



## Klausur 2009 zum DAV Grundwissen „Modellierung“

### Hinweise:

- Die nachfolgenden Aufgaben sind alle zu bearbeiten (d.h. keine Wahlmöglichkeiten).
- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Graphiken zu den Aufgaben 2, 3c und 3f finden Sie auf den letzten drei Seiten Ihrer Lösungsbögen. Dort tragen Sie bitte Ihre Bearbeitung dieser Aufgaben ein.
- Insgesamt haben Sie 60 Minuten und können 60 Punkte erreichen.
- Zum Bestehen der Klausur sind 24 Punkte hinreichend.

### Viel Erfolg!

### Aufgabe 1) Zinsniveau (20 Punkte)

Nicht nur die Aktienmärkte bereiten Kapitalanlegern und Aktuaren von Lebensversicherern zum Jahresanfang 2009 Kopfzerbrechen: Genau so sehr, oder noch mehr, schmerzt das aktuelle Zinsniveau.

- (2 Punkte) Beantworten Sie in einem Satz, warum niedrige Zinsen ein Problem für Lebensversicherer darstellen.
- Beschreiben Sie ein mögliches Modell, mit dem man überprüfen kann, in welchem Umfang eine Lebensversicherungsgesellschaft von diesem Problem betroffen ist. Nennen und beschreiben Sie dazu:
  - (2 Punkte) Zielvariable (was soll das konkrete Ergebnis der Analyse sein?),
  - (2 Punkte) Projektionszeitraum,
  - (2 Punkte) die verwendeten Kapitalmarktszenarien (deterministisch/stochastisch, Real World oder kapitalmarktkonsistent).
- (3 Punkte) Beantworten Sie in jeweils einem Satz, warum auch hohe Zinsen kurzfristig sowohl auf der Aktiv- als auch auf der Passivseite ein Problem werden können.
- Beschreiben Sie ein mögliches Modell, mit dem man überprüfen kann, in welchem Umfang eine Lebensversicherungsgesellschaft von diesem Problem betroffen ist. Nennen/beschreiben Sie dazu:
  - (4 Punkte) zwei mögliche Zielvariablen,
  - (2 Punkte) die verwendeten Kapitalmarktszenarien (deterministisch/stochastisch, Real World oder kapitalmarktkonsistent),
  - (3 Punkte) welche zusätzliche Annahme auf der Passivseite entscheidend ist, und nennen Sie zwei Punkte, die bei der Setzung dieser Annahme zusätzlich zu beachten sind.

### Lösung:

(i) Das Unternehmen muss zumindest den durchschnittlichen Rechnungszins erwirtschaften, was bei einer Neuanlage von 3% zumindest langfristig schwierig werden könnte.

(ii) Im folgenden werden zwei mögliche Ansätze vorgestellt, weitere sinnvolle Lösungen waren ebenfalls zugelassen:

#### Alternative 1: Marktwertsicht

- Zielvariable: Wahrscheinlichkeit, dass am Ende des Jahres der Marktwert der Kapitalanlagen kleiner als der der Garantieleistungen ist. Damit kann geprüft werden, ob zum Ende des Jahres hinreichende Sicherheit besteht, dass die Gesellschaft zur Not ihre Garantien am Kapitalmarkt vollständig hedgen könnte.

- b. Projektionszeitraum: 1 Jahr (danach Barwertbetrachtung für die gesamten Vertragsdauern). Dieser Zeitraum entspricht dem realistischen Zeitrahmen, in welchem die Gesellschaft entsprechend massiv auf das Kapitalmarktumfeld reagieren könnte, und stimmt auch mit den Vorgaben aus Solvency II überein.
- c. Für die Wahrscheinlichkeitsaussage über den 1-Jahreszeitraum sind stochastische Real World Szenarien notwendig. Für die anschließende Marktwertbetrachtung der Garantien reicht die im jeweiligen Pfad simulierte risikofreie Zinskurve nach einem Jahr.

