



DAV

DEUTSCHE  
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Grundwissen

## **Modellierung**

gemäß Prüfungsordnung 3  
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 12.10.2018

*Hinweise:*

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 90 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 45 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 12 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

*Mitglieder der Prüfungskommission:*

Dr. Steve Brüske, Dr. Nora Gürtler, Dr. Björn Hille,  
Dr. Michael Leitschkis, Frank Schepers

**Aufgabe 1. [15 Punkte]**

Ein Kunde schließt einen Vertrag ab, welcher ihm nach Ablauf von 10 Jahren eine feste Auszahlung garantiert. Vor dem Ablauf der 10 Jahre besteht keine Möglichkeit zum Rückkauf, das Todesfallrisiko ist aufgrund der vorbildlichen Lebensführung des Versicherungsnehmers für diese Aufgabe zu ignorieren.

Der Kunde bezahlt für diese Leistung einen Einmalbeitrag in Höhe von EUR 10.000. Kostenzuschläge werden nicht erhoben, da die Gesellschaft ihr Geschäft auf der Insel der Glückseligen zum Nulltarif betreiben kann. Auch Kapitalkosten sind vernachlässigbar, Steuern wurden gerade abgeschafft.

Die garantierte Verzinsung beträgt 1,75% p.a., eine Überschussbeteiligung gibt es nicht.

Den Betrag zur Bedeckung der Verpflichtung investiert die Gesellschaft in einen ausfallsicheren Zero Bond mit 10 Jahren Laufzeit und einem Zins von 2% p.a. Dieser Zins wird als „sicher“ betrachtet. Der Rest des Geldes wird zunächst als risikolose Anlage geparkt.

a) [6 Punkte] Geben Sie die Werte für jedes Feld der skizzierten ökonomischen Bilanz zum Zeitpunkt des Abschlusses der Versicherung an:

Ökonomischer Wert der Aktiva	Freie ökonomische Eigenmittel
	Benötigtes Risikokapital
	Ökonomischer Wert der Verbindlichkeiten

b) [5 Punkte] Welche Risiken würden sich aus den folgenden Änderungen der Kapitalanlage für den Betrag zur Bedeckung der Verpflichtung ergeben?

Alternative Kapitalanlage	Zusätzliche Risiken
Unternehmensanleihe mit 10 jähriger Restlaufzeit und jährlicher Coupon-Zahlung	
Anlage in einen US Dollar denominierten Zero Bond mit 5 Jahren Laufzeit	
Anlage in einen ausfallsicheren Zero Bond mit 15 Jahren Restlaufzeit	

c) [4 Punkte] Für eine Risikobewertung möchten Sie das Ausfallrisiko spanischer Staatsanleihen abschätzen. Nennen Sie zwei Informationen, die Sie zur Abwägung heran ziehen könnten, und beschreiben Sie jeweils in einem Satz, welcher Vorbehalt jeweils besteht.

### Lösungsvorschlag Aufgabe 1:

a) [6 Punkte] Ökonomische Bilanz zum Zeitpunkt des Abschlusses der Versicherung (alle Beträge in EUR):

- Der ökonomische Wert der Aktiva entspricht dem geleisteten Einmalbeitrag i.H.v. EUR 10.000, da diese komplett zur Anlage bereit stehen.
- Der ökonomische Wert der Verbindlichkeiten entspricht der garantierten Ablaufleistung, diskontiert mit dem „sicheren“ Marktzins:

$$\frac{10.000 \cdot (1 + 1,75\%)^{10}}{(1 + 2\%)^{10}} = 9.758$$

- Die gesamten ökonomischen Eigenmittel entsprechen der Differenz aus den beiden vorhergehenden Positionen, also 242. Es wird kein Risikokapital benötigt, da keine Risiken vorliegen:
  - Die Fristigkeit der Kapitalanlage entspricht exakt derjenigen der Verbindlichkeit (welche aufgrund fehlender Rückkaufoption und Vernachlässigung Tod als fix betrachtet wird), so dass kein Wiederanlagerisiko besteht.
  - Bei Anlage zum „sicheren“ Zins besteht kein Ausfallrisiko.
  - Biometrische Risiken werden ebenso wie Kostenrisiken gemäß Aufgabenstellung ignoriert.

