Schriftliche Prüfung im Grundwissen

Modellierung

gemäß Prüfungsordnung 3
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 11.05.2018

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 90 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 45 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht inkl. Deckblatt aus 11 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen, und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Dr. Steve Brüske, Dr. Nora Gürtler, Dr. Björn Hille,
Dr. Michael Leitschkis, Frank Schepers

Aufgabe 1. *[18 Punkte]*

Sie arbeiten in der Modellierungsabteilung einer Lebensversicherung. Ihre Abteilung hat ein Projekt gestartet, dessen Ziel es ist mittelfristig ein dynamisches stochastisches Modell aufzubauen, um MCEV- und Risikokapitalberechnungen durchführen zu können.

(a) [5 Punkte] Das erste Etappenziel des Projektes ist es, ein Modell für die Berechnung eines traditionellen Embedded Value zu erstellen. Dazu ist es notwendig, die zukünftigen HGB Jahresüberschüsse mit Ihrem Modell zu projizieren.

   (i) [2 Punkte] Erklären Sie in diesem Zusammenhang die Begriffe „Open Fund" und „Closed Fund" Projektion. Welcher Ansatz liegt bei der Berechnung eines traditionellen Embedded Values zugrunde?

   (ii) [1 Punkt] Für die Projektion der Jahresüberschüsse müssen Sie u.a. Annahmen über die Rechnungsgrundlagen Sterblichkeit, Langlebigkeit, Invalidität, Storno und Kosten erstellen. Was ist in diesem Zusammenhang unter „Best Estimate"-Projektion zu verstehen?

   (iii) [2 Punkte] Erklären Sie die beiden Annahmen Run-Off und Going-Concern. Welche der beiden Annahmen liegt der Berechnung eines traditionellen Embedded Value zugrunde?

Für den Aufgabenteil b) gelten die im Folgenden beschriebenen Annahmen und Vereinfachungen.

Ihr Unternehmen hat bisher nur eine einzige Police eines reinen Erlebensfallproduktes gegen Einmalbeitrag verkauft und möchte nun zum Stichtag 31.12.2017 den traditionellen Embedded Value ermitteln.

Produktbeschreibung:

- Erinnerung: Bei einer reinen Erlebensfallversicherung wird die versicherte Summe fällig, falls der Versicherungsnehmer am Ende der Versicherungsdauer noch am Leben ist.
- Die Police ist bereits seit einigen Jahren im Bestand.
- Die Versicherungssumme des Produktes beträgt 1.000 EUR, die in drei Jahren fällig ist.
- Bei der Kalkulation des Produktes wurden ein Rechnungszins von 0% und eine konstante Sterbewahrscheinlichkeit von 0% pro Jahr angesetzt. Ebenso wurden keine Kosten bei der Kalkulation angesetzt.

- Die Versicherungsnehmer werden gemäß aktueller Version der Mindestzuführungsverordnung am Rohüberschuss beteiligt. Die Beteiligung geschieht als Barauszahlung an die Versicherungsnehmer.

Ihre Best Estimate Analysen haben folgende Annahmen ergeben:

- Die Nettoverzinsung der nächsten Jahre beträgt konstant 5% pro Jahr (auf die Reserve zu Beginn des Jahres)
- Die Sterbewahrscheinlichkeit der nächsten Jahre beträgt konstant 10% pro Jahr
- Die tatsächlichen Verwaltungskosten Ihres Unternehmens betragen 10 EUR zum Stichtag, vorschüssig zu Beginn des Jahres. In der Projektion gleichen sich Bestandsabbau und Kosteninflation genau aus, d.h. für den Bestand bleiben die Kosten für die nächsten Jahre bei konstant 10 EUR. Weitere Kosten gibt es nicht.

Es werden weiterhin folgende Vereinfachungen getroffen:

- In Ihrem Modell ergibt sich die Anzahl der Toten auf Basis des Bestandes zu Beginn der Periode. Erlebensfälle kommen zeitlich nach Todesfällen.
- Weitere Dekremente, wie z.B. Storno können vernachlässigt werden.
- Steuer- und Risikodiskontrate betragen 0%.
- Kapitalbindungskosten können vernachlässigt werden.
- Zum Stichtag 31.12.2017 ist kein Eigenkapital vorhanden.

(b) [11 Punkte] Ermitteln Sie mit diesen Angaben den traditionellen Embedded Value zum 31.12.2017. Nutzen Sie für die Berechnung die unten angegebene Schablone und erklären Sie jeweils kurz die Berechnungen der schraffierten Zellen.

(c) [2 Punkte] Ihr(e) Vorgesetzt(e) ist mit dem Modell zur Berechnung des traditionellen Embedded Values voll zufrieden und sieht keinen Sinn darin, das Modell für die Berechnung eines MCEV zu erweitern. Überzeugen Sie Ihre(n) Vorgesetzte(n) mit zwei Hauptkritikpunkten am traditionellen Embedded Value.

