DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Dr. Nora Gürtler
Frank Schepers
Michael Mies
Dr. Michael Leitschkis
Dr. Björn Hille
Dr. Steve Brüske

Klausur 2017 zum DAV Grundwissen „Modellierung“

Hinweise:

- Die nachfolgenden Aufgaben sind alle zu bearbeiten (d.h. keine Wahlmöglichkeiten).
- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Insgesamt haben Sie 90 Minuten Zeit und können 90 Punkte erreichen.
- Zum Bestehen der Klausur sind 36 Punkte hinreichend.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Dynamische Unternehmensmodelle (18 Punkte)

Sie arbeiten in der aktuariellen Modellierungsabteilung der Dynamic Life Lebensversicherung. Ihr Unternehmen hat gerade ein Projekt gestartet um eine Modellierungsplattform in Betrieb zu nehmen. Diese soll in Zukunft für verschiedene Fragestellungen, wie z.B. Embedded Value Berechnungen, ALM Analysen und Risikokapitalberechnungen genutzt werden.

a) (4 Punkte) Für all diese Fragestellungen werden Projektionsrechnungen benötigt, d.h. eine Hochrechnung ihres Unternehmens über einen vorher definierten Zeitraum. Skizzieren Sie den schematischen Aufbau eines dynamischen, stochastischen Unternehmensmodells aus dem die dynamischen Abhängigkeiten der Modellteile ersichtlich werden in einer Grafik.

Im Projekt sind Sie für die Aufbereitung der Passiv-Bestände eingeplant. Oft nutzen dynamische, stochastische Unternehmensmodelle auf der Passivseite nicht einzelvertragliche Daten, sondern sogenannte Modellpunkte. Diese werden mit Hilfe von geeigneten Verdichtungsverfahren aus den einzelvertraglichen Daten hergeleitet, wobei für die Erstellung der Modellpunkte meist reine Passivmodelle verwendet werden.

b) (2 Punkte) Nennen Sie zwei zentrale Punkte, in denen sich ein reines Passivmodell im Vergleich zu einem vollen ALM Modell unterscheidet?

c) (2 Punkte) Warum werden Modellpunkte für dynamische, stochastische Modelle benötigt und was ist das Ziel der Bestandsverdichtung?

d) (3 Punkte) Wie können Sie vorgehen, um zu validieren ob Ihre erzeugten Modellpunkte eine hinreichende Güte haben? Worauf müssten Sie besonders achten, falls Ihre Modelpunkte auch für stochastische Berechnungen genutzt werden sollen?

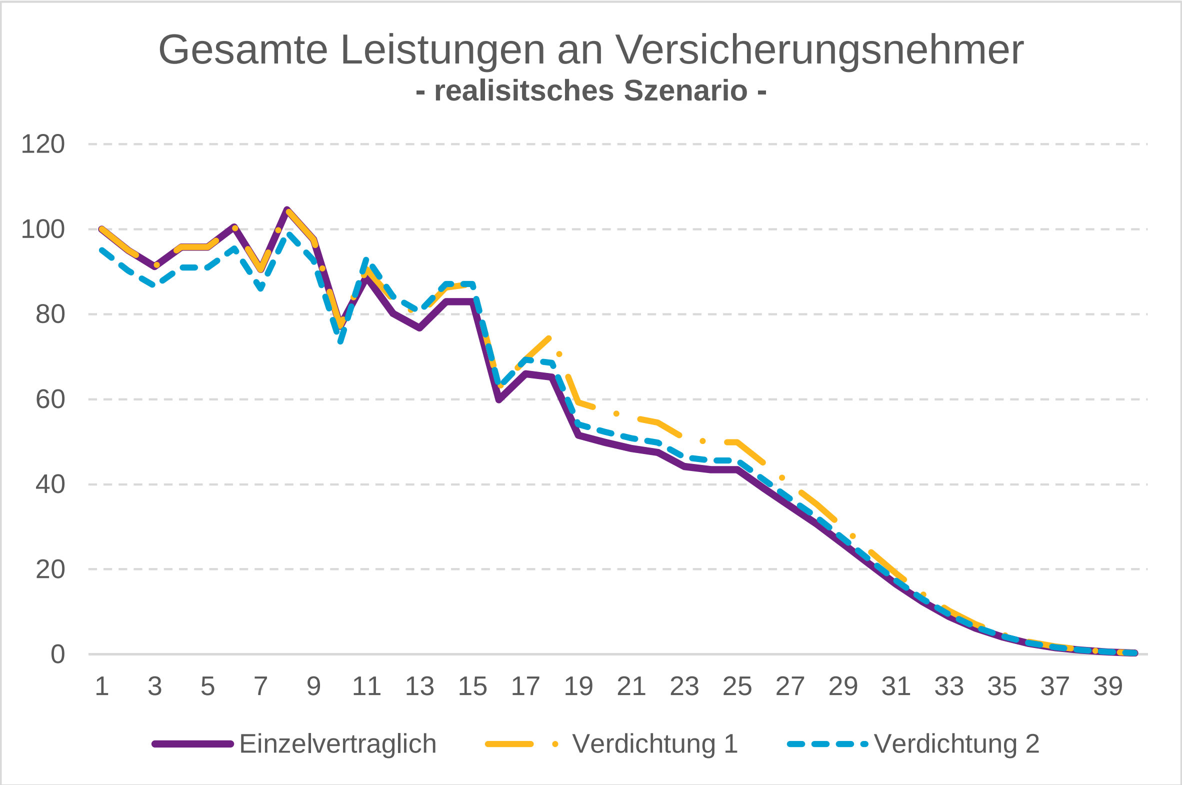
e) (4 Punkte) Beschreiben Sie den Unterschied im Ansatz zwischen traditionellen Gruppierungsansätzen und Optimierungsansätzen. Beschreiben Sie die Grundidee eines möglichen Optimierungsansatzes.