Damit betragen die freien ökonomischen Eigenmittel 242, und das benötigte Risikokapital ist 0.

b) [5 Punkte]

Alternative Kapitalanlage	Zusätzliche Risiken
Unternehmensanleihe mit 10 jähriger Restlaufzeit und jährlicher Coupon-Zahlung	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Wiederanlagerisiko für die jährlichen Coupons</li> <li>• Ausfallrisiko der Unternehmensanleihe</li> </ul>
Anlage in einen US Dollar denominierten ZeroBond mit 5 Jahren Laufzeit	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Wiederanlagerisiko nach 5 Jahren</li> <li>• Wechselkursrisiko EUR/USD</li> </ul>
Anlage in einen ausfallsicheren Zero Bond mit 15 Jahren Restlaufzeit	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Marktwertisiko bei Verkauf wegen Ablauf der Verbindlichkeit</li> </ul>

c) [4 Punkte]

- Historische Beobachtung über die letzten n Jahre: durch politische Stützung in der Euro-Zone waren Ausfälle weitgehend ausgeschlossen, so dass die Historie das heutige Risiko nicht notwendigerweise vollständig widerspiegelt.
- Differenz der Rendite spanischer Staatsanleihen zum „sicheren“ Zins: Diese beinhaltet neben echten Ausfallrisiken auch Kurs- bzw. Spreadrisiken.

## Aufgabe 2. [20 Punkte]

Sie beraten Herrn Gutmann, den CEO des Tierlebensversicherers Tierisch Sicher Leben AG in Tierplusland. Bitte geben Sie für jede Ihrer Empfehlungen zu den unten stehenden Fragestellungen jeweils eine kurze Begründung an.

- a) (Einführung, 2 Punkte) Der Bestand der Tierisch Sicher Leben weist bereits zwei sehr erfolgreiche Produktlinien auf, nämlich die Tier-Rentenversicherung (mit Garantiezins von 2%) und die Tier-Risikoversicherung. Welche dieser Produktlinien hätte in Realität nicht viel Erfolg gehabt? Bei welchen Tieren ist die andere Produktlinie auch in Realität bekannt?
- b) (Passiva, 4 Punkte) Herr Gutmann möchte gerne Versicherungen für Verbundene Tierleben über ein Jahr anbieten, wobei eine Leistung von 10.000 Talern bei Tod beider in der Police versicherten Tiere innerhalb des Jahres fällig wäre. Bitte unterstellen Sie eine einjährige Sterbewahrscheinlichkeit von 1% pro Tier, vernachlässigen Sie Kosten sowie Kapitalerträge und sprechen Sie eine Empfehlung pro oder contra einen solchen Tarif aus. Bitte geben Sie eine kurze Begründung inkl. kurzer Berechnung an.
- c) (Aktiva und mehr, 4 Punkte) Herr Gutmann möchte die Kundengelder soweit wie möglich in die Aktien der Vegan Max AG investieren. Für die Bilanzierung von Aktien fortschrittlicher Unternehmen wie Vegan Max gilt in Tierplusland das Extra Milde Niederstwertprinzip: Etwaige gemäß Niederstwertprinzip nötigen Abschreibungen können bei Bedarf einfach unterlassen werden. Bitte sprechen Sie eine Empfehlung pro oder contra ein Investment von über 50% der Kapitalanlagen in die Aktien von Vegan Max – wobei es in Tierplusland keine regulatorische Beschränkung der Aktienquoten gibt. Bitte geben Sie eine kurze Begründung an.
- d) (Kapitalmarkt, 4 Punkte) Unabhängig von Ihren Empfehlungen zu (a) - (c) betrachten Sie nun die folgende Situation:
- Projektionshorizont von 2 Jahren
  - Kapitalanlage umfasst Aktien von Vegan Max mit einer Quote  $X > 0\%$
  - Risikoloser Zins von 0% für jede Restlaufzeit in jedem Projektionsjahr
  - Es gebe nur drei mögliche, gleich wahrscheinliche, Szenarien für die Vegan Max-Aktie. Die in der folgenden Tabelle angegebenen Kurse werden jeweils zum Ende des betreffenden Jahres gestellt:

Szenario\Projektionsjahr	0	1	2
1	1.00	1.00	1.15
2	1.00	1.00	1.00
3	1.00	1.00	0.80

- i. (1 Punkt) Welche erwartete 2-Jahres-Rendite der Vegan Max-Aktie über den 2-Jahres-Horizont wird hierbei unterstellt?
- ii. (3 Punkte) Kann dieses Szenarien-Paket als risikoneutral bezeichnet werden? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.
- e) (Gesamtunternehmen, 6 Punkte) Bitte entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen i.-iii. richtig bzw. falsch sind und geben Sie jeweils kurze Begründungen an.
- i. (2 Punkte) Da im CE-Szenario keine Volatilitäten modelliert werden, werden etwaige Garantien und Optionen der Tierlebensversicherung in einem CE PVFP ignoriert.
- ii. (2 Punkte) Wenn dem Tierhalter keine Optionen (Rückkaufsrecht, Kapitalwahl) eingeräumt werden, dann muss der TV G&O gleich Null sein.
- iii. (2 Punkte) Wenn man dem Tierhalter eine Überschussbeteiligung in Höhe von 80% der Kapitalerträge – sofern positiv – fest zusichern würde, dann würde dies den TV G&O erhöhen.