Schablone zu Aufgabenteil (b)

Bestandsentwicklung

Zeit	Bestand (2. Ordnung) BOP	Anzahl Tote	Anzahl Erlebensfälle	Bestand (2. Ordnung) EOP
31/12/2017				1
31/12/2018	1			
31/12/2019				
31/12/2020				

BOP: Beginn der Periode, EOP: Ende der Periode

Reserve

Zeit	Reserve - BOP	Reserve - EOP
31/12/2017		
31/12/2018		
31/12/2019		
31/12/2020		

Kapitalanlageergebnis

Zeit	Ertrag	Aufwand	Ergebnis
31/12/2017			
31/12/2018			
31/12/2019			
31/12/2020			

Risikoergebnis

Zeit	Ertrag	Aufwand	Ergebnis
31/12/2017			
31/12/2018			
31/12/2019			
31/12/2020			

übriges Ergebnis

Zeit	Ertrag	Aufwand	Ergebnis
31/12/2017			
31/12/2018			
31/12/2019			
31/12/2020			

Jahresüberschuss

Zeit	Rohüberschuss vor VN Beteiligung	Beteiligung VN am Rohüberschuss	Jahresüberschuss	**PVFP = TEV**
31/12/2017				
31/12/2018				
31/12/2019				
31/12/2020				

Lösungsvorschlag:

a) [5 Punkte]

i) [2 Punkte] Bei „Closed Fund" Projektionen wird nur der Bestand fortgeschrieben der zum Stichtag vorhanden ist. Künftiges Neugeschäft nach dem Stichtag geht nicht in die Projektion ein.

Im Gegensatz zu Closed Fund Modellen berücksichtigen die sog. „Open Fund Modelle" nach dem Bewertungsstichtag hinzukommendes Neugeschäft.

Der traditionelle Embedded Value ist eine Closed Fund Projektion.

ii) [1 Punkt] Bei „Best Estimate" Projektionen wird für die Realisation der Zufallsvariablen wie Storno, Sterblichkeit oder auch des Kapitalertrags die heutige, realistische Erwartung ohne Einbeziehung von Sicherheitszuschlägen unterstellt.

iii) [2 Punkte] Unter "Going Concern" versteht man die Annahme, dass die heutige Geschäftstätigkeit fortgeschrieben wird. Dies bedeutet, dass auch bei der reinen Projektion eines sich abwickelnden Bestandes künftiges Neugeschäft implizit berücksichtigt wird, z.B. in Form von stabilen Kostenparametern, stabilen Überschusssätzen und Aktionärsquoten und dem Beibehalten der aktuellen Kapitalanlagestrategie.

Im Gegensatz dazu, gehen Run-Off Annahmen davon aus, dass das bestehende Geschäft vertragsgerecht abwickelt und dann liquidiert wird. Dies kann sich z.B. durch tendenziell steigende Kosten pro oder der Anpassung der Aktiva auf die Fristigkeit des Bestandes widerspiegeln.

Der Berechnung des traditionellen Embedded Values, liegt die Going Concern-Annahme zu Grunde.

b) [11 Punkte]

Bestandsentwicklung

Zeit	Bestand (2. Ordnung) BOP	Anzahl Tote	Anzahl Erlebensfälle	Bestand (2. Ordnung) EOP
31/12/2017				1
31/12/2018	1	0,100		0,900
31/12/2019	0,900	0,090		0,810
31/12/2020	0,810	0,081	0,729	0,000

Zeit	Reserve - BOP	Reserve - EOP
31/12/2017		1,000,000
31/12/2018	1,000,000	900,000
31/12/2019	900,000	810,000
31/12/2020	810,000	-

Bei einer reinen Erlebensfallversicherung mit Rechnungszins 0% und Sterblichkeitsrate von 0%, entspricht die Reserve (vor Bestandsabbau) genau der Leistung. Multipliziert man dies mit dem Bestandsabbau 2. Ordnung erhält man die obige Reserve für den Bestand.

Kapitalanlageergebnis

Zeit	Ertrag	Aufwand	Ergebnis
31/12/2017			
31/12/2018	50,00	-	50,00
31/12/2019	45,00	-	45,00
31/12/2020	40,50	-	40,50

Das Produkt hat einen Rechnungszins von null. Von daher ergibt sich das Kapitalanlageergebnis als „NZV(t) * Reserve_Bop(t) – 0", also in 2018: 5% x 1.000 EUR – 0 EUR = 50 EUR.

Risikoergebnis

Zeit	Ertrag	Aufwand	Ergebnis
31/12/2017			
31/12/2018	100,00	-	100,00
31/12/2019	90,00	-	90,00
31/12/2020	81,00	-	81,00

Das Produkt hat keine Todesfallleistung, d.h. der Aufwand im Risikoergebnis ist 0 EUR. Zudem beträgt der Rechnungszins 0%

und die Sterblichkeit 1. Ordnung 0%. Von daher besteht der Ertrag im Risikoergebnis nur aus dem Freifall der Reserve pro Jahr. Dies sind in 2018, 10% der Reserve zu Beginn der Periode, also 100 EUR.

