeitrag, manchmal kürzere Provisionshaftungszeit als z.B. bei Rentenversicherungen). Daher sollten Kosten im Profit Test immer individuell pro Produktgruppe modelliert werden.

f) (2 Punkte) Der Ertragsbarwert (PVFP) wird kleiner, da im Mittel der Rückversicherer Profit aus dem Vertrag zieht. Eine Möglichkeit, den Nutzen des RV-Vertrags zu quantifizieren, besteht in der stochastischen Modellierung der Sterblichkeiten.

g) (2 Punkte)
(i) Generell: Kapitalmarktmodell dazuschalten. Subventionseffekte mit dem Bestand beachten. Bei Verwendung eines stochastischen Kapitalmarktmodells muss die RfB modelliert werden wegen ihrer individuellen Pufferfunktion auf unterschiedlichen Kapitalmarktpfaden.
(ii) Wenig Änderung in den Ergebnissen, da das Zinsergebnis bei Risikoleben kaum einen Einfluss hat.

Aufgabe 2) Zeitwert der finanziellen Optionen und Garantien (15 Punkte)
Ihr Lebensversicherungsunternehmen ist dabei, einen Market Consistent Embedded Value (MCEV) einzuführen. Im ersten Schritt möchten Sie sich den wesentlichen methodischen Aspekten nähern, um die Grundkonzepte zu verstehen.

a) (6 Punkte) Zeigen Sie anhand eines einfachen Beispiels, was man im Kontext des stochastischen Embedded Value einer Lebensversicherung unter dem Zeitwert der finanziellen Optionen und Garantien (TV G&O) versteht. Illustrieren Sie dabei, was man unter der Asymmetrie des deutschen Geschäftsmodells versteht, und beschreiben Sie dieses kurz.

Geben Sie, gegebenenfalls anhand Ihres Beispiels, eine qualitative Einschätzung zu den folgenden Fragen. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

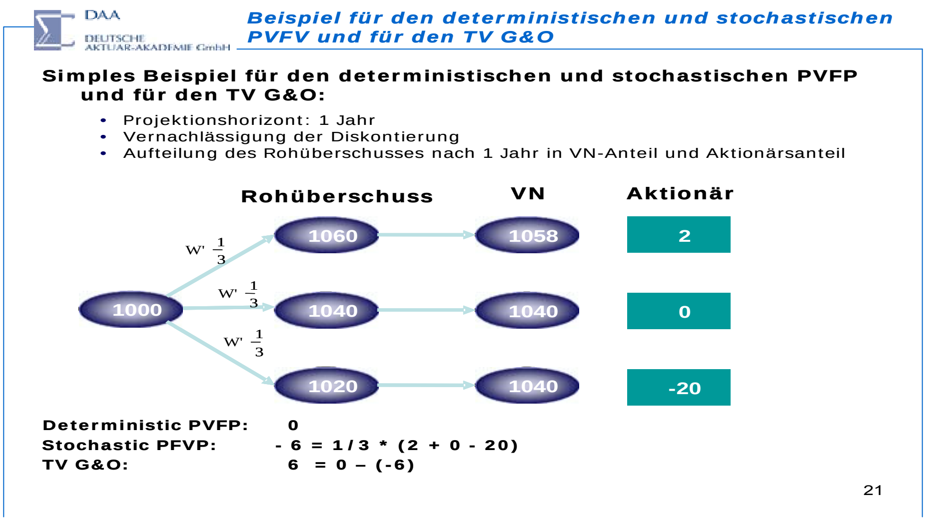
b) (2 Punkte) Wie ändern vorhandene Bewertungsreserven den TV G&O?

c) (2 Punkte) Wie ändert sich der TV G&O, falls der Aktionär einen höheren Anteil an möglichen Überschüssen nehmen kann?

d) (2 Punkte) Für welche Versicherungsprodukte wäre eine rein deterministische Bewertung zulässig oder akzeptabel? Nennen Sie ein Beispiel und begründen Sie dieses.

