

## Klausur 2016 zum DAV Grundwissen „Modellierung“

### Hinweise:

- Die nachfolgenden Aufgaben sind alle zu bearbeiten (d.h. keine Wahlmöglichkeiten).
- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Insgesamt haben Sie 90 Minuten Zeit und können 90 Punkte erreichen.
- Zum Bestehen der Klausur sind 36 Punkte hinreichend.

### Viel Erfolg!

### Aufgabe 1) Upselling (15 Punkte)

Die Closed Life Lebensversicherung ist für den Neuzugang geschlossen. Um das Potenzial des Bestandes zu nutzen, bietet ihr die Telemarketinggesellschaft IchVerTix an, eine Aktion zum Verkauf von Zusatzversicherungen durchzuführen. Die Policen würden an einen befreundeten Schaden-Unfallversicherer weiter gegeben, für die Closed Life bliebe pro Abschluss eine Marge von EUR 10.

IchVerTix möchte für diese Leistung eine Einmalzahlung von EUR 200.000, sowie EUR 1 pro kontaktiertem Kunden. Sie kontaktiert für jeden im Folgenden betrachteten Teilbestand alle Kunden dieses Teilbestands und erwartet für den Gesamtbestand stets eine Annahmequote von 15%.

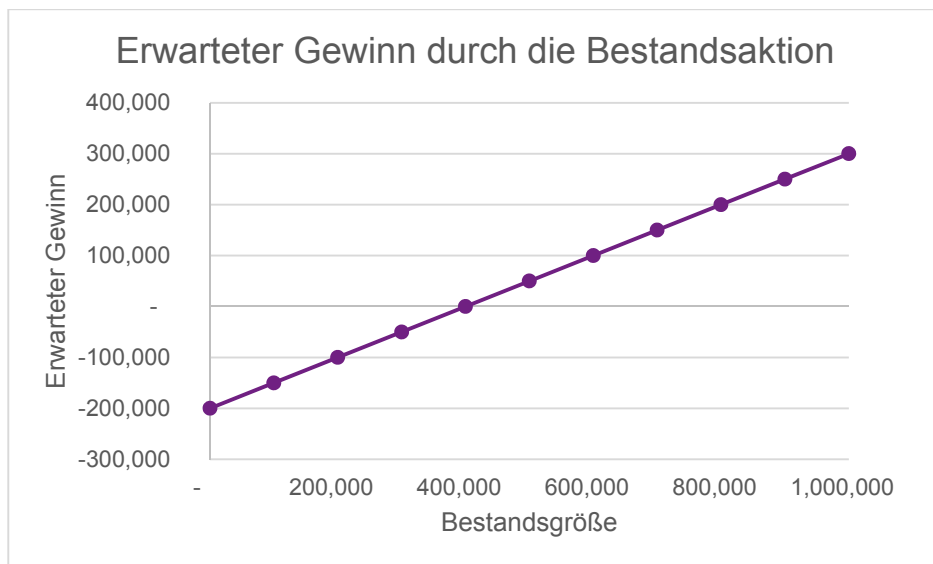
- a) (5 Punkte) Ab welcher Bestandsgröße (Anzahl der Kunden)  $n$  könnte die Aktion unter diesen Annahmen profitabel für die Closed Life sein? Geben Sie die Formel zur Herleitung des Gewinns an, veranschaulichen Sie diese in Abhängigkeit von der Bestandsgröße und geben Sie die Mindestgröße an, ab der eine Deckung der Kosten erwartet werden darf.
- b) (6 Punkte) Leider umfasst der Bestand nur 250.000 Kunden. IchVerTix bietet für einen Zusatzbetrag von EUR 50.000 an, die Aktion auf einen vorselektierten Teilbestand zu begrenzen, bei welchem aufgrund von statistischen Indikatoren eine Annahmequote von 35% erwartet wird. Wie groß müsste dieser Teilbestand mindestens sein, damit sich die Aktion für die Closed Life Lebensversicherung lohnt? Wie groß müsste bei Zugrundelegung dieses „Mindest-Teilbestands“ dann die erwartete Annahmequote für den restlichen Bestand sein?
- c) (4 Punkte) Begründen Sie mit mindestens drei Argumenten kurz, ob für Sie als CEO der Closed Life das Angebot der IchVerTix attraktiv wäre. Welche Modifikationen an dem Angebot würden Sie vorschlagen?

### Lösungsvorschlag:

- a) (5 Punkte) Der erwartete Gewinn der Closed Life Lebensversicherung ist durch die folgende Formel gegeben:

$$\text{Gewinn} = n \cdot (\text{Annahmequote} \cdot \text{EUR } 10 - \text{EUR } 1) - \text{EUR } 200.000$$

$$\text{Gewinn} = 0,5 \cdot n - 200.000$$



$$n \geq \frac{\text{EUR } 200.000}{15\% \cdot \text{EUR } 10 - \text{EUR } 1} = 400.000$$

Die Bestandsaktion lohnt sich also erst ab einer Bestandsgröße von 400.000 Verträgen.

- b) (6 Punkte) Analog leitet man mit einer Annahmequote von 35% die Mindestbestandsgröße für einen positiven Gewinn her:

$$n \geq \frac{\text{EUR } 250.000}{35\% \cdot \text{EUR } 10 - \text{EUR } 1} = 100.000$$

Der Gesamtbestand von 250.000 teilt sich also im Verhältnis 2/5 zu 3/5 in die beiden Teilbestände von 100.000 bzw. 150.000. Für die Annahmequote auf dem verbleibenden Teilbestand bedeutet dies:

$$2/5 \cdot 35\% + 3/5 \cdot x = 15\%$$

$$x = \frac{15\% - \frac{2}{5} \cdot 35\%}{3/5} = 1,67\%$$

Wenn die Annahmequote auf dem verbleibenden Teilbestand also 1,67% beträgt, ergibt sich eine Gesamtannahmequote von 15%, mit den 35% auf dem selektierten Teilbestand.