Ihr Modell ist fertig gestellt und soll nun für ALM und MCEV Berechnungen genutzt werden. In ihren ALM Berechnungen wollen Sie die Frage beantworten, ob die aktuellen Kapitalanlagen ausreichend liquide sind, um eine Auszahlung der garantierten Leistungen der nächsten Planjahre sicherzustellen.

Dazu haben Sie mit Hilfe eines cleveren Algorithmus (auf Basis desgleichen einzelvertraglichen Bestands) zwei Verdichtungen ermittelt. Für die Validierung der Leistungen haben Sie die beiden unteren Auswertungen erstellt.

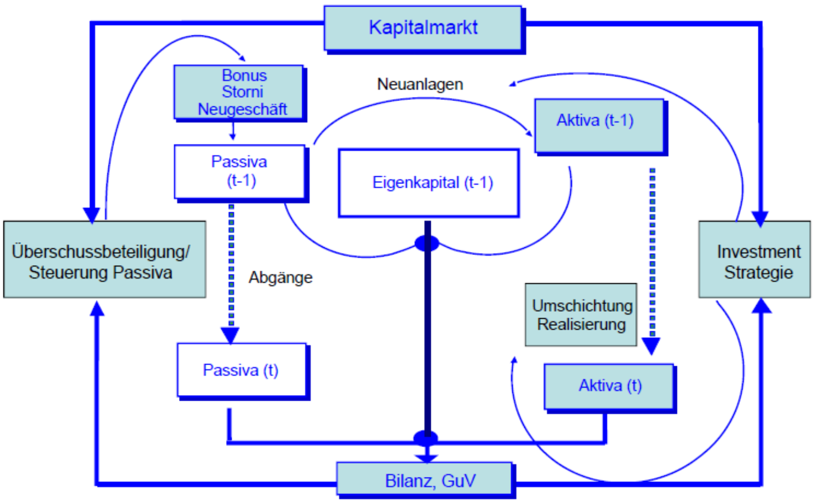
f) (3 Punkte) Wenn Sie nur diese Auswertungen zur Verfügung haben, welche Verdichtung würden Sie für Ihre ALM- und welche für die MCEV Berechnungen nutzen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lauf	Barwert Leistung	Relatives Delta
Basis	1.636	
Verdichtung 1	1.709	4,46%
Verdichtung 2	1.633	-0,18%



Lösungsvorschlag:

a) (4 Punkte)



b) (2 Punkte)

Reine Passivmodelle sind ein Spezialfall eines vollen ALM Modells wie aus Aufgabenteil a) und bilden nur einen Teil der Bilanz ab. Unter anderem wird in reinen Passivmodellen angenommen, dass die Kapitalanlagen den versicherungstechnischen Rückstellungen folgen/entsprechen. Ebenso wird eine vorgegebene Verzinsung der Passiva angenommen und eine feste Überschussbeteiligung vorgegeben.

c) (2 Punkte)

Stochastische Projektionsrechnungen sind bei der Verwendung eines unternehmensindividuellen Modells aufgrund der komplexen Zusammenhänge und der meist hohen Anzahl an benötigten stochastischen Berechnungen, z.B. für die Berechnung der Solvenzanforderung nach der Solvency II Standardformel, sehr rechenintensiv. Um Rechenzeiten zu begrenzen wird daher oft nicht mit einzelvertraglichen Daten, sondern mit Modellpunkten projiziert.