#### Alternative 2: HGB-Sicht

- a. Zielvariable: Wahrscheinlichkeit, dass im nächsten Jahr der Garantiezins zuzüglich der deklarierten Überschussbeteiligung nicht erwirtschaftet werden kann. Sollte dieser Fall eintreten, müsste ein entsprechender Fehlbetrag über das Eigenkapital oder (sofern zulässig) die freie RfB finanziert werden, was ein deutlich unerwünschtes Ereignis darstellt.
- b. Projektionszeitraum: 1 Jahr, kann bzw. sollte auch auf die Mittelfristplanung ausgedehnt werden.
- c. Für die Wahrscheinlichkeitsaussage über den 1-Jahreszeitraum sind stochastische Real World Szenarien notwendig.

(iii) Auf der Aktivseite kann ein Zinsanstieg zu Abschreibungsbedarf auf festverzinsliche Titel führen, da diese an Marktwert verlieren. Auf der Passivseite kann die Gesamtverzinsung dem Marktzins nur mit Verzögerung folgen, so dass die Gesellschaft im Neugeschäft Nachteile gegenüber Banken und Fondsgesellschaften erleiden kann, und auch mit erhöhten Rückkäufen rechnen muss.

(iv) Ein mögliches Modell besitzt die folgenden Charakteristika:

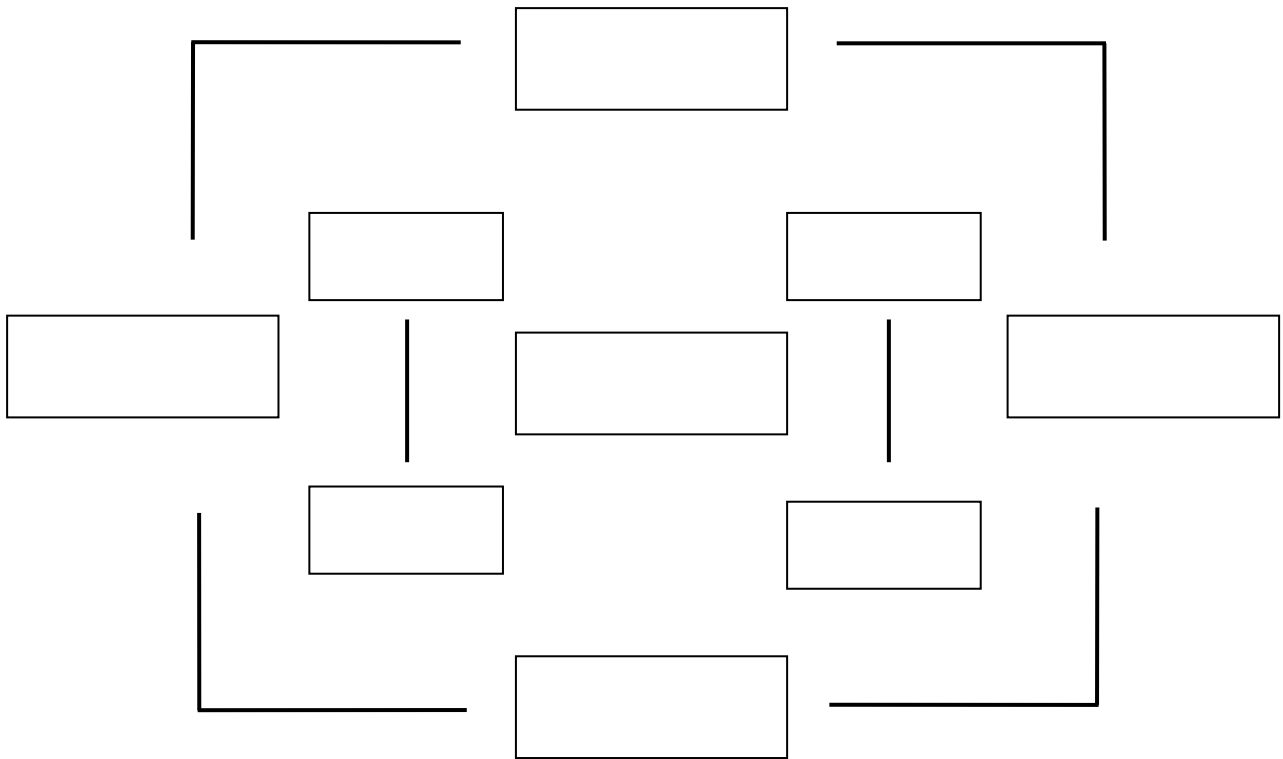
- a. Zielvariable auf der Aktivseite ist der mögliche Abschreibungsbedarf im nächsten Geschäftsjahr. Damit kann das Risiko geprüft werden, das für das Kapitalanlageergebnis droht. Eine weitere Zielvariable ist die Differenz zwischen der eigenen deklarierten Gesamtverzinsung und dem Marktzins, da diese als maßgeblicher Treiber für sinkendes Neugeschäft und höhere Storni verantwortlich ist.
- b. Man kann diese Analysen zur Plausibilisierung zunächst für ausgewählte deterministische Szenarien durchführen. Für die Wahrscheinlichkeitsaussage werden aber wiederum stochastische Real World Szenarien benötigt.
- c. Wesentliches Risiko ist dynamisches Storno, da dieses über den zusätzlichen Mittelabfluss auch das Risiko erhöht, dass stille Lasten auf festverzinslichen Titeln realisiert werden müssen. Zu berücksichtigen sind dabei zum Beispiel das allgemeine Stornoniveau der Gesellschaft, die Höhe der Stornoabschläge, aber auch der Vertriebsweg.