### Lösungsvorschlag Aufgabe 2:

- a) (2 Punkte) In Realität gibt es kaum Bedarf für die Tier-Rentenversicherung. Solange der Tierhalter lebt, kommt er für das Tier auf, während die Versorgung des Tieres bei Ableben des Tierhalters etwa durch eine Risikoversicherung für den Tierhalter sichergestellt werden könnte. Die Tier-Risikoversicherung ist hingegen zumindest bei Pferden bekannt, da die Anschaffungskosten bei einem Pferd recht hoch sein können.

- b) (4 Punkte) Nach dem Äquivalenzprinzip könnten wir den Beitrag B für eine solche einjährige Versicherung wie folgt berechnen, wenn wir nur die Sterblichkeit beachten und die Risiken als unabhängig annehmen würden:  $B = 0.01 * 0.01 * 10.000 \text{ Taler} = 1 \text{ Taler}$ . Am Ergebnis sehen wir, dass ein solcher Tarif wirtschaftlich kaum Sinn ergeben würde – die Tierisch Sicher Leben würde gegen eine nicht nennenswerte Prämie signifikant ins Risiko gehen, der Ausgleich im Kollektiv würde (mangels eines großen Bestandes Verbundener Tierleben) eher schlecht funktionieren, die Risiken wären nicht unbedingt unabhängig etc. => Empfehlung gegen einen solchen Tarif.
- c) (4 Punkte) Die Möglichkeit, Abschreibungen zu unterlassen, kann in manchen Situationen hilfreich sein. Allerdings würde man bei Versicherungsfällen Mittel benötigen, um die Leistungen auszuzahlen. Wenn dafür Aktien verkauft werden müssen, dann erfolgt ein Verkauf zum Marktwert – welcher nach einem Aktiencrash recht niedrig sein kann. Bei einem Aktieninvestment in Höhe von über 50% der Kapitalanlagen wäre dieses Risiko dementsprechend gravierend. => Empfehlung gegen ein solches Investment in Aktien von Vegan Max, allenfalls für eine kleine Beimischung dieser Aktien.
- d) (4 Punkte)
- i. (1 Punkt) Über den Horizont von 2 Jahren ergibt sich eine erwartete Performance der Vegan Max – Aktie in Höhe von  $(1.15 - 1) * 1/3 + (1 - 1) * 1/3 + (0.8 - 1) * 1/3 = - 1.67\%$ .
  - ii. (3 Punkte) Da der risikofreie Zins 0% beträgt, erwirtschaftet die Vegan Max-Aktie im Durchschnitt nicht den risikofreien Zins. Folglich ist das angegebene Szenarien-Paket nicht risikoneutral.
- e) (6 Punkte)
- i. (2 Punkte) Falsch. Es werden zwar keine Zeitwerte von Garantien und Optionen im CE-Szenario berücksichtigt, aber deren innere Werte schon.
  - ii. (2 Punkte) Falsch, denn auch Zinsgarantien oder eine kapitalmarktabhängige Überschussbeteiligung können zu einem TV G&O führen.
  - iii. (2 Punkte) Richtig, denn dies würde eine Asymmetrie des Geschäftsmodells zu Lasten des Aktionärs implizieren – bei schlechter Kapitalanlage-Performance müsste er die Verluste ausgleichen, obwohl er bei guter Performance einen Teil der Gewinne abgeben müsste.

### Aufgabe 3. [15 Punkte]

Die Closed Life Lebensversicherung ist für den Neuzugang geschlossen. Um das Potenzial des Bestandes zu nutzen, bietet ihr die Telemarketinggesellschaft IchVerTix an, eine Aktion zum Verkauf von Zusatzversicherungen durchzuführen. Die Policen würden an einen befreundeten Schaden-Unfallversicherer weiter gegeben, für die Closed Life bliebe pro Abschluss eine Marge von EUR 10.

IchVerTix möchte für diese Leistung eine Einmalzahlung von EUR 200.000, sowie EUR 1 pro kontaktiertem Kunden. Sie kontaktiert für jeden im Folgenden betrachteten Teilbestand alle Kunden dieses Teilbestands und erwartet für den Gesamtbestand stets eine Annahmquote von 15%.