Das Ziel der Verdichtung ist die Erzeugung eines möglichst kleinen Teilbestands mit denselben Eigenschaften wie der Originalbestand der eine gute Übereinstimmung zwischen einer Modellprojektion auf dem verdichteten Bestand und der auf dem Originalbestand liefert. Dabei kann der Grad der Verdichtung, d.h. wie viele Policen durch einen Modellpunkt abgebildet werden, je nach Einsatzgebiet variieren.

d) (3 Punkte)

Statische Validierung: Vergleich statistischer Größen (z. B. Höhe der Deckungsrückstellung, Versicherungssumme, gebundenen RfB, etc.) des Modellbestandes zum Berechnungsstichtag mit denen des Originalbestands.

Dynamische Validierung (rein passivseitig): Überprüfung, dass sich die zukünftige Projektion konsistent zur Realität abwickelt. Die Abweichungen der Projektionsergebnisse aus dem Modellbestand sollten gegenüber einer Hochrechnung des Originalbestands in einem tolerierbaren Rahmen bleiben.

Dynamische Validierung (volles ALM Modell): Aus technischen Gründen ist es meist nicht möglich das volle dynamische Modell mit dem einzelvertraglichen Bestand laufen zu lassen. Von daher werden Modellpunkte, bzw. Validierungen der Modellpunkte, mit Hilfe von rein passivseitigen Modellen erstellt. Modellpunkte stellen immer nur eine Approximation dar. Insbesondere für Risikokapitalberechnungen ist zu überprüfen, ob die Modellpunkte das Risikoprofil der einzelvertraglichen Daten angemessen abbilden. Sollen die Modellpunkte für eine dynamische, stochastische Berechnung verwendet werden, so ist es sinnvoll, die Güte des Modellbestands auf unterschiedlichen ökonomischen und aktuariellen (z.B. Stornoschocks) Szenarien zu testen. Dabei sollten dynamische Managementregeln des Modells zumindest approximativ berücksichtigt werden, z.B. durch die Anpassung der im Passivmodell unterstellten Überschussbeteiligung zum jeweiligen Kapitalmarktszenario.

e) (4 Punkte)

Bei traditionellen Gruppierungsansätzen werden auf Basis von statischen Policengrößen, wie z.B. Geschlecht, Versicherungsdauer, Restlaufzeit des Vertrages, Versicherungssumme, Reserve zum Stichtag, etc., Modellpunkte durch Zusammenfassen von Verträgen mit „ähnlichen“ Merkmalen gebildet. Für viele Größen, wie z.B. die Prämienzahlungsdauer, die Restlaufzeit oder die Rentengarantiezeit, wird dabei pro Modellpunkt ein (gewichteter) Mittelwert aller Policen genutzt die zu diesem Modellpunkt gehören. Diese Art der „direkten“ Verdichtung erfordert Erfahrung / Expertenwissen und ist nur sehr schwer zu automatisieren.

Die Idee zur Nutzung von Optimierungsansätzen besteht darin, aus den vorhandenen Daten mit Hilfe eines möglichst automatisierten Verfahrens, ohne Expertenwissen und ohne manuelle Eingaben des Benutzers während des Prozesses, Modellpunkte mit Hilfe von Optimierungsalgorithmen zu bilden. Ein großer Vorteil von diesen Verfahren besteht neben der besseren Automatisierbarkeit darin, dass neben Eingabegrößen auch die Ergebnisse von einzelvertraglichen Projektionsberechnungen genutzt werden können.

Lineare Optimierung:

Das Ziel der Modellpunkterstellung ist es, eine möglichst gute Übereinstimmung zwischen einer Modellprojektion auf dem verdichteten Bestand und auf dem Originalbestand für ausgewählte Kenngrößen (z.B. wichtigste Bilanzwerte, G&V Positionen) zu erhalten. Aus dieser Anforderung kann eine Zielfunktion abgeleitet werden. Diese Zielfunktion kann für einen Teilbestand sowie den Originalbestand berechnet werden. Der Ansatz kann somit als lineares Gleichungssystem formuliert werden: Finde nicht negative Gewichte x_i die das folgende Gleichungssystem lösen

$$x_1 * \begin{bmatrix} Res_1(1) \\ Res_1(2) \\ \dots \\ Res_1(N) \\ \dots \\ CF_1(1) \\ CF_1(2) \\ \dots \\ CF_1(N) \end{bmatrix} + x_2 * \begin{bmatrix} Res_2(1) \\ Res(2) \\ \dots \\ Res_2(N) \\ \dots \\ CF_2(1) \\ CF_2(2) \\ \dots \\ CF_2(N) \end{bmatrix} + \dots + x_m * \begin{bmatrix} Res_m(1) \\ Res_m(2) \\ \dots \\ Res_m(N) \\ \dots \\ CF_m(1) \\ CF_m(2) \\ \dots \\ CF_m(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Res_G(1) \\ Res_G(2) \\ \dots \\ Res_G(N) \\ \dots \\ CF_G(1) \\ CF_G(2) \\ \dots \\ CF_G(N) \end{bmatrix}$$