übriges Ergebnis

Zeit	Ertrag	Aufwand	Ergebnis
31/12/2017			
31/12/2018	-	- 10,00	- 10,00
31/12/2019	-	- 10,00	- 10,00
31/12/2020	-	- 10,00	- 10,00

Das Produkt hat keine eingerechneten Kosten und das Unternehmen hat tatsächliche Verwaltungskosten von 10 EUR, die die nächsten Jahre für den Bestand konstant bleiben. Von daher ist das übrige Ergebnis der nächsten Jahre -10 EUR.

Jahresüberschuss

Zeit	Rohüberschuss vor VN Beteiligung	Beteiligung VN am Rohüberschuss	Jahresüberschuss	**PVFP = TEV**
31/12/2017				**10,65**
31/12/2018	140,00	135,00	5,00	
31/12/2019	125,00	121,50	3,50	
31/12/2020	111,50	109,35	2,15	

Der Rohüberschuss ergibt sich aus der Gewinnzerlegung als Summe der Ergebnisquellen, d.h. in 2018: 50 + 100 -10 = 140.

Gemäß Mindestzuführungsverordnung, muss der Versicherungsnehmer für dieses Produkt mindestens wie folgt am Rohüberschuss beteiligt werden:

max(90% x Kapitalerträge – Rechnungszinsanforderung,
min(100% x Kapitalerträge – Rechnungszinsanforderung, 0)
+ max(90% x Risikoergebnis, 0)
+ max(50% x übriges Ergebnis, 0)

Da der Rechnungszins = 0% ist, ergibt sich für 2018 also: 90% x 50 EUR + 90% x 100 EUR + 0 EUR = 135 EUR. Zieht man die VN-Beteiligung vom Rohüberschuss ab, ergibt sich der Jahresüberschuss von 5 EUR in 2018.

Da kein Eigenkapital vorhanden ist und Kapitalbindungskosten ignoriert werden können, ergibt sich der traditionelle Embedded Value als Barwert der zukünftigen Jahresüberschüsse. Dies entspricht bei einer Risikodiskontrate von 0% der Summe der zukünftigen Jahresüberschüsse und somit 10,65 EUR.

c) [2 Punkte]

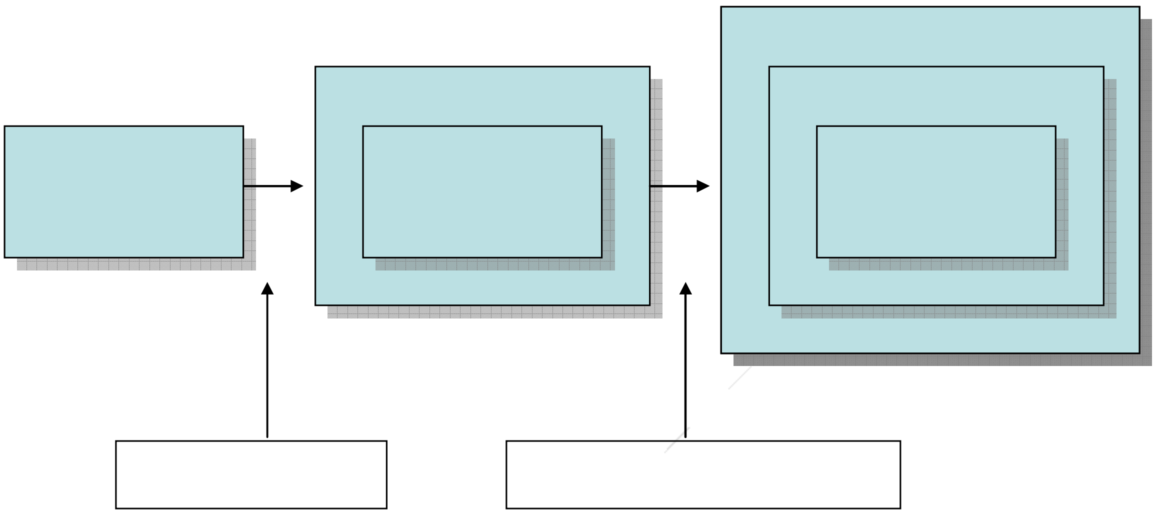
Zum Beispiel:

- Geringe Einheitlichkeit von Annahmen und Methodik (z.B. kein Standard bei der Wahl der Risikodiskontrate)
- mangelnde Vergleichbarkeit der Ergebnisse und mangelnde Transparenz
- Unzureichende Berücksichtigung der vorhandenen finanziellen Optionen und Garantien (LV: Garantiezins, Stornooption der VN, Kapitalwahloption / KV: Tarifwechsel, Basistarif)
- Kapitalisierung von Prämien für Kredit- und Marktrisiko
- Unterschiedliche Behandlung des benötigten Kapitals

Aufgabe 2. *[18 Punkte]*

a) (6 Punkte) Erläutern Sie kurz die Begriffe Modellfehler und Simulationsfehler.