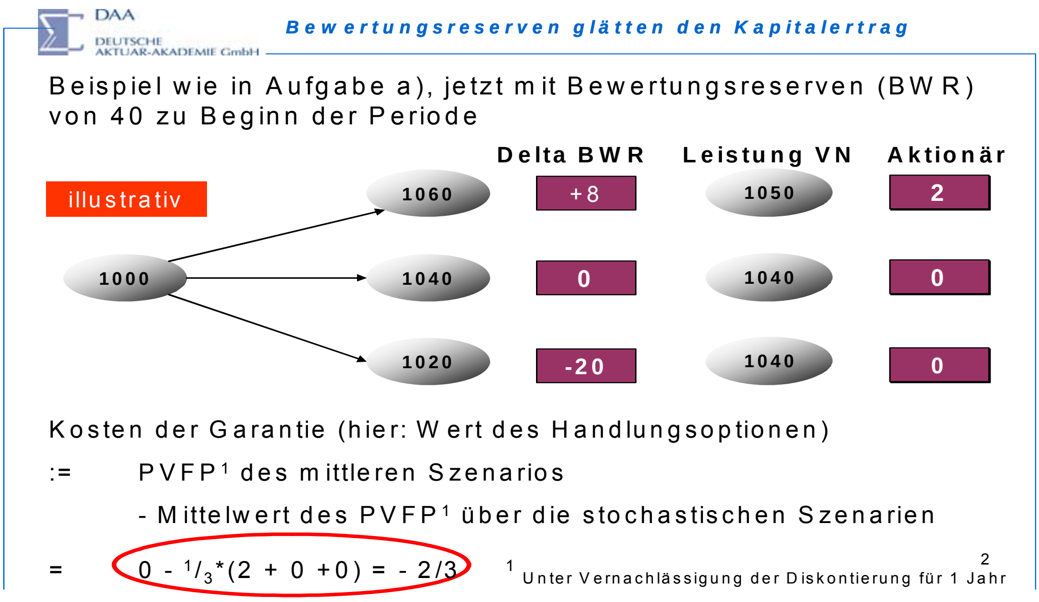
e) (3 Punkte) Wie ändert sich der TV G&O bei einer Verschiebung des Garantieniveaus? Erläutern Sie dabei den Unterschied zwischen innerem Wert und Zeitwert der Option.

Lösung:
a) (6 Punkte) Siehe z.B. Folie 21 in Block 4 des Folienskriptes:



Gewinnberechtigte kapitalbildende Lebens- und Rentenversicherungen mit Garantie bilden den Hauptbestandteil deutscher Lebensversicherungsportfolios. Dabei trägt das Unternehmen das volle Risiko für das Erwirtschaften der Garantieverzinsung, während Kapitalerträge oberhalb der Garantie zum überwiegenden Teil den Versicherungsnehmern gutgeschrieben werden müssen.

b) (2 Punkte) Bewertungsreserven können eingesetzt werden, um die Kapitalerträge zu glätten und so das Risiko des Nichterreichens der Garantie zu vermindern. Somit reduzieren Bewertungsreserven tendenziell den TV G&O. Sofern Einschüsse des Aktionärs weitestgehend vermieden können, sind sogar negative Werte für den TV G&O möglich. In diesem Fall kann eine Erhöhung der Volatilität der Kapitalerträge sogar wertschöpfend sein.



c) (2 Punkte) Ebenso vermindert eine Erhöhung des Aktionärsanteils an positiven Überschüssen tendenziell den TV G&O. Im ersten Beispiel würde eine Verdoppelung des Aktionärsanteils auf 4 Einheiten den TV G&O auf 5 1/3 reduzieren.

d) (2 Punkte) Bei klassischen fondsgebundenen Produkten verbleibt das Kapitalanlagerisiko vollständig beim Versicherungsnehmer. Damit entfällt sowohl die Garantie als auch die Partizipation des Aktionärs an positiven Überschüssen, so dass sich ein TV G&O von 0 ergibt.