Hierbei ist

- m Anzahl der Policen des Original-, oder Teilbestandes

- N Projektionsdauer

- $CF_i(k)$ / $Res_i(k)$: Cashflow / Reserve von Police i im Projektionsjahr k

- $CF_G(k)$ / $Res_G(k)$: Cashflow / Reserve des Gesamtbestandes im Projektionsjahr k

Da das lineare Gleichungssystem durch Modellpunkte nicht immer exakt lösbar ist, werden die Gewichte x_i durch lineare Regression so bestimmt, dass die quadratische Abweichung zwischen der Modellprojektion auf dem verdichteten Bestand und der auf dem Originalbestand möglichst gering ist

Cluster-Ansatz

Die gewünschte Anzahl an Modellpunkten wird vorgegeben. Jeder Modellpunkt wird dann als Punkt in einem n-dimensionalen Raum aufgefasst, wobei etwa Prämien, Reserven, Zugangsjahr etc. die Dimensionen des Raumes darstellen. Ein Cluster Algorithmus bildet dann „Cluster“, d.h. es werden Punkte mit „ähnlichen“ Punkten so lange verschmolzen, bis der definierte Verdichtungsgrad erreicht ist, wobei je nach Cluster Algorithmus die Punkte nach unterschiedlichen Methoden zusammengefasst werden. Ähnlichkeit wird dabei über die Distanz von zwei Punkten (Modellpunkten) im n-dimensionalen Raum gemessen, wobei als Distanzmaß meist die euklidische Distanz verwendet wird.

f) (3 Punkte)

Eine detaillierte Liquiditätsplanung wird üblicherweise über einen kurzen Zeithorizont von einigen Jahren durchgeführt und hat das Ziel zu überprüfen, ob ein Lebensversicherungsunternehmens jederzeit in der Lage ist alle Leistungsverpflichtungen zu erfüllen. Von daher ist es wichtig, die ausgehenden Cashflows der nächsten Planjahre möglichst exakt mit einem Modellpunktbestand zu treffen.

Im Rahmen von MCEV Berechnungen sind barwertige Größen, wie z.B. der PVFP wichtig. Bei diesen Größen ist in erster Linie wichtig, dass eine Projektion mit Modellpunkten den Barwert der zukünftigen Aktionärsgewinne möglichst genau abbildet. Die Validierung des Verlaufes der Aktionärsgewinne über die Zeit ist erst von nachrangiger Bedeutung.

Aus diesen Argumenten kann man schlussfolgern, dass Verdichtung 1 eher für die ALM Analyse und Verdichtung 2 eher für MCEV Berechnungen geeignet ist.

Aufgabe 2: Kapitalmarkt- und Kapitalanlagemodellierung (18 Punkte)

Sie arbeiten in der aktuariellen Modellierungsabteilung und befassen sich vor allem mit dem Einfluss der Kapitalmärkte auf die ökonomische Bewertung Ihres Unternehmens.

Der Projektionshorizont in der Modellwelt dieser Aufgabe betrage lediglich ein Jahr. Das Kapitalanlageuniversum bestehe lediglich aus Anleihen und Aktien. Des Weiteren sei bekannt, dass lediglich zwei Kapitalmarktszenarien eintreten können, nämlich das „gute" und das „schlechte" Szenario:

- das „gute" Szenario besteht darin, dass der Aktienindex um 20% steigt, während die risikolose Zinskurve flach bei 2% liegt.

- das „schlechte" Szenario lässt sich dadurch beschreiben, dass der Aktienindex um 20% fällt, während die risikolose Zinskurve flach bei 2% liegt.

a) (2 Punkte) Bitte geben Sie das Certainty Equivalent – Szenario für die obige Modellwelt der Aufgabe an. Welche Rendite wird in diesem Szenario erwirtschaftet?

b) (4 Punkte) Mithilfe Ihres stochastischen Unternehmensmodells haben Sie für das „gute" Szenario einen Rohüberschuss von 20 GE und für das „schlechte" Szenario einen Rohüberschuss von -40 GE errechnet. Für das Certainty Equivalent – Szenario haben Sie einen Rohüberschuss von 5 GE bestimmt. Der Rohüberschuss, sofern positiv, gehört in unserer Modellwelt zu 90% dem Versicherungsnehmer und zu 10% dem Aktionär. Schließlich sei in diesem Aufgabenteil vereinfachend angenommen, dass die risikoneutralen Eintrittswahrscheinlichkeiten für die beiden Szenarien jeweils gleich 50% seien.Des Weiteren soll die einjährige Diskontierung in diesem Aufgabenteil vernachlässigt werden.