b) (3 Punkte) Vervollständigen Sie das Schaubild aus dem Seminar:



c) (3 Punkte) Begründen Sie, warum der Simulationsfehler in der Praxis eine deutlich geringere Herausforderung als noch vor 10 Jahren ist.

d) *„Der selbstlernende Algorithmus AlphaZero, eine generalisierte Version von AlphaGo Zero, hat nun auch eine extreme Spielstärke im Schach erreicht. Wie ein Team des Unternehmens DeepMind in einer ArXiv-Veröffentlichung berichtet, benötigte das Programm nur vier Stunden, um eine übermenschliche Spielstärke im Schach zu erreichen. In 100 Partien schlug AlphaZero das bisher spielstärkste Schachprogramm Stockfish 8 mit 64 : 36 und verlor dabei keine einzige Partie.*

(6 Punkte) Erläutern Sie kurz zwei Gründe, warum die Aufgabenstellung „Schlage den Schach-Weltmeister" für einen Computer wesentlich einfacher zu lernen ist, als die Dividende der einer globalen (Rück-) Versicherung für das übernächste Jahr zu prognostizieren.

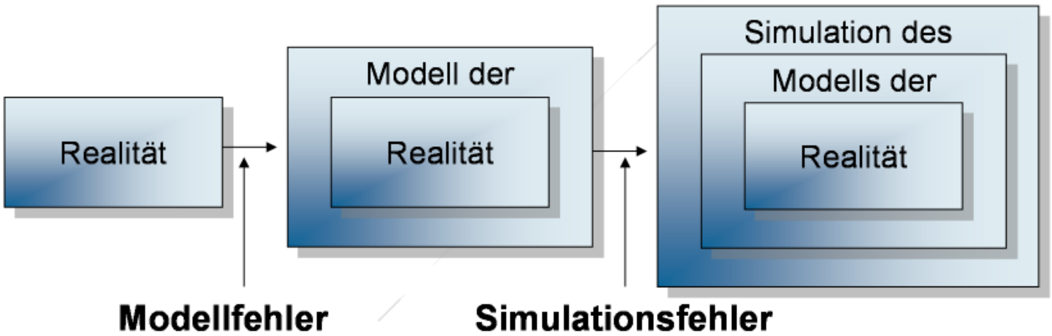
Lösungsvorschlag:

a) (6 Punkte)

Unter Modellfehler verstehen wir Aspekte, in denen das Modell die Realität nicht vollständig korrekt abbildet. Dazu gehören z.B. fehlende Einflussgrößen (Variablen) oder Vereinfachungen bei der Abbildung von Zusammenhängen. So war in den Risikomodellen der Banken in 2008 i.a. nicht vorgesehen, dass einzelne Anlageklassen nicht handelbar waren und dadurch massive Liquiditätsprobleme ausgelöst wurden.

Mit Simulationsfehler bezeichnen wir die statistischen Fehler bei der endlich abzählbar häufigen Auswertung eines Modells (Diskretisierungsfehler). Insbesondere für komplexe Modelle in der Personenversicherung sind sehr hohe Anzahlen von Auswertungsläufen erforderlich, um Ergebnisse an den äußeren Rändern der Verteilung mit statistischer Aussagekraft zu ermitteln.

b) (3 Punkte)



c) (3 Punkte)

Es steht Hardware mit deutlich höherer Performance zur Verfügung, mit der zusätzlichen Option, diese durch Cloud-basierte Lösungen nahezu unbegrenzt skaliert nutzen zu können. Dadurch ist es wesentlich praktikabler geworden, sehr hohe Anzahlen von Berechnungen in begrenzter Zeit durchzuführen.

d) (6 Punkte)

- Beim Schach gibt es ein fest vorgegebenes Regelwerk, welches a priori allen Spielern bekannt ist, und im Laufe des Spiels nicht geändert wird. Für ein Unternehmen können sich externe (z.B. Gesetzesänderungen, Bilanzierungsvorschriften, Steuern) Vorgaben in im Vorherein unbekannter Weise ändern.
- Jede Spielfigur beim Schach hat einen eingeschränkten Handlungsspielraum. Das Jahresergebnis hängt von wesentlich mehr

Einflussgrößen ab, mit wesentlich größerem Wertebereich (z.B. Realisierung von NatCat-Risiken, Kapitalmarktentwicklungen).

- Die Festlegung der Dividende erfolgt i.d. R. auf Vorschlag des Vorstands und Aufsichtsrates durch die Aktionärsversammlung, und leitet sich nicht zwingend nach einer Formel aus dem Jahresergebnis ab. Sie unterliegt subjektiven Einflussfaktoren wie der Erwartungshaltung der Aktionäre oder der Entwicklung des Kapitalmarktumfeld. Beim Schachspiel ergibt sich der Ausgang des Spiels zwingend nach den Regeln.