- a) (5 Punkte) Ab welcher Bestandsgröße (Anzahl der Kunden)  $n$  könnte die Aktion unter diesen Annahmen profitabel für die Closed Life sein? Geben Sie die Formel zur Herleitung des Gewinns an, veranschaulichen Sie diese in Abhängigkeit von der Bestandsgröße und geben Sie die Mindestgröße an, ab der eine Deckung der Kosten erwartet werden darf.
- b) (6 Punkte) Leider umfasst der Bestand nur 250.000 Kunden. IchVerTix bietet für einen Zusatzbetrag von EUR 50.000 an, die Aktion auf einen vorselektierten Teilbestand zu begrenzen, bei welchem aufgrund von statistischen Indikatoren eine Annahmquote von 35% erwartet wird. Wie groß müsste dieser Teilbestand mindestens sein, damit sich die Aktion für die Closed Life Lebensversicherung lohnt? Wie groß müsste bei Zugrundelegung dieses „Mindest-Teilbestands“ dann die erwartete Annahmquote für den restlichen Bestand sein?
- c) (4 Punkte) Begründen Sie mit mindestens drei Argumenten kurz, ob für Sie als CEO der Closed Life das Angebot der IchVerTix attraktiv wäre. Welche Modifikationen an dem Angebot würden Sie vorschlagen?

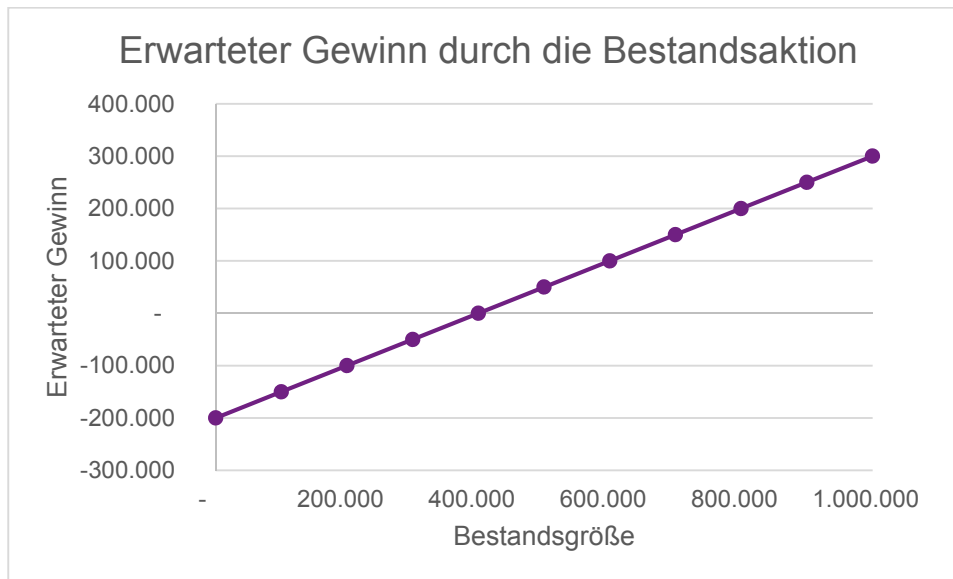
### Lösungsvorschlag Aufgabe 3:

- a) (5 Punkte) Der erwartete Gewinn der Closed Life Lebensversicherung ist durch die folgende Formel gegeben:

$$\text{Gewinn} = n \cdot (\text{Annahmquote} \cdot \text{EUR } 10 - \text{EUR } 1) - \text{EUR } 200.000$$

$$\text{Gewinn} = 0,5 \cdot n - 200.000$$





$$n \geq \frac{EUR\ 200.000}{15\% * EUR\ 10 - EUR\ 1} = 400.000$$

Die Bestandsaktion lohnt sich also erst ab einer Bestandsgröße von 400.000 Verträgen.

- b) (6 Punkte) Analog leitet man mit einer Annahmquote von 35% die Mindestbestandsgröße für einen positiven Gewinn her:

$$n \geq \frac{EUR\ 250.000}{35\% * EUR\ 10 - EUR\ 1} = 100.000$$

Der Gesamtbestand von 250.000 teilt sich also im Verhältnis 2/5 zu 3/5 in die beiden Teilbestände von 100.000 bzw. 150.000. Für die Annahmquote auf dem verbleibenden Teilbestand bedeutet dies:

$$2/5 * 35\% + 3/5 * x = 15\%$$

$$x = \frac{15\% - \frac{2}{5} * 35\%}{3/5} = 1,67\%$$

Wenn die Annahmquote auf dem verbleibenden Teilbestand also 1,67% beträgt, ergibt sich eine Gesamtannahmquote von 15%, mit den 35% auf dem selektierten Teilbestand.

- c) (4 Punkte) Die Möglichkeit, a priori die Annahmewilligen nahezu vollständig herauszufiltern mutet bei aller Begeisterung für Big Data abenteuerlich an. Es ist also fraglich, ob ein Teilbestand mit Annahmquote 35% selektiert werden kann.

Selbst bei Eintreffen der Annahmen ist das Gewinnpotenzial für die Closed Life Lebensversicherung begrenzt.

Ferner geht damit einher, dass der Datenbestand für einen Dritten geöffnet wird, was unter anderem Reputationsrisiken mit sich bringt.