Bitte berechnen Sie auf Grundlage der obigen Daten den stochastischen PVFP und den Zeitwert der Garantien und Optionen (TV G&O).

c) (4 Punkte) Es seien die unter b) beschriebenen Angaben weiterhin gültig, zusätzlich dazu stehe diesmal aber ein Puffer von 10 GE zur Abfederung von Kapitalmarktschwankungen bereit. Bitte berechnen Sie für diesen Fall den stochastischen PVFP und den Zeitwert der Garantien und Optionen (TV G&O).

d) (6 Punkte) Angenommen, der Aktienindex stehe bei 100 Punkten zum Projektionsbeginn. Wir betrachten eine Call-Option auf den Index mit Strike K = 100 und einjähriger Laufzeit. Bitte bestimmen Sie den Wert C dieser Call-Option zum Zeitpunkt des Projektionsbeginns (t=0), indem Sie in diesem Aufgabenteil mit korrekten risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten und mit stetiger einjähriger Diskontierung rechnen.

e) (2 Punkte) Der Chefvolkswirt Ihres Unternehmens sagt, die Eintrittswahrscheinlichkeit für das „gute" Szenario würde seiner Meinung nach 65% betragen. Wie ändert sich dadurch Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil d?

Lösungsvorschlag:

a) (2 Punkte) Im Certainty Equivalent – Szenario erwirtschaftet jede Asset-Klasse dieselbe Rendite. Die Anleihen erwirtschaften gemäß der Aufgabestellung eine Rendite von 2%, denn alle Forward-Zinsen betragen 2%, wenn die Spot-Kurve flach bei 2% liegt. Folglich erwirtschaften auch die Aktien dieselbe Rendite von 2%.

b) (3 Punkte) Der Aktionärsanteil im „guten" Szenario beträgt 10% x 20 GE = 2 GE, der Aktionärsanteil im „schlechten" Szenario beträgt 100% x (-40 GE) = - 40 GE. Daraus ergibt sich unter Beachtung der für diese Teilaufgabe anzunehmenden risikoneutralen Eintrittswahrscheinlichkeiten und der einjährigen Diskontierung:

PVFP = 2 GE x 0.5 + (-40 GE) x 0.5 = - 19 GE.

Im Certainty Equivalent – Szenario beträgt der PVFP 10% x 5 GE = 0.5 GE, somit erhalten wir:

TV G&O = 0.5 GE – (-19 GE) = 19.5 GE.

c) (3 Punkte) Der Aktionärsanteil im „guten“ Szenario beträgt weiterhin 10% x 20 GE = 2 GE, der Aktionärsanteil im „schlechten“ Szenario beträgt dank dem Puffer jedoch diesmal 100% x (-40 GE + 10 GE) = **-** 30 GE. Daraus ergibt sich unter Beachtung der für diese Teilaufgabe anzunehmenden risikoneutralen Eintrittswahrscheinlichkeiten und der einjährigen Diskontierung:

PVFP = 2 GE x 0.5 + (-30 GE) x 0.5 = **-** 14 GE.

Im Certainty Equivalent – Szenario beträgt der PVFP weiterhin 0.5 GE. Somit erhalten wir:

TV G&O = 0.5 GE – (-14 GE) = 14.5 GE.

d) (6 Punkte) Sei p die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des „guten“ Szenarios. Die Arbitragefreiheit des Modells impliziert die folgende Gleichung für den Aktienindex:

100 GE = exp(-0.02) x (p x 120 GE + (1-p) x 80 GE).

Daraus erhalten wir p = (100 – exp(-0.02) x 80) / (120 – 80) = 53.96%.

Der Wert der Call-Option am Ausübungstag (t=1) beträgt im „guten“ Szenario 20 GE, im „schlechten“ Szenario verfällt die Option wertlos. Daher ergibt sich der Wert der Call-Option zum Zeitpunkt t=0 wie folgt:

C = exp(-0.02) x (p x 20 GE + (1-p) x 0 GE) = 10.58 GE.

e) (2 Punkte) Überhaupt nicht, denn die Behauptung des Chefvolkswirts bezieht sich auf eine Real-World-Wahrscheinlichkeit. Diese hat keinen Einfluss auf die für den Aufgabenteil d) relevanten risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 3: Ökonomische Bilanz und Solvenzsituation (18 Punkte)

1) (2 Punkte) Stellen Sie die ökonomische Bilanz eines Versicherungsunternehmens gemäß den Vorgaben aus Solvency II auf und berücksichtigen Sie dabei die folgenden Positionen:

- Risikomarge
- Ökonomischer Wert der sonstigen Aktiva
- Ökonomische Eigenmittel
- Ökonomischer Wert der Kapitalanlagen
- Ökonomischer Wert der sonstigen Passiva
- Best Estimate der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten

2) (6 Punkte) Beschreiben Sie bitte für jede der sechs unter 1) genannten Positionen der ökonomischen Bilanz kurz, wie sie definiert sind und wie man sie ermittelt.

3) (2 Punkte) Geben Sie die Definition der freien ökonomischen Eigenmittel und der Solvenzquote eines Versicherungsunternehmens gemäß den Vorgaben aus Solvency II an.