- c) (4 Punkte) Die Möglichkeit, a priori die Annahmewilligen nahezu vollständig herauszufiltern mutet bei aller Begeisterung für Big Data abenteuerlich an. Es ist also fraglich, ob ein Teilbestand mit Annahmequote 35% selektiert werden kann.

Selbst bei Eintreffen der Annahmen ist das Gewinnpotenzial für die Closed Life Lebensversicherung begrenzt.

Ferner geht damit einher, dass der Datenbestand für einen Dritten geöffnet wird, was unter anderem Reputationsrisiken mit sich bringt.

In Summe erscheint das Angebot der IchVerTix für die Closed Life Lebensversicherung nicht sonderlich attraktiv. Der Vorstand sollte mit der IchVerTix über eine Kostenreduktion verhandeln.

## **Aufgabe 2) Mindestzuführungsverordnung von 2008 bis heute (15 Punkte)**

Die „alte“ Mindestzuführung gemäß der in 2008 eingeführten Mindestzuführungsverordnung bestand aus 90% der anzurechnenden Kapitalerträge abzüglich der rechnungsmäßigen Zinsen, 75% des Risikoergebnisses und 50% des übrigen Ergebnisses. Etwaige negative (Teil-)Zuführungen waren durch 0 zu ersetzen.

Mit dem Inkrafttreten des LVRG kam es zu einigen Änderungen an der Berechnung der Mindestzuführung. Für die „neue“ Mindestzuführung gelten die folgenden Änderungen bzw. Ergänzungen der bisherigen Regelung:

- Der Versicherungsnehmer ist inzwischen auch am Risikoergebnis mit 90% zu beteiligen.
- Ergeben sich rechnerisch negative Beträge für die Mindestzuführung zur Rückstellung für Beitragsrückerstattung in Abhängigkeit von den Kapitalerträgen, werden diese durch Null ersetzt, wenn die Kapitalerträge höher ausfallen als die rechnungsmäßigen Zinsen. Andernfalls beträgt die Mindestzuführung zur Rückstellung für Beitragsrückerstattung in Abhängigkeit von den Kapitalerträgen 100% der Kapitalerträge abzüglich der rechnungsmäßigen Zinsen.

a) (2 Punkte) Geben Sie eine Formel für die „alte“ Mindestzuführung an.

b) (4 Punkte) Geben Sie eine Formel für die „neue“ Mindestzuführung an.

c) (3 Punkte) Angenommen, die stilisierte Gewinnzerlegung Ihrer Gesellschaft sieht unter Vernachlässigung von Steuern wie folgt aus:

- Kapitalertrag KE = 8, rechnungsmäßige Zinsen RZ = 10
- Risikoergebnis RE = 2
- Übriges Ergebnis UE = 2.

Bitte berechnen Sie die „alte“ und die „neue“ Mindestzuführung.

d) (3 Punkte) Angenommen, Sie verfügen über ein stochastisches Unternehmensmodell für MCEV-Berechnungen, welches wahlweise die „alte“ oder die „neue“ Mindestzuführungslogik verwenden kann. Bitte geben Sie je einen Grund dafür an, weshalb die „neue“ Mindestzuführungslogik zu einem höheren bzw. zu einem niedrigeren MCEV führen könnte.

e) (3 Punkte) Bei welchem Versicherungsbestand würde die „neue“ Mindestzuführungslogik zu einem höheren MCEV führen als die „alte“ Logik? Bei welchem Versicherungsbestand würde die „neue“ Logik zu einem niedrigeren MCEV führen?

### Lösungsvorschlag:

- a) (2 Punkte) Die Formel für die „alte“ Mindestzuführung lautet:

$$\text{MZV(alt)} = \text{MAX}(0, 0.9 * \text{KE} - \text{RZ}) + \text{MAX}(0, 0.75 * \text{RE}) + \text{MAX}(0, 0.5 * \text{ÜE})$$

- b) (4 Punkte) Die Formel für die „neue“ Mindestzuführung lautet:

$$\text{MZV(neu)} = \text{MAX}(0, \text{MAX}(\text{MIN}(0, \text{KE} - \text{RZ}), 0.9 * \text{KE} - \text{RZ}) + \text{MAX}(0, 0.9 * \text{RE}) + \text{MAX}(0, 0.5 * \text{ÜE}))$$

- c) (3 Punkte) Es gilt:

$$\text{MZV(alt)} = \text{MAX}(0, 0.9 * 8 - 10) + \text{MAX}(0, 0.75 * 2) + \text{MAX}(0, 0.5 * 2) = 2.5.$$

$$\begin{aligned} \text{MZV(neu)} &= \text{MAX}(0, \text{MAX}(\text{MIN}(0, 8-10), 0.9 * 8 - 10) + \text{MAX}(0, 0.9 * 2) + \text{MAX}(0, 0.5 * 2)) \\ &= \text{MAX}(0, -2 + 1.8 + 1) = 0.8. \end{aligned}$$

- d) (3 Punkte) Betrachten wir zunächst die „schlechten“ Kapitalmarktszenarien, bei denen die Kapitalerträge nicht zur Bedeckung der rechnungsmäßigen Zinsen ausreichen ( $\text{KE} < \text{RZ}$ ), aber das Risikoergebnis RE und/oder das Übrige Ergebnis ÜE positiv sind. In solchen Szenarien hat der Versicherer gemäß der „neuen“ Logik eine Möglichkeit zur Querverrechnung der Verluste aus Kapitalanlagen mit den Gewinnen aus den anderen Quellen, die gemäß der „alten“ Logik nicht gegeben war. Dadurch kann es unter der „neuen“ Logik zu geringeren Mindestzuführungen in schlechten Szenarien kommen, was zu einem höheren MCEV führen kann.