### **Aufgabe 2) ALM-Modell in der Lebensversicherung (10 Punkte)**

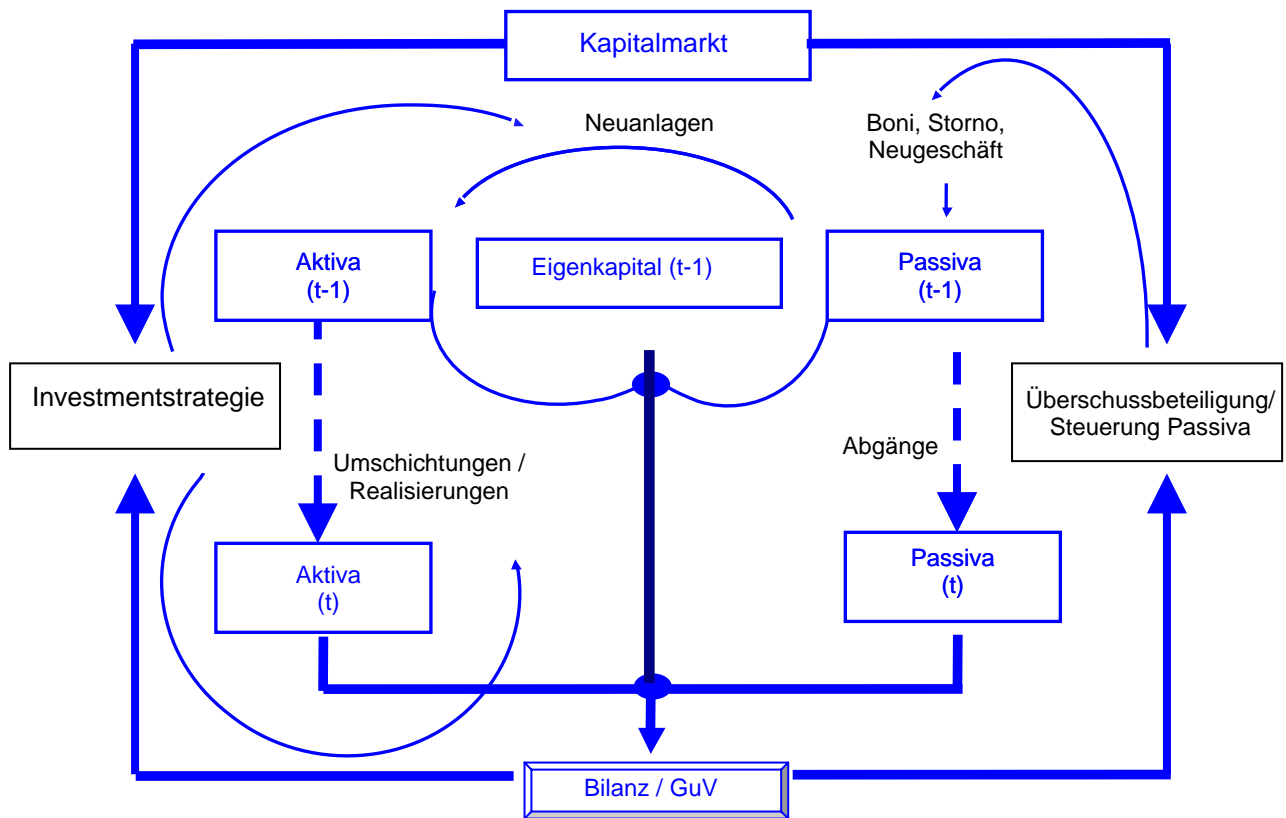
Entwerfen Sie auf der Basis der unten vorgegebenen Struktur ein Diagramm zur Illustration des dynamischen und stochastischen Grundmodells für das Asset-Liability-Management in der Lebensversicherung. Dabei sind die vorgegebenen "Kästchen" zu beschriften und Pfeile einzufügen, die den dynamischen Ablauf (zeitliche bzw. sachlogische Reihenfolge) veranschaulichen. Weitere "Kästchen" (bzw. Beschriftungen) und Pfeile/Striche sind ggf. zusätzlich einzufügen.

Berücksichtigt werden sollen - zumindest sinngemäß - insbesondere folgende Elemente bzw. Begriffe:

- Kapitalmarkt,
- Bilanz / GuV,
- Eigenkapital,
- Aktiva und Passiva zweier Planungsperioden einschließlich Veränderungen durch Neuanlagen und Umschichtungen / Realisierungen, Bonuszahlungen (aus Überschuss), Stornierungen, Neugeschäft, Abgänge,
- Investmentstrategie,
- Überschussbeteiligung / Steuerung Passiva.



**Lösung:**



Selbstverständlich ist auch eine Darstellung mit „vertauschter“ Aktiv- und Passiv-Seite möglich, wie sie z.B. in den DAV-Kursunterlagen abgebildet war. Aus diesem Grund wurde auch die Struktur in der Aufgabenstellung nur sehr grob vorgegeben.

### Aufgabe 3) Modellierung von Großschäden (20 Punkte)

Für die Sparte Privat-Haftpflicht haben Sie aus Ihren DV-Systemen Schadendaten für die größten Schäden der letzten fünf Jahre zur Modellierung bereitgestellt bekommen. Die Daten können direkt in die weiteren Betrachtungen eingehen, da sie bereits passend inflationsbereinigt und an die aktuellen Verhältnisse angepasst wurden.