4) (8 Punkte) Die Augusta AG schreibt im deutschen Markt Rechtsschutz-Versicherungen im Privatkundensegment. Sie betreibt eine konservative Kapitalanlagepolitik und legt nur in Staatsanleihen sowie Unternehmensanleihen hoher Bonität an. Die Augusta AG hat weder sonstige Aktiva noch sonstige Passiva auf ihrer ökonomischen Bilanz. Aufgrund ihrer geringen Exponierung gegenüber Spitzenrisiken hat die Augusta AG keine Rückversicherung abgeschlossen. Aus Gründen der Vereinfachung nehmen wir an, dass die Augusta AG keine Steuern zahlt, und dass wir aufgrund der aktuell sehr niedrigen Zinsen auf Diskontierung verzichten können.

Ihr Aktuariat hat Ihnen ausgerechnet, dass per 31.12.2016 die Augusta AG Kapitalanlagen zu Marktwerten i.H.v. 500 Mio. € hat und dass der Best Estimate der Schadenreserven 400 Mio. € beträgt. Ferner hat Ihnen Ihr Aktuariat per 31.12.2016 auf Basis eines genehmigten internen Modells die folgenden Risikokapitalien der Augusta AG ermittelt (standalone vor Diversifikation, Werte in Mio. €):

Standalone Risikokapital	
Zinsrisiko	20
Kreditrisiko	30
Zeichnungsrisiko	15
Reserverisiko	20
Operationelles Risiko	10

Schließlich hat Ihr Aktuariat ausgerechnet, dass der Diversifikationseffekt zwischen allen fünf angegebenen Risikokategorien 40% beträgt, zwischen den versicherungstechnischen und operationellen Risiken jedoch nur 20%.

(i) (2 Punkte) Berechnen Sie bitte das gesamte benötigte Risikokapital der Augusta AG. Wir bezeichnen es gemäß der unter Solvency II verwendeten Terminologie als SCR (Solvency Capital Requirement).

(ii) (2 Punkte) Berechnen Sie bitte die Risikomarge der Augusta AG. Bestimmen Sie hierzu zunächst das Risikokapital SCR_{non_hedge} für nicht hedgebare Risiken. Wir unterstellen zur Berechnung der Risikomarge, dass sich das SCR_{non_hedge} binnen 3 Jahren auf 0 abbaut und dass der Kapitalkostensatz 6% beträgt.

(iii) (2 Punkte) Stellen Sie bitte die ökonomische Bilanz der Augusta AG auf und bestimmen Sie deren ökonomische Eigenmittel.

(iv) (2 Punkte) Berechnen Sie bitte für die Augusta AG die Solvenzquote gemäß Solvency II sowie deren freie ökonomische Eigenmittel.

Lösungsvorschlag:

1) (2 Punkte) Die ökonomische Bilanz eines Versicherungsunternehmens sieht wie folgt aus:

<table>
<tr><th>Aktiva</th><th>Passiva</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Ökonomischer Wert der Kapitalanlagen</td><td>Ökonomische Eigenmittel</td></tr>
<tr><td>Risikomarge</td></tr>
<tr><td>Best Estimate der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten</td></tr>
<tr><td>Ökonomischer Wert der sonstigen Aktiva</td><td>Ökonomischer Wert der sonstigen Passiva</td></tr>
</table>

2) (6 Punkte) Definitionen und Erklärungen:

(#) (0,5 Punkte) Der ökonomische Wert der Kapitalanlagen ist der Marktwert der Kapitalanlagen. Sofern vorhanden, bestimmt sich dieser durch den Börsenkurs zum Stichtag.

(#) (0,5 Punkte) Die ökonomischen Eigenmittel ergeben sich aus Differenzenbildung: Ök. Eigenmittel

= ÖW Kapitalanlagen + ÖW sonstige Aktiva – ÖW Verbindlichkeiten – ÖW sonstige Passiva

(#) (2 Punkte) Bei der Berechnung der Risikomarge unterstellt man, dass der Versicherungsbestand auf ein anderes VU übertragen wird. Dieses muss zusätzlich zum Best Estimate Eigenmittel vorhalten, um gegen Risiken hinreichend gewappnet zu sein. Dem übernehmenden Unternehmen entstehen so Kapitalbindungskosten, um auch künftig stets ökonomische Eigenmittel in Höhe des benötigten Risikokapitals zu stellen.

Die Berechnung der Risikomarge erfolgt über einen Kapitalkostenansatz:

- Ermittlung des in einer Run-Off-Situation benötigten Risikokapitals für nicht-hedgebare Risiken nach Diversifikation im Startpunkt t=0 der Projektion.
- Koppelung dieses Risikokapitals an den Auslauf des Bestands über den Projektionszeitraum, z.B. in der Personenversicherung mit der Deckungsrückstellung als Verlaufsträger.
- In jedem Jahr der Projektion Berechnung von z.B. 6% Kapitalkosten (Zinsverlust) auf das jeweilige benötigte Risikokapital. Die Risikomarge wird dann als Barwert dieser Kapitalkosten ermittelt.