Die „neue“ Logik kann zu einem geringeren MCEV führen, da der Versicherungsnehmer gemäß dieser Logik mit mindestens 90% statt mit mindestens 75% am Risikoergebnis zu beteiligen ist.

- e) (3 Punkte) Betrachten wir zunächst einen Bestand, der viele Rentenversicherungen mit einem Garantiezins von 4% und einige (profitable) Risikoversicherungen aufweist. Bei einem solchen Bestand würde die „neue“ Mindestzuführungslogik zu einem höheren MCEV führen. Es ist nämlich damit zu rechnen, dass die Kapitalerträge in einer Reihe „schlechter“ Szenarien nicht ausreichen würden, um den Garantiezins von 4% zu erwirtschaften. In solchen Szenarien wäre die „neue“ Logik vorteilhafter für den Aktionär

Bemerkung: Für eine Begründung, vgl. Lösungsvorschlag zum Aufgabenteil (d).

Betrachten wir nun einen „reinen“ Risikoversicherer, der positive Risikoergebnisse aufweist. Bei einem solchen Versicherer kann die Anwendung der „neuen“ Mindestzuführungslogik zu einem geringeren MCEV führen.

Bemerkung: Für eine Begründung, vgl. Lösungsvorschlag zum Aufgabenteil (d).

### Aufgabe 3) Zinsänderungsrisiko (15 Punkte)

Sie arbeiten in der Kapitalanlage eines Lebensversicherungsunternehmens. Ihr Unternehmen hat eine Erlebensfallversicherung verkauft die in 15 Jahren ausläuft und dann eine Leistung von 1000 € zahlt.

Sie möchten ihr Unternehmen für diese Police durch eine geschickte Kapitalanlage gegen Zinsänderungsrisiken immunisieren. Auf dem Kapitalmarkt gibt es nur zwei Nullkuponanleihen mit Auszahlungen in 10 Jahren bzw. in 20 Jahren. Der jährliche, konstante Zins betrage für beide Anlagen 2%. Dieser Zins soll auch für die Bestimmung des Marktwertes der Verpflichtungen verwendet werden.

- a) (1 Punkt) Erklären Sie, was man in der Lebensversicherung unter dem Duration Gap versteht.
- b) (3 Punkte) Beschreiben Sie kurz den Ansatz und das Ziel des Duration-Matching und nennen Sie zwei Nachteile / Probleme des Ansatzes.
- c) (6 Punkte) Bilden Sie aus den oben genannten Anlagen ein Duration Matching Portfolio, wobei der Marktwert der Kapitalanlagen dem Marktwert der Verbindlichkeiten entsprechen soll.

Hinweis: Für einen Cashflow  $C_1, \dots, C_m$ , einen konstanten Diskontierungszins  $r$  und den zugehörigen Barwert

$$BW(r) = \sum_{j=1}^m C_j * (1 + r)^{-j}$$

ist die Immunisierungs-Duration („Macaulay Duration“) definiert durch

$$D(BW; r) = -\frac{dBW(r)}{dr} * \left(\frac{1+r}{BW(r)}\right) = \frac{\sum_{j=1}^m j * C_j * (1+r)^{-j}}{\sum_{j=1}^m C_j * (1+r)^{-j}}$$

- d) (5 Punkte) Neben dem Thema Zinsimmunisierung beschäftigt sich Ihr Unternehmen aktuell mit weiteren Herausforderungen, die sich aus dem aktuellen Zinsniveau ergeben.
  - i) (2 Punkte) In 2015 lagen die Nettoverzinsung Ihres Unternehmens bei 4,5% und der durchschnittliche Garantiezins bei 3%. Erklären Sie, vor welchen Herausforderungen Ihr Unternehmen trotz dieser „Zinsmarge“ aktuell und in den nächsten Jahren steht und warum es sich um keine echte Zinsmarge handelt.
  - ii) (3 Punkte) Warum können kurzfristig auch steigende Zinsen ein Problem für Ihr Unternehmen darstellen? Gehen Sie dabei auf Risiken der Aktivseite, der Bestandsgröße und des ZZR-Zuführungsbedarfs ein.

#### Hinweise:

- Zur Berechnung der Nettoverzinsung werden von sämtlichen (ordentlichen und außerordentlichen) Erträgen aus Kapitalanlagen die gesamten Aufwendungen für Kapitalanlagen abgezogen und durch den durchschnittlichen Jahresbestand der Kapitalanlagen geteilt.
- Zur Berechnung der Zinszusatzreserve wird der sogenannte „Referenzzinssatz“ verwendet. Dieser ergibt sich als der zehnjähriger Durchschnittswert der Jahresdurchschnitte über die Monatsendstände der zehnjährigen Nullkupon-Euro-Swapraten.

### Lösungsvorschlag:

- a) (1 Punkt) Das Duration Gap beschreibt einen möglichen „Mismatch“ zwischen Aktiv- und Passivseite, d.h. dass das Auszahlungsprofil für (Ablauf-) Leistungen nicht dem Zahlungsprofil der Kapitalanlagen entspricht. Üblicherweise ist bei Lebensversicherungen die Duration der Passivseite größer als die Duration der Aktivseite. Dies führt dazu, dass sich Zinsänderungen stärker auf den Marktwert der Passiva als auf den Marktwert der Aktiva auswirken.
- b) (3 Punkte) Anstelle einer vollständigen Äquivalenz der Zahlungsströme wie beim Cashflow Matching, hat Duration Matching das Ziel, dass die Zinssensitivität der Assets gleich der Zinssensitivität der Liabilities sein soll.

Dies wird dadurch erreicht, in dem die Duration der Aktiv- und Passivseite aufeinander abgestimmt wird.