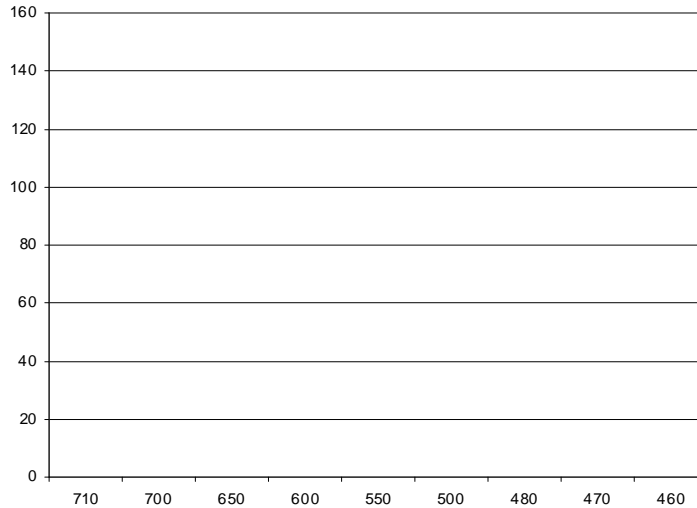
Die folgende Tabelle zeigt die zehn absteigend sortierten Schäden  $x_{(1)}, \dots, x_{(10)}$  sowie erste Analysen:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Schaden- nummer $i$	Schäden $x_{(i)}$ in Tsd. EUR	$\hat{\alpha}_i = \left[ \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \log \frac{x_{(j)}}{x_{(i)}} \right]^{-1}$	$1 - \frac{i}{11}$	(1-i/11)-Quantile der in d) ermittelten Pareto-Verteilung in Tsd. EUR	Quantile der empirischen Verteilung der $x_{(i)}$ in Tsd. EUR
1	720	nicht def.	0,909	811	720
2	710	143,0	0,818	692	710
3	700	70,8	0,727	631	700
4	650	15,1	0,636	592	650
5	600	8,5	0,545	562	600
6	550	?	0,455	?	550
7	500	4,4	0,364	521	500
8	480	4,3	0,273	505	480
9	470	4,4	0,182	492	470
10	460	4,5	0,091	480	460

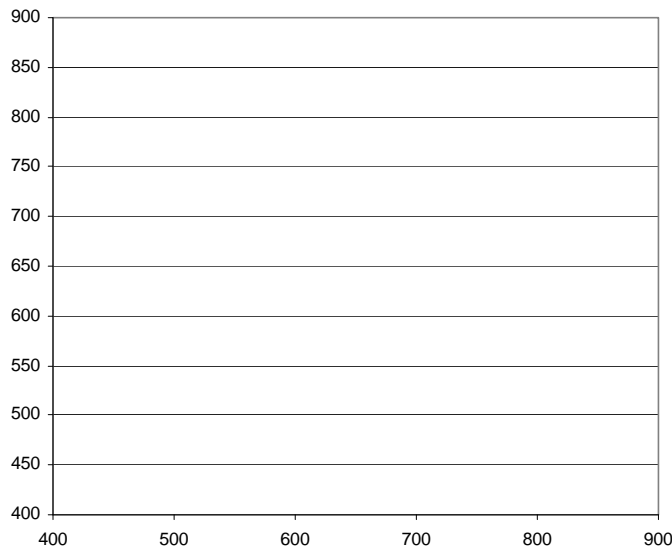
Die vorliegenden Großschäden der Sparte Privat-Haftpflicht sollen im Folgenden mittels einer Pareto-

Verteilung mit Verteilungsfunktion  $F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{x}\right)^\alpha$ ,  $x > \lambda$ , modelliert werden (es gilt  $F(x) = 0$ ,  $x \leq \lambda$ ).

- (2 Punkte) Berechnen Sie den Wert  $\hat{\alpha}_6$  aus den vorliegenden Daten.
- (2 Punkte) Welche Rolle spielt  $\hat{\alpha}_i$  für den charakteristischen Index  $\alpha$  der Pareto-Verteilung? Für welche Werte des charakteristischen Index existieren deren erste beiden Momente?
- (4 Punkte) Skizzieren Sie den Hill-Plot zu den Schäden  $x_{(1)}, \dots, x_{(10)}$  und diskutieren Sie das Resultat, insbesondere im Hinblick auf die Wahl einer Großschadengrenze:



- d) (2 Punkte) Ermitteln Sie für die Schadengrenze 470 Tsd. EUR den charakteristischen Index  $\alpha$  der an die Schäden  $\geq 470$  Tsd. EUR angepassten Pareto-Verteilung.
- e) (2 Punkte) Spalte (5) der obigen Tabelle enthält die  $(1-i/11)$ -Quantile der in d) ermittelten Pareto-Verteilung. Ergänzen Sie den in Spalte (5) der obigen Tabelle fehlenden Punkt zum 45,5%-Quantil.
- f) (4 Punkte) Skizzieren Sie den QQ-Plot für die unter d) ermittelte Pareto-Verteilung und diskutieren Sie das Resultat.



- g) (2 Punkte) Nennen Sie zwei weitere Möglichkeiten, um die Anpassung einer Großschadenverteilung an die Ihnen vorliegenden Daten zu überprüfen.
- h) (2 Punkte) Im Nachgang zu Ihrer Analyse stellen Sie im Gespräch mit dem Fachbereich fest, dass es für den hier betrachteten Privat-Haftpflichttarif eine maximale Versicherungssumme gibt. Wie können Sie diese Information in Ihre obige Großschadenmodellierung einbauen?

**Lösung:**

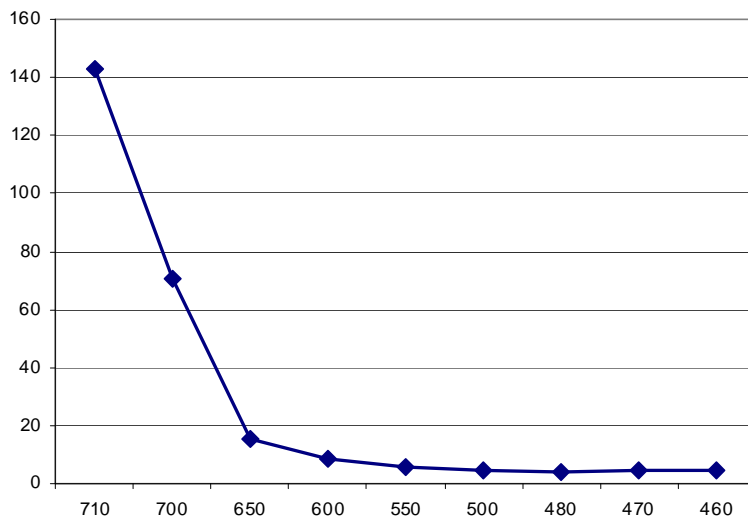
Anmerkung: Die Bezeichnung „log“ steht hier für den natürlichen Logarithmus. Die Teilnehmer, die den Logarithmus zur Basis 10 verwendet haben, erhielten ebenfalls die volle Punktzahl zu den jeweiligen Aufgabenteilen.

- a) Der Hill-Schätzer  $\hat{\alpha}_6$  der Schäden  $x_{(1)}, \dots, x_{(6)}$  berechnet sich zu

$$\hat{\alpha}_6 = \left[ \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 \log \frac{x_{(j)}}{x_{(6)}} \right]^{-1} = \left[ \frac{1}{6} \left( \sum_{j=1}^6 \log x_{(j)} - 6 \cdot \log x_{(6)} \right) \right]^{-1} = 5,88$$

Anmerkung: Der Wert 13.5 zum Logarithmus zur Basis 10 wurde ebenfalls mit 2 Punkten bewertet.