In Summe erscheint das Angebot der IchVerTix für die Closed Life Lebensversicherung nicht sonderlich attraktiv. Der Vorstand sollte mit der IchVerTix über eine Kostenreduktion verhandeln.

**Aufgabe 4. [20 Punkte]**

Anmerkung: In dieser Aufgabe sind die absoluten Werte in ganzen Mio. Euro angegeben. Runden Sie die Ergebnisse bitte auf ganze Mio. Euro.

Die Feldafinger Brandkasse (FFBK) überlegt den Kauf der Wedemärker Cargo Versicherung (WCV), welche ausschließlich Transportversicherung im Portfolio hat. Für diese Übernahme soll nun der Bestand dieser Gesellschaft durchleuchtet werden. Sie sind damit beauftragt, die Wirkung dieser Verschmelzung auf das Interne Modell der FFBK zu bestimmen, zunächst nur für das Reserverisiko. Es liegt Ihnen leider nur das folgende inkrementelle Zahlungsdreieck vor:

	Abwicklungsjahre			
Anfalljahre	1	2	3	4
2012	40	20	10	5
2013	40	30	14	
2014	60	20		
2015	50			

Werte in Mio. Euro

a) (6 Punkte) Parametrisierung

Bestimmen Sie zunächst anhand der im Skript verwendeten Chain-Ladder Methodik basierend auf dem kumulierten Zahlungsdreieck die aktuarielle Best-Estimate Reserve für das Gesamtdreieck ohne Tailanpassung. Um nun eine Verteilung der Reserven für Ihr internes Modell zu erzeugen, entscheiden Sie aufgrund der sehr dünnen Datenlage, den Marktfaktor i.H.v. 11% aus der Standardformelberechnung als Variationskoeffizient zu verwenden. Wie groß ist die Varianz der Best-Estimate Reserve?

b) (9 Punkte) Bruttoisiko

- i. (4 Punkte) Sie entscheiden sich eine Lognormalverteilung zu verwenden und bestimmen die Parameter zu  $m \approx 4,284$  und  $s \approx 0,1097$ . Ermitteln Sie die benötigte Reserve zum 200jahres-Ereignis und das Risiko analytisch.

Hinweis: Verwenden Sie die Tabelle aus dem Anhang und die Tatsache, dass wenn  $LN(m,s)$  lognormalverteilt ist,  $\frac{\ln(LN(m,s)) - m}{s}$  standardnormalverteilt ist.



- ii. (5 Punkte) Aus Ihrem Internen Modell der FFBK kennen Sie die folgenden Größen für die Sparten Wohngebäude (VGV) und Kraftfahrt-Haftpflicht (KH).

Sparte	Best-Estimate Reserve	Reserverisiko
KH	81	5
VGV	13	9

Werte in Mio. Euro

Sie führen nun eine Monte-Carlo-Simulation mit 1.000 Pfaden auf Basis der ermittelten Werte durch und erhalten die folgenden Ergebnisse, welche nach der Gesamtreserve der FFBK inkl. WCV sortiert sind.

Pfad sortiert	KH	VGV	Transport	Gesamt
1	85	15	100	200
2	84	15	97	196
3	84	15	96	195
4	85	10	98	193
5	83	14	96	192
6	89	10	94	192
7	87	18	87	191
8	85	10	97	191
9	82	14	95	191
10	83	15	92	190
11	85	13	91	190
12	83	14	93	189
13	84	15	91	189
14	84	20	85	189
15	85	15	87	188
16	82	14	91	187
17	87	14	86	187
18	82	17	88	187
19	86	15	86	187
20	84	18	84	186
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Werte in Mio. Euro

Ermitteln Sie das Reserverisiko für die FFBK insgesamt, d.h. inkl. der neuen Sparte zum 200jahres Ereignis. Wie hoch ist der Diversifikationseffekt?

Hinweis: Rechnen Sie mit einem Risiko i.H.v 20 Mio. Euro für Transport falls Sie kein Ergebnis aus b) i. haben.

c) (5 Punkte) Allokation

Allozieren Sie das Risikokapital nun wieder auf die einzelnen Sparten. Benutzen Sie das proportionale Allokationsverfahren gemäß Skript.

Wie hoch ist das Gesamtrisiko, falls das Risikomaß Tail Value at Risk (TVaR) anstatt Value at Risk (VaR) verwendet wird bei gleichem Konfidenzniveau.

Allozieren Sie auch dieses Risiko nun gemäß TVaR-Allokation gemäß Skript.

**Lösungsvorschlag Aufgabe 4:**

a) (6 Punkte)

Zunächst wird das kumulierte Zahlungsdreieck erzeugt.

Anfalljahre	Abwicklungsjahre			
	1	2	3	4
2012	40	60	70	75
2013	40	70	84	
2014	60	80		
2015	50			

Werte in Mio. Euro

Die Chain-Ladder-Faktoren ermitteln sich zu.