(#) (2 Punkte) Der Best Estimate der vt. Verbindlichkeiten wird in der Personenversicherung bestimmt als der Erwartungswert (Best Estimate) der diskontierten Cashflows, inkl. des Wertes für Optionen und Garantien („Financial Options & Guarantees“):

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \text{Barwert (Versicherungsleistungen} - \text{Kosten} - \text{Beiträge)}_{\text{i}}$$

In der Schaden- und Unfallversicherung ist der Best Estimate der vt. Verbindlichkeiten gerade der Best Estinate der Schadenreserve. Dieser wird mittels gängiger Schadenreservierungsverfahren bestimmt, z.B. mit der Chain Ladder-Methode.

(#) (1 Punkt) Der ökonomische Wert der sonstigen Aktiva und Passiva ergibt sich zumeist aus einer Umbewertung der entsprechenden HGB Größen. Die sonstigen Passiva umfassen auch den ökonomischen Wert latenter Steuern.

3) (2 Punkte)

Freie ök. Eigenmittel	=	Ok. Eigenmittel – SCR
Solvenzquote	=	Ok. Eigenmittel / SCR

4) (8 Punkte)

(i) (2 Punkte) Das SCR der Augusta AG bestimmt sich aus der Summe der einzelnen Risikokapitalien abzüglich Diversifikation:

SCR = (20+30+15+20+10)*(1-40%) = 95*0.6 = 57

(ii) (2 Punkte) Das SCR_{non_hedge} der Augusta AG bestimmt sich aus der Summe der versicherungstechnischen und operationellen Risikokapitalien abzüglich Diversifikation:

SCR = (15+20+10)*(1-20%) = 45*0.8 = 36

Es baut sich gemäß der Aufgabenstellung nach einem Jahr auf 24, nach zwei Jahren auf 12 und nach drei Jahren auf 0 ab. Jeweils 6% Kapitalkosten ergeben eine Risikomarge i.H.v. 4,3 (man beachte die Annahme, dass ohne Diskontierung gerechnet wird):

RM = (36+24+12)*6% = 72*0,06 = 4,3

(iii) (2 Punkte) Die ökonomische Bilanz der Augusta AG sieht wie folgt aus. Dabei ergeben sich die ökonomischen Eigenmittel als Differenz der übrigen Positionen:

Aktiva	**Passiva**
Ökonomischer Wert der Kapitalanlagen: 500 Mio. €	Ökonomische Eigenmittel: 95,7 Mio. €
	Risikomarge: 4,3 Mio. €
	Best Estimate der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten: 400 Mio. €

(iv) (2 Punkte) Die Solvenzquote sowie die freien ökonomischen Eigenmittel der Augusta AG bestimmen sich gemäß:

SII-Quote = ök. Eigenmittel / SCR = 95,7 / 57 = 168%

Freie ök. Eigenmittel = ök. Eigenmittel - SCR = 95,7 - 57 = 38,7 Mio. €

Aufgabe 4: Reserverisiko (18 Punkte)

<u>Hinweis:</u> Runden Sie die Parameter auf zwei Nachkommastellen.

Sie sind Reserveaktuar in der Feldafinger Brandkasse und dafür verantwortlich, dass Ihr Unternehmen unter HGB auch in Jahren hoher Schadenbelastung eine auskömmliche Schadenreserve für Ihre Sparten KH und VGV hat. Um dies sicherzustellen tauschen Sie sich mit Ihrem Kollegen aus der Dynamischen Finanzanalyse aus und bitten Ihn um geeignete weitere Informationen über die Volatilität der Reserve.
Neben der folgenden Tabelle gibt Ihnen Ihr Kollege auch den Hinweis, eine Generalized Pareto Verteilung (GPD) mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1-\left(1 + \xi \cdot \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

und den Momenten

$$E(X) = \mu + \frac{\sigma}{1-\xi}\;; \qquad Var(X) = \frac{\sigma^2}{(1-\xi)^2 \cdot (1-2\cdot\xi)}$$

zu verwenden.