Auch bei Produkten, bei denen nur geringe Reserven gebildet werden und das Kapitalanlageergebnis nur eine untergeordnete Rolle spielt (z.B. reine Todesfallversicherungen, Berufsunfähigkeitsdeckungen in der Anwartschaft), kann der TV G&O in der Regel vernachlässigt werden.

e) (3 Punkte) Sofern das durchschnittliche Garantieniveau oberhalb des erwarteten Kapitalanlage-ergebnisses liegt, geht diese Differenz bereits in eine deterministische Bewertung ein und stellt den inneren Wert der Option dar. Das zusätzliche Risiko, welches sich aus den Schwankungen des Kapitalmarkts ergibt, bildet dann den Zeitwert der Option, den TV G&O.

Alternativ könnte der innere Wert einer Option definiert werden als der Betrag, der bei einer aktuellen Ausübung der Option zu erzielen wäre. Ferner könnte man den inneren Wert einer Option auch über den

Marktwert eines die garantierten Leistungen replizierenden Portfolios definieren (analog Vorgehensweise SII).

Der TV G&O erhöht sich mit sinkendem Abstand des mittleren Kapitalertrags zum Garantieniveau.

Aufgabe 3) Modellierung von Schäden (15 Punkte)

Ein Schadenversicherer möchte seine 2 Sparten im Rahmen einer DFA-Modellierung untersuchen. Auf Basis von Daten der Vergangenheit wurden die Schadenerfahrung analysiert und Schadenverteilungen geschätzt. Das Brutto-Zeichnungsrisiko (vor Rückversicherung) des Jahres 2010 soll nun simuliert werden.

Die folgende Tabelle gibt die für 2010 erwartete verdiente Prämie, die erwarteten Kosten und den gesamten erwarteten Schadenaufwand sowie dessen Standardabweichung an. Alle Schäden sind im Folgenden auf abgewickelter Basis angegeben (Endschadenstand), und alle Werte sind in Mio. € ausgewiesen.

(Werte in Mio. €)	**Sparte 1:**	**Sparte 2:**
Prämie	100	140
Kosten	20	35
Erwarteter Schadenaufwand	80	105
Standardabweichung Schadenaufwand	15	40

Sie modellieren zunächst für beide Sparten eine Gesamtschadenverteilung (also eine Verteilung für den aggregierten Jahresschaden) und betrachten das versicherungstechnische Ergebnis („vt. Ergebnis“) brutto vor Rückversicherung.

a) (2 Punkte) Wie hoch ist für Sparte 1, Sparte 2 und das gesamte Unternehmen jeweils das für 2010 erwartete vt. Ergebnis?

b) (4 Punkte) Sie simulieren nun für jede Sparte das vt. Ergebnis anhand von 1000 Pfaden. Stand-alone ist das 0,5%-Quantil für Sparte 1 gleich -46,8 Mio. €, und für Sparte 2 gleich -131,3 Mio. €. Da Sie sich für das Gesamtrisiko interessieren, betrachten Sie in jedem Simulationspfad auch die Summe S der beiden vt. Ergebnisse. Die folgende Tabelle enthält deren 20 schlechteste Szenarien (Werte in Mio. €):

Pfad Nr.	**vt. Ergebnis Sparte 1**	**vt. Ergebnis Sparte 2**	**vt. Ergebnis Gesamt (S)**
264	-34,1	-203,2	-237,4
846	-18,2	-161,2	-179,4
721	3,0	-159,9	-156,9
404	-30,7	-116,9	-147,6
782	-6,0	-140,8	-146,8
339	2,6	-146,9	-144,3
355	12,2	-153,5	-141,3
579	13,0	-151,0	-138,0
788	-10,3	-112,8	-123,2
183	-0,5	-117,4	-117,9
950	-35,9	-81,6	-117,5
824	-10,3	-100,7	-111,0
306	9,6	-118,8	-109,2
732	9,9	-116,3	-106,5
187	3,5	-106,8	-103,3
85	-11,2	-91,6	-102,8
344	-33,5	-65,5	-99,0

937	-3,3	-95,6	-98,9
910	1,9	-100,2	-98,3
373	-1,5	-91,5	-92,9

Geben Sie auf Basis des Value-at-Risk das Risikokapital für das Zeichnungsrisiko für Sparte 1, Sparte 2 und Gesamt zum Niveau 0,5% an. Bestimmen Sie den Diversifikationseffekt zwischen Sparte 1 und Sparte 2. Wie erklärt er sich?