Aufgabe 3. *[18 Punkte]*

Sie arbeiten in der Modellierungsabteilung einer Lebensversicherung. Derzeit arbeiten Sie sich in die Kapitalmarkt- und die Kapitalanlagemodellierung ein.

(a) [6 Punkte]

(i) [3 Punkte] Nennen Sie drei praktische Ansätze zur Marktwertberechnung einer Kapitalanlage.

(ii) [3 Punkte] Skizzieren Sie einen praktikablen Ansatz zur Marktwertfortschreibung von Aktien unter Angabe einer Formel.

(b) [4 Punkte] Angenommen Ihr Unternehmen hat zum 31.12.2017 Aktien im Wert von 1.000 Geldeinheiten (GE) erworben und verfolgt eine buy-and-hold – Strategie. Angenommen der Marktwert dieser Aktie in einem bestimmten Szenario entwickelt sich gemäß Ihrem Modell wie in der untenstehenden Tabelle angegeben. Bitte füllen Sie die HGB-Buchwert-Spalte aus, indem Sie die Buchwerte gemäß dem Niederstwertprinzip bilden – ohne die Anwendung des §341b HGB.

Aktienfortschreibung

Stichtag	Marktwert in GE	HGB-Buchwert in GE
31/12/2017	1000	
31/12/2018	800	
31/12/2019	900	
31/12/2020	1250	

(c) [8 Punkte] Bitte nehmen Sie kurz Stellung zu den folgenden Aussagen:

(i) [2 Punkte] Im Zeitalter negativer Zinsen müssen auch negative Aktiendividenden modelliert werden können.

(ii) [2 Punkte] Das in (b) betrachtete Szenario muss ein Real-World-Szenario gewesen sein, denn die durchschnittliche jährliche Aktienrendite in diesem Szenario wäre für ein risikoneutrales Szenario zu hoch.

(iii) [2 Punkte] Die Marktwert-Fortschreibung der Immobilien kann derselben Logik folgen wie die der Aktien.

(iv) [2 Punkte] Für Immobilien können dieselben Szenarien-Daten benutzt werden wie für Aktien.

Lösungsvorschlag:

(a) [6 Punkte]

(i) [3 Punkte]

- Diskontierung zukünftiger Cashflows
- Fortschreibung des Marktwertes auf Basis einer Indexentwicklung
- Geschlossene Formeln

(ii) [3 Punkte]

$$MV(t, und) = MV(t-1) \cdot (1 + mv\_growth(t, und))$$
$$und = \text{Zugrundeliegende Benchmark("Underlying")}$$
$$mv\_growth(t, und) = total\_return(t, und) - dividend(t, und)$$

(b) [4 Punkte] Die HGB-Buchwertfortschreibung gemäß dem Niederstwertprinzip ergibt sich wie folgt (man beachte, dass die Zuschreibungen durch die Anschaffungskosten beschränkt sind):

Aktienfortschreibung

Stichtag	Marktwert in GE	HGB-Buchwert in GE
31/12/2017	1000	1000
31/12/2018	800	800
31/12/2019	900	900
31/12/2020	1250	1000

(c) [8 Punkte]

(i) [2 Punkte] Diese Aussage ist falsch. Die Aktiendividende kann zwar ausfallen, aber nicht negativ werden.

(ii) [2 Punkte] Diese Aussage ist falsch. Die Risikoneutralität ist eine Eigenschaft von Szenarien-Paketen. Anhand eines wie auch immer gearteten einzelnen Szenarios kann nicht entschieden werden, ob sie erfüllt ist.

(iii) [2 Punkte] Diese Aussage ist richtig. Die Fortschreibung des Marktwertes kann bei Immobilien wie bei Aktien auf Basis einer Indexentwicklung erfolgen.

(iv) [2 Punkte] Diese Aussage ist falsch. So weisen Immobilien normalerweise eine deutlich geringere Volatilität als Aktien.

Aufgabe 4. *[18 Punkte]*

Die Feldafinger Brandkasse versichert Schäden, die während des Transports von Gütern entstehen. Für das Großschadenrisiko dieser Sparte will sie ein kollektives Modell entwickeln. Der zuständige Aktuar beschafft sich zunächst alle abgewickelten und auf das kommende Jahr inflationierten historischen Einzelschadenaufwände, die größer als 1 Mio. EUR sind (in TEUR):

Anfalljahr	Anzahl	Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4	Nr. 5	Schadensumme
2008	1	1.326					1.326
2009	0						-
2010	1	3.574					3.574
2011	0						-
2012	2	6.990	1.304				8.294
2013	2	1.252	1.673				2.925
2014	3	1.723	1.144	4.242			7.109
2015	0						-
2016	5	1.469	2.754	2.350	1.435	2.194	10.202
2017	3	1.095	1.208	1.500			3.803