Probleme:

- Duration ist nur für Bonds definiert. Daher nur eingeschränkte Auswahl der Assets -> verminderte Renditemöglichkeiten sowie eingeschränkte Diversifikation.
  - Durch laufende Umschichtungen entstehen hohe Transaktionskosten
  - Ansatz geht von einer flachen Zinsstrukturkurve aus. Es wird von einem fristigkeitsunabhängigen, konstanten Zins ausgegangen
  - Funktioniert nur bei Parallelverschiebungen der Zinsstrukturkurve
- c) (6 Punkte) Seien die Cashflows der Aktivseite gegeben durch  $CFA_1, \dots, CFA_m$  und die Cashflows der Passivseite durch  $CFP_1, \dots, CFP_m$ . Für einen gegebenen Diskontierungszins  $r$  lassen sich die Gesamtverpflichtungen  $L_0$ , bzw. die bedeckenden Kapitalanlagen  $A_0$  zum Zeitpunkt 0 darstellen durch

$$A_0(r) = \sum_{j=1}^m CFA_j * (1+r)^{-j} = CFA_1 * 1,02^{-10} + CFA_2 * 1,02^{-20}$$
$$L_0(r) = \sum_{j=1}^m CFP_j * (1+r)^{-j} = 1000 * 1,02^{-15}$$

Laut Aufgabenstellung soll gelten:  $A_0(r) = L_0(r)$ .

Daraus folgt:

$$CFA_1 * 1,02^{-10} + CFA_2 * 1,02^{-20} = 1000 * 1,02^{-15} = 743,01$$
$$\Leftrightarrow CFA_1 = (1000 * 1,02^{-15} - CFA_2 * 1,02^{-20}) * 1,02^{10} (*)$$

Duration Matching fordert nun, dass gilt

$$D(A_0; r) = -\frac{dA_0(r)}{dr} = D(L_0; r) = -\frac{dL_0(r)}{dr}$$

Es gilt:

$$D(L_0; r) = \frac{15 * 1000 * 1,02^{-15}}{1000 * 1,02^{-15}} = 15$$

$$D(A_0; r) = \frac{10 * CFA_1 * 1,02^{-10} + 20 * CFA_2 * 1,02^{-20}}{CFA_1 * 1,02^{-10} + CFA_2 * 1,02^{-20}} = D(L_0; r) = 15$$

Mit (\*) folgt

$$D(A_0; r) = \frac{10 * (1000 * 1,02^{-15} - CFA_2 * 1,02^{-20}) * 1,02^{10} * 1,02^{-10} + 20 * CFA_2 * 1,02^{-20}}{(1000 * 1,02^{-15} - CFA_2 * 1,02^{-20}) * 1,02^{10} * 1,02^{-10} + CFA_2 * 1,02^{-20}}$$

$$= \frac{10 * 1000 * 1,02^{-15} - 10 * CFA_2 * 1,02^{-20} + 20 * CFA_2 * 1,02^{-20}}{1000 * 1,02^{-15}} = 15 = D(L_0; r)$$

Daraus folgt

$$CFA_2 = \frac{15 * 1000 * 1,02^{-15} - 10 * 1000 * 1,02^{-15}}{10 * 1,02^{-20}} = 5 * 100 * 1,02^5 = 552,04$$

$$CFA_1 = 1000 * 1,02^{-5} - CFA_2 * 1,02^{-10} = 500 * 1,02^{-5} = 452,68$$

- d) i) (2 Punkte) Aktuell nutzen viele Unternehmen zur Finanzierung der ZZR-Zuführung Erträge aus der Realisierung von Bewertungsreserven. Diese Realisierung erhöht das Kapitalanlageergebnis und führt somit zu einer verzerrten Nettoverzinsung. In den vergangenen Jahren ist dadurch im Marktdurchschnitt eine deutlich über dem Durchschnittskupon und über der laufenden Durchschnittsverzinsung liegende Nettoverzinsung beobachtbar.

Wenn das Zinsniveau langfristig niedrig bleibt und somit hohe Bewertungsreserven zur Verfügung stehen, kann es zu Problemen kommen, wenn die Zuführungen zur ZZR höher als die verfügbaren Bewertungsreserven sind. Ebenso muss langfristig der durchschnittliche Rechnungszins verdient werden, um die langfristigen Zinsversprechen an die Versicherungsnehmer zu erfüllen. Die Erwirtschaftung des dazu notwendigen Nettozinses stellt bei den aktuellen Markttrenditen für die Neuanlage eine Herausforderung dar.

ii) (3 Punkte)

Abschreibungsbedarf: Für festverzinsliche Wertpapiere sinkt bei steigenden Zinsen der Marktwert. Dies kann zu Abschreibungen führen.

Storno / Massenstorno: Auf der Passivseite kann eine Lebensversicherung an Attraktivität im Vergleich zu Bankprodukten verlieren, da die Gesamtverzinsung dem Marktzins nur verspätet folgen kann. Stichwort: Dynamisches Versicherungsnehmer-Verhalten.

ZZR-Zuführung: Die ZZR-Zuführungen für die nächsten Jahre sind aufgrund der Verwendung des Zehnjahresmittels bei der Ermittlung des Referenzzinssatzes sehr gut planbar. Demgegenüber stehen stille Bewertungsreserven, die mit der Kapitalmarktentwicklung schwanken. Wenn die Zinsen abrupt steigen, sinkt der Referenzzins der Zinszusatzreserve wegen des Zehnjahresmittels weiter, d.h. die Zinszusatzreserve muss weiter bedient werden. Die Bewertungsreserven sinken allerdings, bis keine Reserven mehr für Realisierungen verfügbar sind.

#### Aufgabe 4) Reserverisiko (22 Punkte)

Anmerkung: In dieser Aufgabe sind die absoluten Werte in ganzen Mio. Euro angegeben. Runden Sie die Ergebnisse bitte auf ganze Mio. Euro.