c) (3 Punkte) Nun stellen Sie eine Korrelation zwischen beiden Sparten von 75% ein. Welchen Einfluss hat dies auf den Diversifikationseffekt, verglichen mit der unkorrelierten Variante? Fertigen Sie für den korrelierten und für den unkorrelierten Fall jeweils eine grobe Skizze mit den Punktwolken der vt. Ergebnisse der Sparten 1 (x-Achse) und 2 (y-Achse) an.

d) (3 Punkte) Sie verfeinern nun die Parametrisierung von Sparte 2, indem Sie neben der Basisschadenverteilung eine Großschadenverteilung mittels kollektivem Modell der Risikotheorie (Schadenanzahl und Schadenhöhe) separat modellieren. Anhand Ihrer Datenbasis ermitteln Sie die in der folgenden Tabelle angegebenen Kennzahlen (alle Schadenhöhen und -aufwände in Mio. €):

Großschadenanzahl (diskrete Verteilung)	Erwartungswert	3,000
	Standardabweichung	1,732
Großschadenhöhe (stetige Verteilung)	Erwartungswert	15,0
	Standardabweichung	15,0
Großschadenaufwand (jährliche Großschadenlast)	Erwartungswert	?
	Standardabweichung	36,742

(i) Wie hoch ist der Erwartungswert der jährlichen Großschadenlast?

(ii) Unter der Voraussetzung, dass Großschäden und Basisschäden unkorreliert sind: Welchen Erwartungswert und welche Standardabweichung muss die Basisschadenverteilung haben, damit der jährliche Gesamtschaden den vorgegebenen Erwartungswert von 105 und Standardabweichung von 40 hat?

e) (3 Punkte) Sie simulieren nun die unkorrelierten Basis- und Großschäden von Sparte 2 und bestimmen daraus das 0,5%-Quantil des vt. Ergebnisses der gesamten Sparte 2 zu -157 Mio. €. Erscheint Ihnen dieses Ergebnis plausibel? Begründen Sie Ihre Antwort.

Wie würde sich dieses Quantil verändern, wenn Sie eine positive Korrelation zwischen Basisschadenlast und Großschadenlast einstellen würden und die übrigen Modellparameter nicht ändern? Wie würde sich das 0,5%-Quantil der Basisschadenlast verändern?

Lösung:

a) (2 Punkte) Das erwartete versicherungstechnische Ergebnis ist gegeben durch

vt Ergebnis = Prämie – erwarteter Schadenaufwand – Kosten.

Für Sparte 1 berechnet es sich zu 100 – 80 – 20 = 0, und für Sparte 2 zu 140 – 105 – 35 = 0. Da das erwartete vt Ergebnis additiv ist, ermittelt sich dessen Wert für das gesamte Unternehmen ebenfalls zu 0.

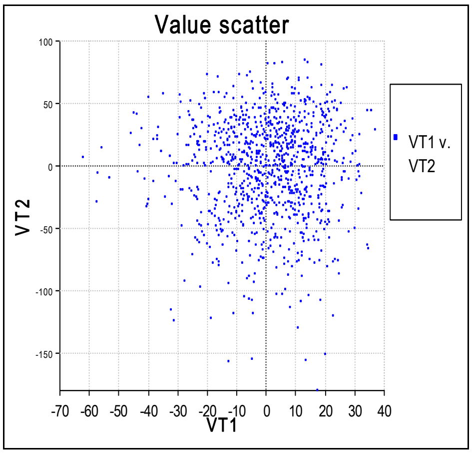
b) (4 Punkte) Da das erwartete vt Ergebnis jeweils 0 ist, ist das undiversifizierte Risikokapital gleich 46,8+131,3=178,1 Mio. €. Das diversifizierte Risikokapital ist gemäß Formel aus der Vorlesung gleich dem Value-at-Risk, der gegeben ist durch die Beziehung