Sie gehen davon aus, dass das Exposure in den letzten Jahren sowie in der Planperiode 2018 konstant ist. Zur Modellierung der Schadenanzahl wird eine Poisson-Verteilung N mit Zähldichte

$$P_\eta(N = k) = e^{-\eta}\frac{\eta^k}{k!} \text{ mit } \eta > 0 \text{ und } k = 0, 1, 2, \ldots$$

herangezogen, die Höhenverteilung soll mit einer Paretoverteilung X modelliert werden. Die Verteilungsfunktion der Paretoverteilung, deren Erwartungswert, sowie der Hill-Schätzer lauten

$$F_\alpha(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{x}\right)^\alpha \quad \text{mit } x > \lambda \text{ und } \alpha > 0,$$

$$E(X) = \lambda \cdot \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

$$\widehat{\alpha_k} = \left[\frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} ln \frac{x_{(i)}}{x_{(k)}}\right]^{-1} \quad \text{für } n > 1 \, .$$

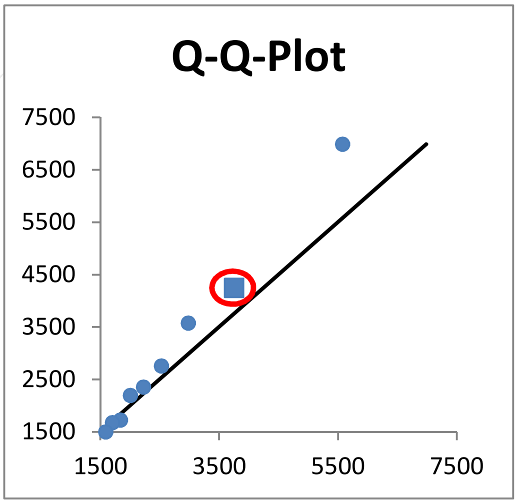
a) (6 Punkte) Bestimmen Sie (auf zwei Nachkommastellen) in der folgenden Tabelle den fehlenden Wert an der Stelle des Fragezeichens und zeichnen Sie mit den in der Tabelle angegebenen Punkten den Hill-Plot. Wo würden Sie den Threshold zur Trennung von Groß- und Basisschäden legen (Begründung)?

Schadennr. k	Aufwand x(k) in Tsd. EUR	$\widehat{\alpha_k}$
1	6.990	nicht definiert
2	4.242	4,00
3	3.574	**?**
4	2.754	2,46
5	2.350	2,21
6	2.194	2,31
7	1.723	1,73
8	1.673	1,88
9	1.500	1,75
…	…	…
17	1.095	1,85

b) (8 Punkte) Sie entscheiden sich, den Threshold λ bei 1.500 EUR zu setzen. Schätzen Sie für diesen Threshold

i. den Parameter η der Poissonverteilung,
ii. den charakteristischen Index der Paretoverteilung nach Maximum-Likelihood-Methode und
iii. den charakteristischen Index der Paretoverteilung nach Momentenmethode.
iv. Welche Aussage können Sie ohne zu rechnen im Fall ii. und iii. für die Standardabweichung treffen?

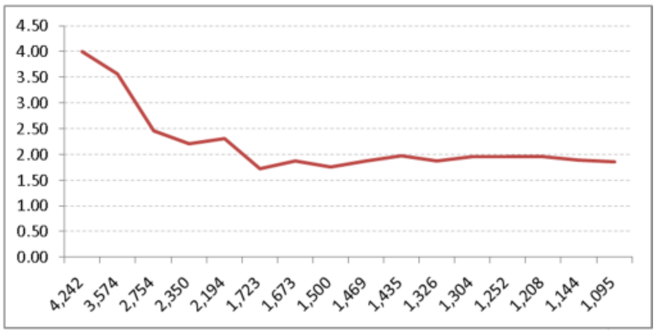
c) (4 Punkte) Sie fertigen einen Q-Q-Plot für die nach Maximum-Likelihood-Methode angepasste Paretoverteilung an und erhalten das nachfolgende Bild. Berechnen Sie die Koordinaten des gekennzeichneten Punktes!



Lösungsvorschlag Aufgabe 4:

a) (6 Punkte) Der fehlende Wert bestimmt sich zu $\widehat{\alpha_3} = \left[\frac{1}{3} \cdot \left(ln\frac{6.990}{3.574} + ln\frac{4.242}{3.574} + ln\frac{3.574}{3.574} \right)\right]^{-1} = 3{,}56.$

Der Hill-Plot ist in der folgenden Graphik wiedergegeben (es genügten die in der Tabelle angegebenen Stützstellen):



Der Threshold sollte in einem Bereich gewählt werden, in dem der Parameter wenig schwankt (d.h. in dem der Graph mehr oder weniger konstant wird), hier etwa für Werte kleiner als 1.723 TEUR.