Die Feldafinger Brandkasse (FFBK) überlegt den Kauf der Wedemärker Cargo Versicherung (WCV), welche ausschließlich Transportversicherung im Portfolio hat. Für diese Übernahme soll nun der Bestand dieser Gesellschaft durchleuchtet werden. Sie sind damit beauftragt, die Wirkung dieser Verschmelzung auf das Interne Modell der FFBK zu bestimmen, zunächst nur für das Reserverisiko. Es liegt Ihnen leider nur das folgende inkrementelle Zahlungsdreieck vor:

	Abwicklungsjahre			
Anfalljahre	1	2	3	4
2012	40	20	10	5
2013	40	30	14	
2014	60	20		
2015	50			

Werte in Mio. Euro

#### a) (8 Punkte) Parametrisierung

- i. (2 Punkte) Bestimmen Sie zunächst anhand der in dem Skript verwendeten Chain-Ladder Methodik basierend auf dem kumulierten Zahlungsdreieck die aktuarielle Best-Estimate Reserve für das Gesamtdreieck ohne Tailanpassung.
- ii. (6 Punkte) Um nun eine Verteilung der Reserven für Ihr internes Modell zu erzeugen, entscheiden Sie aufgrund der sehr dünnen Datenlage, den Marktfaktor i.H.v. 11% aus der Standardformelberechnung als Variationskoeffizient zu verwenden. Ermitteln Sie die Parameter einer Lognormalverteilung  $LN(m,s)$  gemäß Momentenschätzer.

Hinweis: Rechnen Sie mit einer erwarteten Reserve i.H.v. 100 Mio. Euro falls Sie kein Ergebnis aus a) i. haben. Erwartungswert und Varianz der Lognormalverteilung lassen sich wie folgt bestimmen.

$$E(X) = \exp\left(m + \frac{s^2}{2}\right) \quad \text{Var}(X) = \exp\left(2m + s^2\right) \cdot \left(\exp\left(s^2\right) - 1\right)$$

#### b) (9 Punkte) Bruttoisiko

- i. (4 Punkte) Bestimmen Sie anhand der unter a) gerechneten Informationen die benötigte Reserve zum 200jahres-Ereignis und das Risiko analytisch.

Hinweis: Verwenden Sie die Tabelle aus dem Anhang und die Tatsache, dass wenn  $LN(m,s)$  lognormalverteilt ist,  $\frac{\ln(LN(m,s)) - m}{s}$  standardnormalverteilt ist.

- ii. (5 Punkte) Aus Ihrem Internen Modell der FFBK kennen Sie die folgenden Größen für die Sparten Wohngebäude (VGV) und Kraftfahrt-Haftpflicht (KH).



Sparte	Best-Estimate Reserve	Reserverisiko
KH	81	5
VGW	13	9

Werte in Mio. Euro

Sie führen nun eine Monte-Carlo-Simulation mit 1.000 Pfaden auf Basis der ermittelten Werte durch und erhalten die folgenden Ergebnisse, welche nach der Gesamtreserve der FFBK inkl. WCV sortiert sind.

Pfad sortiert	KH	VGW	Transport	Gesamt
1	85	15	100	200
2	84	15	97	196
3	84	15	96	195
4	85	10	98	193
5	83	14	96	192
6	89	10	94	192
7	87	18	87	191
8	85	10	97	191
9	82	14	95	191
10	83	15	92	190
11	85	13	91	190
12	83	14	93	189
13	84	15	91	189
14	84	20	85	189
15	85	15	87	188
16	82	14	91	187
17	87	14	86	187
18	82	17	88	187
19	86	15	86	187
20	84	18	84	186
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Werte in Mio. Euro

Ermitteln Sie das Reserverisiko für die FFBK insgesamt, d.h. inkl. der neuen Sparte zum 200jahres Ereignis. Wie hoch ist der Diversifikationseffekt?

Hinweis: Rechnen Sie mit einem Risiko i.H.v 20 Mio. Euro für Transport falls Sie kein Ergebnis aus b) i. haben.

c) (5 Punkte) Allokation

Allozieren Sie das Risikokapital nun wieder auf die einzelnen Sparten. Benutzen Sie das proportionale Allokationsverfahren gemäß Skript.

Wie hoch ist das Gesamtrisiko, falls das Risikomaß Tail Value at Risk (TVaR) anstatt Value at Risk (VaR) verwendet wird bei gleichem Konfidenzniveau.

Allozieren Sie auch dieses Risiko nun gemäß TVaR-Allokation gemäß Skript.

**Lösungsvorschlag:**

a) (8 Punkte)

i) (2 Punkte) Zunächst wird das kumulierte Zahlungsdreieck erzeugt.

Anfalljahre	Abwicklungsjahre			
	1	2	3	4
2012	40	60	70	75
2013	40	70	84	
2014	60	80		
2015	50			

Werte in Mio. Euro

Die Chain-Ladder-Faktoren ermitteln sich zu.

Anfalljahre	Übergänge		
	1:2	2:3	3:4
2012	1,50	1,17	1,07
2013	1,75	1,20	
2014	1,33		
2015			
<b>CL-Faktoren</b>	1,50	1,18	1,07

Wendet man diese Faktoren auf das kumulierte Dreieck an, erhält man das abgewickelte Dreieck und die Best-Estimate-Reserve in Summe i.H.v. 73 Mio. Euro..