$$P\left(X < VaR_{\alpha}(X)\right) \leq \alpha .$$

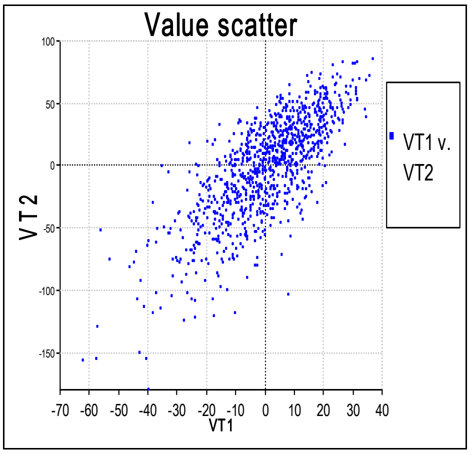
Es ist somit in der Tabelle der (0,005*1000+1)-te Wert abzulesen (Pfad 339), also ist das diversifizierte Risikokapital 144,3 Mio. €. Der Diversifikationseffekt ist somit 178,1-144,3 = 33,8 Mio. €.

Der Diversifikationseffekt kommt dadurch zustande, dass die „schlimmen“ Ereignisse in Sparte 1 nicht immer gleichzeitig mit den „schlimmen“ Ereignissen in Sparte 2 zusammentreffen. Letzteres wäre nur bei vollständiger Korrelation der Sparten 1 und 2 der Fall, und eine solche liegt hier offensichtlich nicht vor.

c) (3 Punkte) Der Diversifikationseffekt wird geringer. Die untenstehenden Skizzen sind einmal für eine Korrelation von 0% und einmal für eine Korrelation von 75% angefertigt worden. Der geringer werdende Diversifikationseffekt ist verdeutlicht durch eine gehäufte Anzahl von Punkten im dritten Quadranten (links unten) der zweiten Skizze gegenüber der ersten.



....



d) (3 Punkte) Die Zufallsvariable B bezeichne den jährlichen Basisschaden, G die jährliche Großschadenlast, N die jährliche Großschadenanzahl, und H die (einzelne) Großschadenhöhe.

(i) Dann berechnet sich der Erwartungswert der Großschadensummenverteilung zu

$$E(G) = E(N) \cdot E(H) = 3 \cdot 15 = 45$$

(ii) Ist S der jährliche Gesamtschaden, so gilt wegen S=B+G:

$$E(B) = E(S) - E(G) = 105 - 45 = 60$$

Mit Unkorreliertheit folgt $Var(S) = Var(B+G) = Var(B) + Var(G)$, also $Var(B) = Var(S) - Var(G)$ und

$$Std(B) = \sqrt{Var(S) - Var(G)} = \sqrt{40^2 - 36{,}742^2} = 15{,}812.$$

e) (3 Punkte) Mit der expliziten Modellierung von Großschäden in Sparte 2 erhält man ein 0,5%-Quantil des vt. Ergebnisses von -157 Mio. €. Verglichen mit der pauschalen Modellierung des Gesamtschadenaufwands in Teil a) und dem resultierenden 0,5%-Quantil des vt. Ergebnisses von -131,1 Mio. € ist es plausibel, dass die genauere Modellierung der Großschäden zu einem höheren Risikokapital führt.

Das Quantil des versicherungstechnischen Ergebnisses wird weiter sinken, d.h. es müsste mehr Risikokapital gestellt werden. Das Quantil der Basisschadenverteilung stand-alone ändert sich nicht.

Aufgabe 4) Monte-Carlo-Simulation (15 Punkte)
Für die Modellierung von Großschäden nach dem kollektiven Modell sollen Sie ein einfaches einjähriges Simulationsmodell aufbauen.

Bruttomodell:
Aus den vorhandenen Schadendaten haben Sie sich für die Schadenfrequenz eine Poissonverteilung Po(η) mit Zähldichte $P(N=k)=e^{-\eta}\frac{\eta^k}{k!}$ (k=0,1,2,…), und für die Schadenhöhe eine Paretoverteilung mit Verteilungsfunktion $F(x)=1-\left(\frac{\lambda}{x}\right)^{\alpha}$, $x>\lambda$, $(F(x)=0$, $x\le\lambda)$ gewählt. Als Parameter haben Sie $\eta=2$ sowie $\lambda=1.000, \alpha=2$ ermittelt.