- b) Der Hill-Schätzer  $\hat{\alpha}_i$  ist der Schätzer für den charakteristischen Index  $\alpha$  der an die Daten  $x_{(1)}, \dots, x_{(i)}$  angepassten Pareto-Verteilung. Der Erwartungswert einer Pareto-Verteilung mit charakteristischem Index  $\alpha$  existiert für  $\alpha > 1$ , die Varianz existiert für  $\alpha > 2$ .
- c) Der Hill-Plot zu den Schäden  $x_{(1)}, \dots, x_{(10)}$  nimmt die folgende Gestalt an:



Da der Hill-Plot ab dem Wert 500 Tsd. EUR stabil (nahezu konstant) wird, ist die Pareto-Verteilung prinzipiell zur Modellierung der vorliegenden Schäden geeignet. Als Großschadengrenze empfiehlt sich der Wert, ab dem der Hill-Plot konstant wird, in diesem Fall z.B. 500 Tsd. EUR.

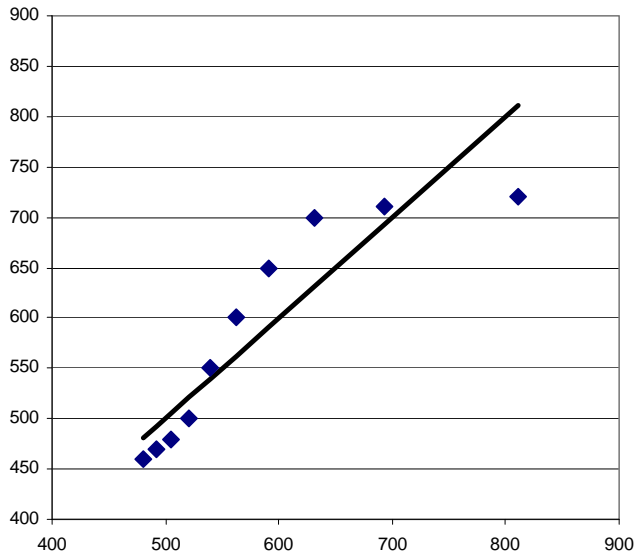
- d) Aus Spalte (3) der obigen Tabelle lässt sich zur Schadengrenze 470 Tsd. EUR der Wert des Hill-Schätzers  $\hat{\alpha}_9 = 4,4$  ablesen.
- e) Für die Quantilfunktion der Pareto-Verteilung gilt:

$$\text{Für } p \in [0,1): \quad p = 1 - \left( \frac{\lambda}{x} \right)^\alpha \Leftrightarrow x = \frac{\lambda}{(1-p)^{1/\alpha}}$$

Der fehlende Wert für  $p=0,455$  ist also mit  $\lambda = 470.000$  und  $\alpha = 4,4$

$$x_{0,45} = \frac{470.000}{(1-0,455)^{1/4,4}} = 539.520$$

- f) Diskussion des QQ-Plots:



Im unteren Bereich zeigt der QQ-Plot eine gute Anpassung mittels Pareto-Verteilung. Im mittleren Bereich hingegen passt die Pareto-Verteilung nicht so gut, da die empirische Verteilung deutlich oberhalb der Winkelhalbierenden liegt. Ggfs. sollte die angepasste Verteilung hier mehr Masse bekommen. Für den oberen Bereich hingegen könnte die Pareto-Verteilung die beobachteten Daten eher überschätzen.

- g) Weitere Möglichkeiten zur Validierung der Großschadenmodellierung:
- Mean Excess Plot,
  - gängige Anpassungstests,
  - P-P-Plot.
- h) Da keine Einzelschäden oberhalb der maximalen Versicherungssumme entstehen können, sollte man die Pareto-Verteilung bei diesem Wert kappen.