Anfalljahre	Abwicklungsjahre				Reserve
	1	2	3	4	
2012	40	60	70	75	0
2013	40	70	84	90	6
2014	60	80	95	102	22
2015	50	75	89	95	45
					73

Werte in Mio. Euro

ii) (6 Punkte) Um die Parameter der Lognormalverteilung zu ermitteln, bestimmt man aus den Gleichungen für Erwartungswert und Varianz die Parameter  $m$  und  $s^2$ .

$$m = \ln \left( \frac{E^2(X)}{\sqrt{\text{Var}(X) + E^2(X)}} \right) \quad s^2 = \ln \left( \frac{\text{Var}(X)}{E^2(X)} + 1 \right)$$

Mit  $E(X) = 73$  (Mio. Euro) und  $Std(X) = 11\% \cdot E(X) = 8,03$  (Mio. Euro) erhält man die Parameter  $m \approx 4,284$  und  $s \approx 0,1097$ .

b) (9 Punkte)

i) (4 Punkte) Es gilt

$$P(LN(m, s) \leq x) = P(\ln(LN(m, s)) \leq \ln(x)) = P\left(\frac{\ln(LN(m, s)) - m}{s} \leq \frac{\ln(x) - m}{s}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\ln(x) - m}{s}\right)$$

Um das Risiko zu bestimmen, ermitteln wir daher das 99,5% Quantil der zuvor parametrisierten Verteilung LN(m,s) über  $x(99,5\%) = \exp(m + \Phi^{-1}(99,5\%) \cdot s)$ . Mit der Tabelle aus dem Anhang und den unter a)ii) ermittelten Parametern erhält man eine Reserve i.H.v. 96 Mio. Euro als 200jahres Ereignis. Zieht man den Mittelwert i.H.v. 73 Mio. Euro ab, erhält man ein Risiko i.H.v. 23 Mio. Euro.

- ii) (5 Punkte) Bei 1.000 Simulationspfaden bestimmt der 5. größte gemäß Skript das 200jahres Ereignis. Dadurch erhält man eine Reserve i.H.v. 192 Mio. Euro bei einem Erwartungswert i.H.v.  $81+13+73=167$  Mio. Euro. Das Risiko liegt somit bei 25 Mio. Euro und der Diversifikationseffekt ergibt sich zu  $5+9+23-25=12$  Mio. Euro.

- c) (5 Punkte)

Bei einer proportionalen Allokation wendet man den Anteil des Risikos der einzelnen Sparte an der Summe der Risiken auf das Gesamtrisiko an. In diesem Fall erhalten wir für KH 3 Mio. Euro, für VGV 6 Mio. Euro und für Transport 16 Mio. Euro.

Der TvaR des Gesamtergebnisses ermittelt sich über den Erwartungswert der 4 schlechtesten Pfade zu  $(200+196+195+193)/4=196$  Mio. Euro und somit ergibt sich das Risiko  $196-167=29$  Mio. Euro. Führt man diese Rechnung auch für die Sparten mit denselben Pfaden durch erhält man für KH 4 Mio. Euro, für VGV 1 Mio. Euro und Transport 24 Mio. Euro Risikokapital (durch Rundung erhält man in Summe 30 anstatt 29 Mio. Euro)

### Aufgabe 5) Prämienrisiko (23 Punkte)

- a) (12 Punkte) Sie arbeiten im Aktuariat eines Kompositversicherers und sind mit der Modellierung der Sparte Privathaftpflicht im Rahmen Ihres Internen Modells beschäftigt. Ihnen stehen die folgenden Bruttodaten der Kalenderjahre 2011-2015 zur Verfügung:

Jahr	2011	2012	2013	2014	2015
Anzahl Verträge	1.000	1.200	1.800	2.000	2.400
Gesamtaufwand (in Mio. EUR)	84,0	90,0	145,3	182,6	197,8
Basisschadenaufwand (in Mio. EUR)	80,0	90,0	140,4	170,0	192,0
Großschadenaufwand (in Mio. EUR)	4,0	0,0	4,9	12,6	5,8
Einzelne Großschäden ab 1 Mio. EUR (in Mio. EUR)	4,0		1,0	1,1	1,6
			1,3	2,1	4,2
			2,6	3,2	
				6,2	

Außerdem wurde Ihnen folgendes Informationsblatt über drei Wahrscheinlichkeitsverteilungen an die Hand gegeben:

Verteilung	Verteilungsfunktion	Erwartungswert	Varianz
Binomial	$P(X \leq m) = \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, m \in \{0, \dots, n\}$	$np$	$np(1-p)$
Negativ Binomial	$P(X \leq m) = \sum_{k=0}^m \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k, k \in \mathbb{N}$	$r \frac{1-p}{p}$	$r \frac{1-p}{p^2}$
Pareto	$P(X \leq x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{x}\right)^\alpha$ für $x \geq \lambda$ .	$\frac{\alpha}{\alpha-1} \lambda$	$\frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$

Es gelten die üblichen Parameterrestriktionen  $0 < p < 1, n \in \mathbb{N}, r > 0, \alpha > 0, \lambda > 0$ .

- (1) (2 Punkte) Für das Jahr 2016 ist ein Exposure von 2.400 Verträgen geplant. Bestimmen Sie für jedes Jahr von 2011 bis 2015 das Produkt aus historischen Großschadenfrequenzen mit diesem Planexposure.
  - (2) (6 Punkte) Kalibrieren Sie für die in (1) ermittelte Schadenanzahlreihe mittels Momentenmethode eine geeignete Wahrscheinlichkeitsverteilung aus oben stehendem Informationsblatt. Ignorieren Sie Trends in der Zeitreihe und verwenden Sie die in (1) ermittelten Werte ohne weitere Exposuregewichtung.
  - (3) (4 Punkte) Für die Schadenhöhenverteilung passen Sie eine Paretoverteilung mit dem Wert  $\lambda = 1,0$  und  $\alpha = 1,2$  an. Der Leiter des Rückversicherungseinkaufs möchte das Geschäft mit einem per-risk-XL derart absichern, dass dieser XL für durchschnittlich nur 100 von 10.000 simulierten Großschäden nicht ausreicht, d.h. die Großschäden oberhalb des Plafonds liegen. Wie hoch sollte die Haftungstrecke des XLs mindestens sein, wenn der XL einen Selbstbehalt von 4 Mio. EUR hat? Hinweis: Verwenden Sie nur die Schadenhöhenverteilung.
- b) (11 Punkte) Am 01.01.2016 generiert die Sparte „Schlechtwetterversicherung“ Nettoprämieneinnahmen in Höhe von 230 Mio. EUR für Verträge, die für das Kalenderjahr 2016 abgeschlossen werden. Außerdem fallen zum 01.01.2016 Kosten in Höhe von 40 Mio. EUR an. Ihr Schadenmodell generiert einen erwarteten Netto-Ultimate für das Geschäftsjahr 2016 in Höhe von 200 Mio. EUR. Außerdem erwarten Sie das folgende Auszahlungsmuster für den Netto-Ultimate: 50% im ersten Jahr, 30% im zweiten Jahr und 20% im dritten Jahr (gehen Sie vereinfachend davon aus, dass sich die Entschädigungsleistungen immer zum Jahresende realisieren). Für dieses Geschäft benötigt die Sparte zum 01.01.2016 ein Risikokapital von 150 Mio. EUR.
- (1) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Combined Ratio einmal mit nominellen Werten und einmal unter Berücksichtigung von Diskonteffekten. Unterstellen Sie eine flache Zinskurve mit 5% p.a.. Ist das Geschäft profitabel?
  - (2) (5 Punkte) Bestimmen Sie die Permissible Combined Ratio, also diejenige nominell gerechnete Combined Ratio, bei welcher das Geschäft unter Einbezug von Diskonteffekten gerade noch profitabel ist. Hinweis: Wie hoch darf der Ultimate in diesem Fall höchstens sein (bei unveränderten Prämien, Kosten, Auszahlungsmuster und Zins)?