Anfalljahre	Übergänge		
	1:2	2:3	3:4
2012	1,50	1,17	1,07
2013	1,75	1,20	
2014	1,33		
2015			
<b>CL-Faktoren</b>	1,50	1,18	1,07

Wendet man diese Faktoren auf das kumulierte Dreieck an, erhält man das abgewinkelte Dreieck und die Best-Estimate-Reserve in Summe i.H.v. 73 Mio. Euro..



Anfalljahre	Abwicklungsjahre				Reserve
	1	2	3	4	
2012	40	60	70	75	0
2013	40	70	84	90	6
2014	60	80	95	102	22
2015	50	75	89	95	45
					73

Werte in Mio. Euro

Die Varianz der Best-Estimate Reserve ermittelt sich zu:

$$\text{Var}(X) = (11\% \cdot E(X))^2 \approx 65 \text{ Mio. Euro (Mio. Euro)}$$

b) (9 Punkte)

i) (4 Punkte) Es gilt

$$\begin{aligned} P(LN(m,s) \leq x) &= P(\ln(LN(m,s)) \leq \ln(x)) = P\left(\frac{\ln(LN(m,s)) - m}{s} \leq \frac{\ln(x) - m}{s}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\ln(x) - m}{s}\right) \end{aligned}$$

Um das Risiko zu bestimmen, ermitteln wir daher das 99,5% Quantil der zuvor parametrisierten Verteilung  $LN(m,s)$  über  $x(99,5\%) = \exp(m + \Phi^{-1}(99,5\%) \cdot s)$ . Mit der Tabelle aus dem Anhang erhält man eine Reserve i.H.v. 96 Mio. Euro als 200jahres Ereignis. Zieht man den Mittelwert i.H.v. 73 Mio. Euro ab, erhält man ein Risiko i.H.v. 23 Mio. Euro.

ii) (5 Punkte) Bei 1.000 Simulationspfaden bestimmt der 5. größte gemäß Skript das 200jahres Ereignis. Dadurch erhält man eine Reserve i.H.v. 192 Mio. Euro bei einem Erwartungswert i.H.v.  $81+13+73=167$  Mio. Euro. Das Risiko liegt somit bei 25 Mio. Euro und der Diversifikationseffekt ergibt sich zu  $5+9+23-25=12$  Mio. Euro.

c) (5 Punkte)

Bei einer proportionalen Allokation wendet man den Anteil des Risikos der einzelnen Sparte an der Summe der Risiken auf das Gesamtrisiko an. In die-

sem Fall erhalten wir für KH 3 Mio. Euro, für VGV 6 Mio. Euro und für Transport 16 Mio. Euro.

Der TVaR des Gesamtergebnisses ermittelt sich über den Erwartungswert der 4 schlechtesten Pfade zu  $(200+196+195+193) / 4 = 196$  Mio. Euro und somit ergibt sich das Risiko  $196-167=29$  Mio. Euro. Führt man diese Rechnung auch für die Sparten mit denselben Pfaden durch erhält man für KH 4 Mio. Euro, für VGV 1 Mio. Euro und Transport 24 Mio. Euro Risikokapital (durch Rundung erhält man in Summe 30 anstatt 29 Mio. Euro)

**Aufgabe 5. [20 Punkte]**

Es seien  $a > 0$  und  $X$  eine verschobene exponentialverteilte Zufallsgröße, d.h. ihre Verteilungsfunktion ist für  $\lambda > 0$  gegeben durch

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda \cdot (x - a)) & \text{für } x \geq a \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für den Erwartungswert gilt:  $E(X) = a + \frac{1}{\lambda}$ .

Im Rahmen einer Großschadenhöhenmodellierung wollen Sie nun für eine Ihrer Sparten eine solche Verteilung mittels Momentenmethode an Ihre Schadendaten anpassen. Es liegen Ihnen zum 01.01.2018 die folgenden Schadendaten nach HGB für alle Schäden mit einem Aufwand von mehr als 1.000 T€ vor (alle Angaben in T€):

Schadennr.	Anfalljahr	kumulierte Zahlungen	Einzel Schadenreserve	Aufwand
1	2016	1.700	700	2.400
2	2011	2.100	-	2.100
3	2017	90	1.600	1.690
4	2010	1.200	-	1.200
5	2014	1.050	-	1.050
6	2015	550	500	1.050
7	2005	800	210	1.010

Sie entscheiden sich, dass die Großschadengrenze bei  $a = 1.000$  T€ liegen soll. Der durchschnittliche Schadenaufwand der historischen Großschäden beträgt 1.500 T€.