b) (8 Punkte)
   i. Es gibt insgesamt 9 Schäden im Zeitraum von 10 Jahren (2008-2017), die größer als 1.500 TEUR sind. Mit diesem Threshold ereignen sich also durchschnittlich 0,9 Schäden im Jahr. Also ist η=0,9.
   ii. Für α wählt man den Hill-Schätzer für k=9 und erhält α=1,75.
   iii. Die Formel für den Erwartungswert wird nach α aufgelöst, man erhält:

$$\alpha = \frac{E(X)}{E(X) - \lambda}$$

Als Erwartungswert wird der Durchschnitt derjenigen Schäden angesetzt, die größer als 1.500 TEUR sind. Dieser berechnet sich zu 3.000 TEUR. Man erhält damit

$$\alpha = \frac{3.000}{3.000 - 1.500} = 2.00$$

   iv. In beiden Fällen ist α kleiner oder gleich 2, somit existiert in beiden Fällen die Standardabweichung nicht.

c) (4 Punkte) Gesucht ist bei 9 Schäden das obere 2/(9+1)=20%-Quantil der nach ML-Methode angepassten Paretoverteilung sowie das zugehörige empirische Quantil. Das obere 20%-Quantil ist identisch mit dem unteren 80%-Quantil.

Das empirische Quantil entspricht dem zweitgrößten Schaden, also 4.242 TEUR, das theoretische Quantil erhält man zu

$$\frac{\lambda}{(1-y)^{1/\alpha}} = \frac{1.500}{(1-0{,}8)^{1/1{,}75}} = 3.762{,}73$$

Aufgabe 5. *[18 Punkte]*

<u>Hinweis</u>: Sollten Sie keine Werte aus Aufgabe 4 für die Verteilungen ermittelt haben, rechnen Sie mit η=1 für die Poisson Verteilung und α=2 für die Pareto Verteilung.

a) (10 Punkte) Über die in Aufgabe 4 parametrisierten Großschadenverteilungen (Paretoverteilung nach Maximum-Likelihood-Methode) werden nun in Ihrem Simulationsmodell mittels der Inversionsmethode die passenden Großschäden ausgewürfelt. Sie sollen für den ersten Simulationspfad überprüfen, ob Ihr Modell korrekt rechnet. Hierzu haben Sie die folgenden gleichverteilten Zufallszahlen aus Ihrem Modell extrahiert.

Nr.	Zufallszahl
1	0,875
2	0,987
3	0,422
4	0,426
5	0,174

i. Ermitteln Sie die Werte der Zähldichte und der Verteilungsfunktion für die Schadenanzahl k = 0, 1, 2, 3 mit der unter Aufgabe 4b) parametrisierten Schadenanzahlverteilung.
Welche Anzahl von Schäden wird durch Nutzung der ersten Zufallszahl der obigen Liste erzeugt?

ii. Simulieren Sie mit den nächsten verbleibenden Zufallszahlen (ab Nr. 2) für die in i. simulierte Schadenanzahl die Schadenhöhen mit der unter a) parametrisierten Schadenhöhenverteilung und bestimmen Sie den Jahresgesamtschaden vor Rückversicherung.

b) (2 Punkte) In Ihrem Simulationsmodell verwenden Sie einen XL-Vertrag mit Selbstbehalt 2 Mio. Euro und Haftungsstrecke 5 Mio. Euro. Wiederauffüllungen sind unbegrenzt und frei, d.h. „gratis". Berechnen Sie den an den Rückversicherer zedierten Schadenaufwand pro simulierten Schaden aus a). Wie hoch ist Ihr Jahresgesamtschadenaufwand nach Rückversicherung.

c) (6 Punkte) Gehen Sie nun davon aus, dass in jedem Simulationspfad genau ein Schaden aus der angegebenen Paretoverteilung gezogen wird.

i. Zeichnen Sie die zugehörigen OEP und AEP Kurven jeweils vor sowie nach der unter b) angegebenen Rückversicherungsstruktur. Verwenden Sie hierfür die Wiederkehrperioden 10, 20, 50, 100 und 200 Jahre als Stützstellen und stellen Sie eine Tabelle auf.

ii. Anstatt eines Schadens werden nun genau zwei Schäden in jedem Simulationspfad gezogen. Skizzieren Sie die geänderten Kurven.

Lösungsvorschlag Aufgabe 5:

a) (10 Punkte)

i. Über die in Aufgabe 4 angegebene Zähldichte

$$P_\eta(N = k) = e^{-\eta}\frac{\eta^k}{k!}\ \text{mit}\ \eta > 0\ \text{und}\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

werden mit dem Parameter η=0,9 die folgenden Werte der Zähldichte sowie der Verteilungsfunktion ermittelt

k	P(N=k)	P(N<k)
0	0,407	0,407
1	0,366	0,772
2	0,165	0,937
3	0,049	0,987

Die erste Zufallszahl u=0,875 fällt in das Intervall [0,772; 0,927) wodurch eine Schadenanzahl von 2 gezogen wird.

ii. Die Quantilsfunktion der Paretoverteilung lautet

$$x = \frac{\lambda}{(1-y)^{1/\alpha}}$$

Mit α=1,75 und λ=1.500 TEUR erhält man für die Zufallszahl y=0,987 den Wert 18.020 TEUR und für die Zufallszahl y=0,422 den Wert 2.051 TEUR. Der Gesamtschaden vor Rückversicherung beläuft sich also auf 20.071 TEUR.