#### **Aufgabe 4) Zusammenspiel der Modellkomponenten in einem DFA-Modell (10 Punkte)**

Auf die aktuelle Krise an den Finanzmärkten muss auch die Feldafinger Brandkasse reagieren. Sie plant daher ein Bündel von Maßnahmen zur Steigerung ihres Ertrags und Reduktion ihres Risikos, deren Auswirkungen sie mit Hilfe ihres DFA-Modells bewerten möchte:

- a) (2 Punkte) Sanierung ihrer defizitären Kraftfahrt-Haftpflicht-Sparte durch Steigerung des Prämienniveaus um 15%-20%.
- b) (2 Punkte) Flächendeckendes Kostensenkungsprogramm.
- c) (2 Punkte) Neuaufbau der Sparte Unfall mit Beitragsrückgewähr, um neben dem bisher gezeichneten KH- und VGV-Geschäft Wachstum in einem dritten Segment zu generieren.
- d) (2 Punkte) Geplante Halbierung der Aktienquote, um den dauerhaft und deutlich gestiegenen Volatilitäten am Aktienmarkt zu begegnen.
- e) (2 Punkte) Des weiteren hat der RV-Makler, mit dem die Feldafinger Brandkasse seit Jahren zusammenarbeitet, sein Sturm-Modell überarbeitet und festgestellt, dass die PML-Kurve für Sturm angepasst werden muss.

Zur Beurteilung der neuen Risikosituation müssen sowohl das DFA-Modell der Feldafinger Brandkasse überarbeitet als auch dessen Prämissen aktualisiert werden.

Benennen Sie für die Fälle a)-e) die jeweils von den Veränderungen betroffenen Komponenten und Prämissen des DFA-Modells der Feldafinger Brandkasse und beschreiben Sie kurz die am Modell vorzunehmenden Anpassungen. Schildern Sie außerdem, wie sich die Änderungen während der mit dem Modell durchgeführten Simulationen auswirken (welche Modellkomponenten sind in der Simulation betroffen?).

**Lösung:**

- a) Die Beiträge gehen bei der Parametrisierung des DFA-Modells als Eingabegröße ein und müssen angepasst werden, wobei die Auswirkung der Beitragssteigerungen auf die Anzahl der Verträge zu berücksichtigen ist. Der Beitrag wird in der Simulation im Bruttomodell vereinnahmt, das Rückversicherungsmodell zweigt ggf. die RV-Prämie an einen externen Rückversicherer ab. Der im Unternehmen verbleibende Teil des Beitrags (Nettoprämie) wird dann im Investmentmodell entsprechend den Kapitalanlagerichtlinien angelegt. Die geänderten Ergebnisse werden im Auswertungsmodell sichtbar.
- b) Die neuen geplanten niedrigeren Kosten werden bei der Parametrisierung des DFA-Modells im Bruttomodell eingestellt und damit in der Simulation auch im Auswertungsmodell sichtbar.
- c) Der Neuaufbau der Sparte Unfall mit Beitragsrückgewähr (UBR) muss im Rahmen einer Modellerweiterung im Bruttomodell, im Reservemodell und im Rückversicherungsmodell verdrahtet werden. Das Abwicklungs- und Auswertungsmodell müssen um die neue Sparte erweitert werden. Da die UBR mit Deckungsrückstellung kalkuliert wird, ist auch das Investmentmodell von der Erweiterung betroffen. In der Simulation sind alle Modellkomponenten (außer ESG) von der Erweiterung betroffen.
- d) Die Halbierung der Aktienquote resultiert in einer neuen Kapitalanlagestruktur (Asset Allocation), die im Investmentmodell eingestellt wird. Der ESG muss mit den am Kapitalmarkt beobachteten veränderten Volatilitäten neu kalibriert werden. In der Simulation liefert der ESG den Aktienindex, das Investmentmodell wendet die Kurse auf den neuen Aktienbestand an, und das Auswertungsmodell zeigt das Kapitalanlageergebnis.
- e) Die neue PML-Kurve für Sturm muss in das Bruttomodell eingebaut werden. In der Simulation ändern sich dadurch die generierten Sturmschäden, die in das Rückversicherungsmodell hineinlaufen, das Abwicklungsmodell leistet die zugehörige Schadenzahlung im Geschäftsjahr, die Liquidität wird durch das Investmentmodell bereitgestellt, sichtbar wird das Ergebnis dann im Auswertungsmodell.