(3) (2 Punkte) Ist das Geschäft unter dem Gesichtspunkt der Wertorientierten Steuerung profitabel (RDR 8%)?

**Lösungsvorschlag:**

a) (12 Punkte)

(1) (2 Punkte) Bei einem Planexposure von 2.400 Verträgen erhält man die folgenden Werte:

Jahr	2011	2012	2013	2014	2015
Anzahl Verträge	1.000	1.200	1.800	2.000	2.400
Großschadenanzahl	1	0	3	4	2
Großschadenfrequenz	0,00100	0,00000	0,00167	0,00200	0,00083
...mal Planexposure	2,4	0,0	4,0	4,8	2,0

(2) (6 Punkte) Um eine Schadenanzahlverteilung an die auf das Planexposure hochgerechneten historischen Großschadenanzahlen per Momentenmethode zu kalibrieren (zur Auswahl stehen die beiden diskreten Verteilungen im Informationsblatt, also Binomial und Negative Binomialverteilung), müssen als erstes Erwartungswert und Varianz geschätzt werden. Nach der Aufgabenstellung wird die Stichprobe aus (1) direkt verwendet, d.h. ohne Trendbereinigung und ohne Gewichtung mittels Vertragszahlen:

Es ergibt sich als Erwartungswert  $(2,4 + 0,0 + 4,0 + 4,8 + 2,0) / 5 = 13,2 / 5 = 2,64$ .

Zur Schätzung der Varianz benötigen Sie die quadratische Abweichung der einzelnen Jahre zu diesem Wert. Man erhält:

Jahr	2011	2012	2013	2014	2015
GS-Frequenz mal Planexposure	2,4	0,0	4,0	4,8	2,0
quadr. Abweichung zu 2.64	0,0576	6,9696	1,8496	4,6656	0,4096

Die Summe der quadratischen Abweichungen ergibt sich zu 13,952, so dass man als Schätzwert für die (korrigierte) Stichprobenvarianz den Wert  $13,952 / (5 - 1) = 3,488$  erhält.

Die Varianz ist somit größer als der Erwartungswert, so dass eine Negative Binomialverteilung angepasst werden muss. Das Gleichungssystem für Erwartungswert und Varianz löst man hinsichtlich der Parameter  $r$  und  $p$  auf und man erhält die folgenden Gleichungen:

$$p = \frac{E(X)}{Var(X)} \text{ sowie } r = \frac{E^2(X)}{Var(X) - E(X)}$$

Für die ermittelten Momente ergibt sich somit  $p = 0,7569$  und  $r = 8,2189$ .

Hinweis: Verwendet man als alternative Schätzfunktion für die Varianz den unkorrigierten Varianzschätzer, erhält man für die Varianz den Wert 2,7904. Dies führt zu den Parametern  $p = 0,9461$  und  $r = 46,3404$ .

- (3) (4 Punkte) Zu bestimmen ist die Quantilsfunktion der Paretoverteilung (vgl. Informationsblatt). Diese bestimmt sich zu

$$x = \frac{\lambda}{(1-y)^{1/\alpha}} = \frac{1,0}{(1-y)^{1/1,2}}$$

Das gesuchte Quantil ist das untere  $1-100/10.000=0,99$ -Quantil. Dieses errechnet sich zu 46,42. Es sind also durchschnittlich 100 von 10.000 simulierten Großschäden größer als 46,42 Mio. EUR. Die Haftungsstrecke des XLs muss also  $46,42 - 4 = 42,42$  Mio. EUR betragen.

- b) (11 Punkte)

- (1) (4 Punkte) Die Combined Ratio CR ist der Quotient aus Summe von Kosten und Schadenaufwand mit der Prämie. Es ergibt sich also  $CR = (40 + 200) / 230 = 1,0438$ . Unter Einbezug von Diskonteffekten bestimmt man den diskontierten Schadenaufwand zu

$$\frac{200 * 50\%}{(1 + 0,05)} + \frac{200 * 30\%}{(1 + 0,05)^2} + \frac{200 * 20\%}{(1 + 0,05)^3} = 184,21.$$

Unter Berücksichtigung von Diskonteffekten ergibt sich somit eine Combined Ratio in Höhe von  $(40 + 184,21) / 230 = 0,9748$ . Nominell betrachtet ist das Geschäft nicht profitabel. Bei Verwendung diskontierter Werte hingegen schon.