b) (2 Punkte) Die Abgabe an den Rückversicherer wird über die Formel

$$z = \min(\max(0, x - P), L)$$

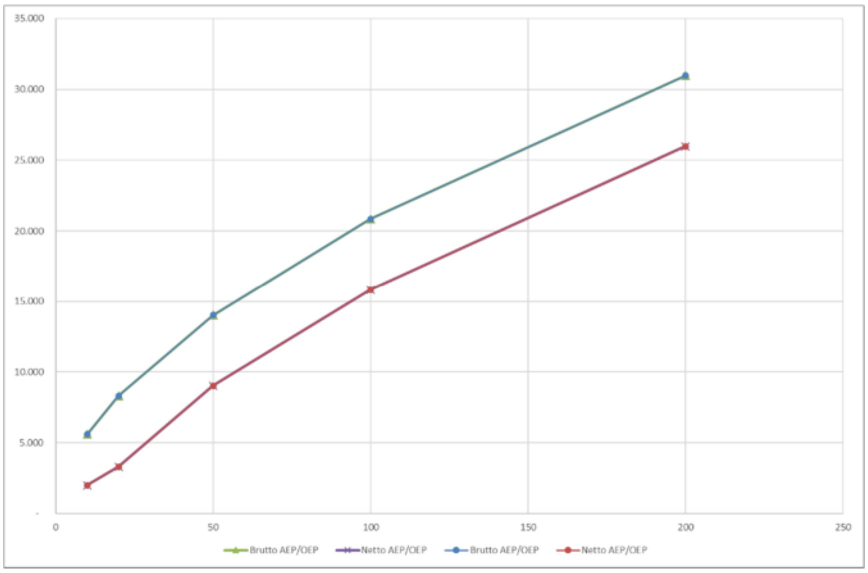
berechnet, wobei z den zedierten Schaden, x den Brutto Schaden, P den Selbstbehalt und L die Haftungsstrecke beschreibt. Durch die unbegrenzte Wiederauffüllungsregelung wird jeder Schaden gemäß der obigen Formel zediert. Mit P = 2.000 TEUR und L = 5.000 TEUR erhält man für den ersten Schaden 5.000 TEUR und für den zweiten Schaden 51 TEUR an Schadenlast, die an den Rückversicherer abgegeben wird. Es verbleibt also ein Jahresgesamtschaden i.H.v. 15.020 TEUR

c) (6 Punkte) Die AEP Kurve beschreibt den Jahresgesamtschaden und die OEP Kurve die maximalen Schäden pro Jahr. Da eine deterministische Schadenanzahl von 1 vorgegeben ist fallen die AEP und die OEP Kurven zusammen. Die Rückversicherungsabgabe berechnet sich pro Wiederkehrperiode gemäß der Formel aus b). Es ergibt sich die folgende Tabelle:

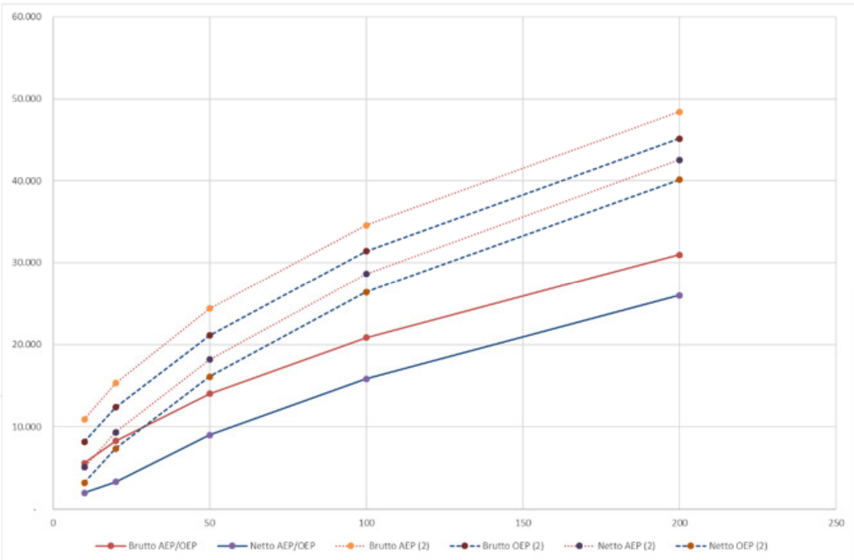
WKP	Quantil	Brutto AEP/OEP	Netto AEP/OEP
10	0,900	5.591	2.000
20	0,950	8.309	3.309

50	0,980	14.026	9.026
100	0,990	20.842	15.842
200	0,995	30.972	25.972

Die Kurven sehen wie folgt aus:



Wählt man anstatt genau einem zwei Schäden ändern sich die Kurven zu:



Gefordert ist hier eine Skizzierung der Kurven, welche nach den folgenden Kriterien beurteilt wird:

- AEP oberhalb von OEP (liegen nicht mehr übereinander)
- Brutto über Netto