- (4 Punkte) Sie möchten eine verschobene Exponentialverteilung an die dargestellten Aufwände der Schäden anpassen. Wie lautet der Parameter  $\lambda$  bei Verwendung der Momentenmethode?
- (4 Punkte) Sie ermitteln als Realisation einer auf  $[0;1]$  gleichverteilten Zufallsvariablen den Wert 0,9132. Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Wertes unter Verwendung der Inversionsmethode eine Realisation der verschobenen Exponentialverteilung, parametrisiert gemäß a).
- (4 Punkte) Die modellierte Sparte ist durch einen XL-Rückversicherungsvertrag 3.000 xs 1.000 gedeckt (in T€ und mit unendlich vielen freien Wiederauffüllungen). Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzeugt die



in a) angepasste Verteilung einen Schaden, dessen Nettoschadenaufwand 1.000 T€ echt übersteigt?

- d) (8 Punkte) Erstellen Sie zu der in Teil a) angepassten Verteilung einen Q-Q-Plot (exakte Angabe der Koordinaten). Welchen Schluss ziehen Sie aus Ihrem Q-Q-Plot? Beachten Sie die folgende Hilfestellung!

Hilfestellung: Ihr Aktuariat hat freundlicherweise bereits die in der folgenden Tabelle aufgeführten Werte der unter a) parametrisierten Verteilungsfunktion bestimmt. Eventuell müssen Sie einige Werte für den Q-Q-Plot noch selbst errechnen.

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
1.003	0,005	1.091	0,167	1.215	0,350	1.399	0,550
1.026	0,050	1.112	0,200	1.235	0,375	1.424	0,571
1.053	0,100	1.144	0,250	1.255	0,400	1.458	0,600
1.067	0,125	1.168	0,286	1.280	0,429	1.490	0,625
1.077	0,143	1.178	0,300	1.299	0,450	1.525	0,650
1.081	0,150	1.203	0,333	1.347	0,500	...	...

### Lösungsvorschlag Aufgabe 5:

a) (4 Punkte) Aus  $E(X) = a + \frac{1}{\lambda}$  folgt  $\lambda = \frac{1}{E(X) - a}$ . Durch Einsetzen von  $a=1.000$  und  $E(X)=1.500$  erhält man den Parameter  $\lambda$  zu  $\lambda = 1/500 = 0,002$ .

b) (4 Punkte) Die Quantilfunktion von X lautet  $F^{-1}(u) = a - \frac{1}{\lambda} \ln(1-u)$  und mit Hilfe der angegebenen Zufallszahl erhält man die Realisation 2.222 T€.

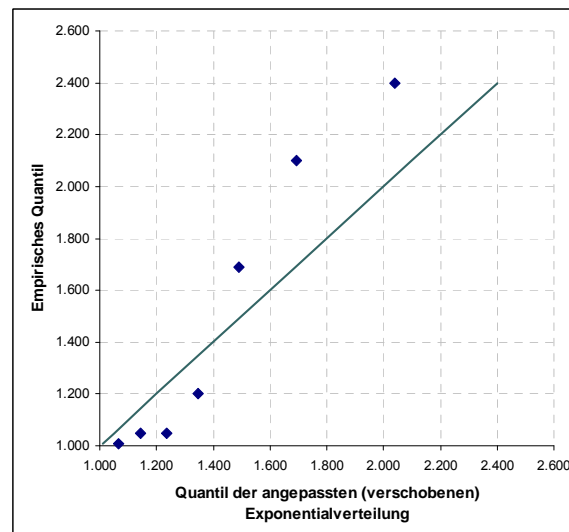
c) (4 Punkte) Der Bruttoschaden müsste hierzu 4.000 T€ überschreiten. Die Wahrscheinlichkeit, dass dies geschieht, ist  $P(X > 4.000) = 1 - P(X \leq 4.000) = 1 - F(4.000) = 1 - 0,9975 = 0,0025$ . Dies geschieht also in ca. 0,25% aller Fälle.



d) (8 Punkte) Die folgende Tabelle enthält die oberen  $\frac{i}{n+1}$ -Quantile bzw. die unteren  $1-\frac{i}{n+1}$ -Quantile der in a) angepassten verschobenen Exponentialverteilung gemäß der Formel  $F^{-1}\left(1-\frac{i}{n+1}\right) = a - \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{i}{n+1}\right)$ :

Schadenr. i	Schadenhöhe $x_{(i)}$	$i/(n+1)$	oberes $i/(n+1)$ -Quantil von X
1	2.400	0,125	2.040
2	2.100	0,250	1.693
3	1.690	0,375	1.490
4	1.200	0,500	1.347
5	1.050	0,625	1.235
6	1.050	0,750	1.144
7	1.010	0,875	1.067

Die in dieser Tabelle dargestellten letzten fünf Quantile der exponentialverteilten Zufallsvariablen X konnten auch aus den Aktuariatsinformationen entnommen werden. Es ergibt sich ein Q-Q-Plot wie folgt:



Die in Teil a) angepasste verschobene Exponentialverteilung scheint die historischen Schäden nicht gut anzupassen. Kleinere Schäden werden von ihr überschätzt, größere Schäden unterschätzt.