- (2) (5 Punkte) Aus Teil (1) ergibt sich ein Diskonteffekt von  $D = \frac{184,21}{200} = 92,1\%$ . Ein Ultimate  $U_{max}$ , bei dem das Geschäft gerade noch profitabel ist, errechnet sich durch die Gleichung:

$$\frac{Kosten + U_{max} * D}{P} = 1 \Leftrightarrow U_{max} = \frac{P - K}{D}$$

Es bestimmt sich  $U_{max}$  zu  $U_{max} = \frac{230-40}{92,1\%} = 206,28$ . Die Permissible Combined Ratio ist somit  $CR_{perm} = \frac{40+206,28}{230} = 1,071$ .

- (3) (2 Punkte) Unter dem Gesichtspunkt der Wertorientierten Steuerung müssen noch Kapitalkosten angesetzt werden. Diese bestimmen sich zu  $150 * 8\% = 12$  Mio. EUR. Eine Kapitalkosten beinhaltende Combined Ratio unter Berücksichtigung von Diskonteffekten berechnet sich damit zu  $(40 + 12 + 184,21) / 230 = 1,027$ . Damit ist das Geschäft nicht profitabel.

Hinweis: Der RORAC bestimmt sich zu  $(230 - 40 - 184,21)/150 = 3,86\%$ , ist somit geringer als die RDR von 8%. Der EVA bestimmt sich zu  $230 - 40 - 184,21 - 12 = -6,21$  Mio. EUR, ist somit negativ. Auch bezüglich dieser beiden Kriterien ist das Geschäft nicht profitabel.

Anhang:

**Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung:**

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	1,00	0,841345	2,00	0,977250	3,00	0,998650
0,02	0,507978	1,02	0,846136	2,02	0,978308	3,02	0,998736
0,04	0,515953	1,04	0,850830	2,04	0,979325	3,04	0,998817
0,06	0,523922	1,06	0,855428	2,06	0,980301	3,06	0,998893
0,08	0,531881	1,08	0,859929	2,08	0,981237	3,08	0,998965
0,10	0,539828	1,10	0,864334	2,10	0,982136	3,10	0,999032
0,12	0,547758	1,12	0,868643	2,12	0,982997	3,12	0,999096
0,14	0,555670	1,14	0,872857	2,14	0,983823	3,14	0,999155
0,16	0,563559	1,16	0,876976	2,16	0,984614	3,16	0,999211
0,18	0,571424	1,18	0,881000	2,18	0,985371	3,18	0,999264
0,20	0,579260	1,20	0,884930	2,20	0,986097	3,20	0,999313
0,22	0,587064	1,22	0,888768	2,22	0,986791	3,22	0,999359
0,24	0,594835	1,24	0,892512	2,24	0,987455	3,24	0,999402
0,26	0,602568	1,26	0,896165	2,26	0,988089	3,26	0,999443
0,28	0,610261	1,28	0,899727	2,28	0,988696	3,28	0,999481
0,30	0,617911	1,30	0,903200	2,30	0,989276	3,30	0,999517
0,32	0,625516	1,32	0,906582	2,32	0,989830	3,32	0,999550
0,34	0,633072	1,34	0,909877	2,34	0,990358	3,34	0,999581
0,36	0,640576	1,36	0,913085	2,36	0,990863	3,36	0,999610
0,38	0,648027	1,38	0,916207	2,38	0,991344	3,38	0,999638
0,40	0,655422	1,40	0,919243	2,40	0,991802	3,40	0,999663
0,42	0,662757	1,42	0,922196	2,42	0,992240	3,42	0,999687
0,44	0,670031	1,44	0,925066	2,44	0,992656	3,44	0,999709
0,46	0,677242	1,46	0,927855	2,46	0,993053	3,46	0,999730
0,48	0,684386	1,48	0,930563	2,48	0,993431	3,48	0,999749
0,50	0,691462	1,50	0,933193	2,50	0,993790	3,50	0,999767
0,52	0,698468	1,52	0,935745	2,52	0,994132	3,52	0,999784
0,54	0,705401	1,54	0,938220	2,54	0,994457	3,54	0,999800
0,56	0,712260	1,56	0,940620	2,56	0,994766	3,56	0,999815
0,58	0,719043	1,58	0,942947	2,58	0,995060	3,58	0,999828
0,60	0,725747	1,60	0,945201	2,60	0,995339	3,60	0,999841
0,62	0,732371	1,62	0,947384	2,62	0,995604	3,62	0,999853
0,64	0,738914	1,64	0,949497	2,64	0,995855	3,64	0,999864
0,66	0,745373	1,66	0,951543	2,66	0,996093	3,66	0,999874
0,68	0,751748	1,68	0,953521	2,68	0,996319	3,68	0,999883
0,70	0,758036	1,70	0,955435	2,70	0,996533	3,70	0,999892
0,72	0,764238	1,72	0,957284	2,72	0,996736	3,72	0,999900
0,74	0,770350	1,74	0,959070	2,74	0,996928	3,74	0,999908
0,76	0,776373	1,76	0,960796	2,76	0,997110	3,76	0,999915
0,78	0,782305	1,78	0,962462	2,78	0,997282	3,78	0,999922
0,80	0,788145	1,80	0,964070	2,80	0,997445	3,80	0,999928
0,82	0,793892	1,82	0,965620	2,82	0,997599	3,82	0,999933
0,84	0,799546	1,84	0,967116	2,84	0,997744	3,84	0,999938
0,86	0,805105	1,86	0,968557	2,86	0,997882	3,86	0,999943
0,88	0,810570	1,88	0,969946	2,88	0,998012	3,88	0,999948
0,90	0,815940	1,90	0,971283	2,90	0,998134	3,90	0,999952
0,92	0,821214	1,92	0,972571	2,92	0,998250	3,92	0,999956
0,94	0,826391	1,94	0,973810	2,94	0,998359	3,94	0,999959
0,96	0,831472	1,96	0,975002	2,96	0,998462	3,96	0,999963
0,98	0,836457	1,98	0,976148	2,98	0,998559	3,98	0,999966
1,00	0,841345	2,00	0,977250	3,00	0,998650	4,00	0,999968