Nettomodell:
Auf diesem zu simulierenden Bruttoschadenaufwand ist ein Schadenexzedent definiert mit 5.000 xs 2.000 und 2 freien Wiederauffüllungen.

Simulationsergebnisse:
Ein Zufallszahlgenerator hat die folgenden [0;1)-gleichverteilten Zufallszahlen simuliert:

Nr	Zufallszahl
1	0,4523
2	0,1033
3	0,8971
4	0,3014
5	0,0192

a) (3 Punkte) Ermitteln Sie Werte der Zähldichte und der Verteilungsfunktion für die Schadenfrequenzen k=0,1,2,3.

b) (2 Punkte) Welche Anzahl von Schäden wird durch Nutzung der ersten Zufallszahl der obigen Liste erzeugt?

c) (3 Punkte) Sei U eine auf [0;1) gleichverteilte Zufallsvariable, und F die Verteilungsfunktion einer stetig verteilten Zufallsvariablen. Welche Verteilungsfunktion besitzt $F^{-1}(U)$? Wie lassen sich also Realisationen einer Pareto-verteilten Zufallsvariablen durch Transformation von Realisationen einer gleichverteilten Zufallsvariablen erzeugen? Geben Sie die Transformation explizit an.

d) (4 Punkte) Simulieren Sie mit den verbleibenden Zufallszahlen (ab Nr. 2) die Schadenhöhen gemäß der unter b) erzeugten Schadenanzahl und der unter c) ermittelten Transformation.

e) (1 Punkt) Ermitteln Sie den Brutto-Gesamtschaden für diesen ersten Simulationslauf.

f) (2 Punkte) Die simulierten Schäden werden durch den in der Aufgabenstellung angegebenen Schadenexzedenten (pro Risiko) teilweise an den Rückversicherer weitergegeben. Ermitteln Sie für die vorliegende Simulation den beim Erstversicherer verbleibenden Nettoschaden.

Lösung:
a) (3 Punkte) Anwendung der Formel für die Zähldichte:

k	η^k	k!	Zähldichte	Verteilungs-funktion	Intervall für [0;1)-gleichverteilte Simulation
0	1	1	0,1353	0,1353	[0; 0,1353)
1	2	1	0,2707	0,4060	[0,1353; 0,4060)
2	4	2	0,2707	0,6767	[0,4060; 0,6767)
3	8	6	0,1804	0,8571	[0,6767; 0,8571)

b) (2 Punkte) Wegen 0,4060 < 0,4523 < 0,6767 hält man die Schadenanzahl 2.

c) (3 Punkte) Ist U eine auf [0;1)-gleichverteilte Zufallsvariable und F die Verteilungsfunktion einer stetigen Verteilung, so besitzt auch $X := F^{-1}(U)$ die Verteilungsfunktion F, denn es gilt

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x).$$

Aus $F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{\alpha}$, $x > \lambda$, erhält man $F(x) = u \Leftrightarrow x = \frac{\lambda}{(1-u)^{1/\alpha}}$ für $u \in [0;1)$

d) (4 Punkte) Es sind zwei Schäden zu simulieren:

$$u_1 = 0{,}1033 \Rightarrow x_1 = \frac{\lambda}{(1-u_1)^{1/\alpha}} = \frac{1.000}{(1-0{,}1033)^{1/2}} = 1.056$$

und

$$u_2 = 0{,}8971 \Rightarrow x_2 = \frac{\lambda}{(1-u_2)^{1/\alpha}} = \frac{1.000}{(1-0{,}8971)^{1/2}} = 3.117$$

e) (1 Punkt) Der Brutto-Gesamtschaden beträgt 1.056 + 3.117 = 4.173.

f) (2 Punkte) Der Schadenexzedent wirkt auf beide Schäden:

Schaden 1: $x_1 = 1.056$ wird durch den XL nicht erstattet durch den Rückversicherer.
Schaden 2: $x_2 = 3.117$ wird durch den XL mit 1.117 erstattet.

Damit ergibt sich der simulierte Nettogesamtschaden von 4.173 – 0 -1.117 = 3.056.