Anhang:

**Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung:**

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	1,00	0,841345	2,00	0,977250	3,00	0,998650
0,02	0,507978	1,02	0,846136	2,02	0,978308	3,02	0,998736
0,04	0,515953	1,04	0,850830	2,04	0,979325	3,04	0,998817
0,06	0,523922	1,06	0,855428	2,06	0,980301	3,06	0,998893
0,08	0,531881	1,08	0,859929	2,08	0,981237	3,08	0,998965
0,10	0,539828	1,10	0,864334	2,10	0,982136	3,10	0,999032
0,12	0,547758	1,12	0,868643	2,12	0,982997	3,12	0,999096
0,14	0,555670	1,14	0,872857	2,14	0,983823	3,14	0,999155
0,16	0,563559	1,16	0,876976	2,16	0,984614	3,16	0,999211
0,18	0,571424	1,18	0,881000	2,18	0,985371	3,18	0,999264
0,20	0,579260	1,20	0,884930	2,20	0,986097	3,20	0,999313
0,22	0,587064	1,22	0,888768	2,22	0,986791	3,22	0,999359
0,24	0,594835	1,24	0,892512	2,24	0,987455	3,24	0,999402
0,26	0,602568	1,26	0,896165	2,26	0,988089	3,26	0,999443
0,28	0,610261	1,28	0,899727	2,28	0,988696	3,28	0,999481
0,30	0,617911	1,30	0,903200	2,30	0,989276	3,30	0,999517
0,32	0,625516	1,32	0,906582	2,32	0,989830	3,32	0,999550
0,34	0,633072	1,34	0,909877	2,34	0,990358	3,34	0,999581
0,36	0,640576	1,36	0,913085	2,36	0,990863	3,36	0,999610
0,38	0,648027	1,38	0,916207	2,38	0,991344	3,38	0,999638
0,40	0,655422	1,40	0,919243	2,40	0,991802	3,40	0,999663
0,42	0,662757	1,42	0,922196	2,42	0,992240	3,42	0,999687
0,44	0,670031	1,44	0,925066	2,44	0,992656	3,44	0,999709
0,46	0,677242	1,46	0,927855	2,46	0,993053	3,46	0,999730
0,48	0,684386	1,48	0,930563	2,48	0,993431	3,48	0,999749
0,50	0,691462	1,50	0,933193	2,50	0,993790	3,50	0,999767
0,52	0,698468	1,52	0,935745	2,52	0,994132	3,52	0,999784
0,54	0,705401	1,54	0,938220	2,54	0,994457	3,54	0,999800
0,56	0,712260	1,56	0,940620	2,56	0,994766	3,56	0,999815
0,58	0,719043	1,58	0,942947	2,58	0,995060	3,58	0,999828
0,60	0,725747	1,60	0,945201	2,60	0,995339	3,60	0,999841
0,62	0,732371	1,62	0,947384	2,62	0,995604	3,62	0,999853
0,64	0,738914	1,64	0,949497	2,64	0,995855	3,64	0,999864
0,66	0,745373	1,66	0,951543	2,66	0,996093	3,66	0,999874
0,68	0,751748	1,68	0,953521	2,68	0,996319	3,68	0,999883
0,70	0,758036	1,70	0,955435	2,70	0,996533	3,70	0,999892
0,72	0,764238	1,72	0,957284	2,72	0,996736	3,72	0,999900
0,74	0,770350	1,74	0,959070	2,74	0,996928	3,74	0,999908
0,76	0,776373	1,76	0,960796	2,76	0,997110	3,76	0,999915
0,78	0,782305	1,78	0,962462	2,78	0,997282	3,78	0,999922
0,80	0,788145	1,80	0,964070	2,80	0,997445	3,80	0,999928
0,82	0,793892	1,82	0,965620	2,82	0,997599	3,82	0,999933
0,84	0,799546	1,84	0,967116	2,84	0,997744	3,84	0,999938
0,86	0,805105	1,86	0,968557	2,86	0,997882	3,86	0,999943
0,88	0,810570	1,88	0,969946	2,88	0,998012	3,88	0,999948
0,90	0,815940	1,90	0,971283	2,90	0,998134	3,90	0,999952
0,92	0,821214	1,92	0,972571	2,92	0,998250	3,92	0,999956
0,94	0,826391	1,94	0,973810	2,94	0,998359	3,94	0,999959
0,96	0,831472	1,96	0,975002	2,96	0,998462	3,96	0,999963
0,98	0,836457	1,98	0,976148	2,98	0,998559	3,98	0,999966
1,00	0,841345	2,00	0,977250	3,00	0,998650	4,00	0,999968