	Ultimate	bisher geleistete Zahlungen	Variationskoeffizient gemäß Standardformel der Reserven	Parameter μ der GPD
KH	1000	900	9%	95
VGV	400	350	10%	46

absolute Werte in Mio. Euro

a) (2 Punkte) Ermitteln Sie zunächst anhand der vorliegenden Informationen die Best Estimate Reserve und dann die Varianz pro Sparte.

b) (8 Punkte) Bestimmen Sie die Parameter der GPD mittels Momentenmethode pro Sparte.

c) (6 Punkte) Sie wollen nun Ihre HGB Reserve derart einstellen, dass Sie bei einem 50jahres Ereignis keine Nachreservierung unter HGB durchführen müssen. Berechnen Sie die benötigte Reserve unter Zuhilfenahme der von Ihnen unter b) parametrisierten Verteilungen.

d) (2 Punkte) Sie wollen für Ihre beiden Sparten VGV und KH mehrere Abhängigkeitsstrukturen ausprobieren, welche gewisse Eigenschaften erfüllen sollen. Ordnen Sie die folgenden Abhängigkeitsstrukturen den Eigenschaften zu.

Eigenschaften:

I. Abwicklungsverluste und -gewinne sollen stark miteinander gekoppelt sein
II. Abwicklungsverluste und -gewinne sind gegenläufig
III. Nur große Abwicklungsverluste und -gewinne sind stark miteinander gekoppelt
IV. Abwicklungsverluste und -gewinne sind unkorreliert

Abhängigkeitsstrukturen:

1. Gumbel Copula
2. Korrelation = 0
3. Korrelation = - 0,5%
4. Korrelation = 1

Lösungsvorschlag:

a) (2 Punkte) Um die Best Estimate Reserve zu bestimmen, ziehen Sie von dem jeweiligen Ulltimate die bisher geleisteten Zahlungen ab und erhalten 100 Mio. Euro für die Sparte KH und 50 Mio. Euro für die Sparte VGV. Durch Multiplikation des Variationskoeffizienten an die Best Estimate Reserve erhalten Sie zunächst die Standardabweichung und durch quadrieren die Varianz i.H.v. 81 Mio. Euro bzw. 25 Mio. Euro.

b) (8 Punkte) Sie formen zunächst die Gleichung für den Erwartungswert um zu

$$E(x) - \mu = \frac{\sigma}{1 - \xi}$$

und setzen diesen Ausdruck in die Formel für die Varianz ein.

$$Var(x) = \frac{(E(x) - \mu)^2}{(1 - 2 \cdot \xi)}$$

Dies stellen sie nun nach ξ um und erhalten

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{(E(x) - \mu)^2}{Var(x)}\right)$$

In diese Formel setzen Sie nun die jeweiligen Erwartungswerte und Varianzen ein und erhalten für die Sparte KH $\xi = 0{,}35$ und für VGV $\xi = 0{,}18$.

Diese Werte setzen Sie in die Gleichung

$$\sigma = (E(x) - \mu) \cdot (1 - \xi)$$

ein und erhalten für KH $\sigma = 3{,}25$ und für VGV $\sigma = 3{,}28$.

c) (6 Punkte) Zunächst stellen Sie die Verteilungsfunktion in eine Quantilsfunktion um

$$F(x) = 1 - \left(1 + \xi \cdot \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

$$\Leftrightarrow (1 - F(x))^{-\xi} - 1 = \xi \cdot \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{(1 - F(x))^{-\xi} - 1}{\xi} \cdot \sigma + \mu$$

Das 50jahres Ereignis der Nachreservierung entspricht der Wahrscheinlichkeit

$$p = F(x) = 1 - \frac{1}{50} = 98\%$$

Mit den Parametern aus b) erhält man dann für KH das Quantil 122 Mio. Euro und für VGV 65 Mio. Euro.

d) (2 Punkte) Sie haben die folgende Zuordnung:

I-4, II-3, III-1, IV-2

Aufgabe 5: Naturkatastrophenmodellierung (18 Punkte)

Vorab: Geben Sie die Ergebnisse dieser Aufgabe bitte in Mio. EUR bzw. Mio. USD, gerundet auf eine Nachkommastelle, an.

Ihr Unternehmen zeichnet im Rahmen der Wohngebäudeversicherung Erdbebenrisiken in Übersee. Um das Risiko in Ihrem Internen Modell abzubilden, haben Sie ein exposure-basiertes, geophysikalisches Modell lizenziert. Das Modell liefert Ihnen zusätzlich zur Year-Loss-Table die folgenden Statistiken (Brutto-Werte **in USD**):

Eintrittswahrscheinlichkeit	Jahresmaximalschaden	Jahresgesamtschaden
20.00%	5.0	8.7
10.00%	9.4	17.3
3.33%	17.6	32.8
2.00%	22.3	39.5
1.00%	31.4	50.4
0.67%	36.5	57.0
0.40%	46.9	65.7
Mittelwert	3.3	5.5
Standardabweichung	7.1	10.9

a) (6 Punkte) Fertigen Sie ein Diagramm mit den zugehörigen AEP- und OEP-Kurven an (beides in einem Diagramm). Interpolieren Sie zwischen den angegebenen Stützstellen linear. Achten Sie dabei bitte auf die Achsenbeschriftungen und die Skalierung.

b) (2 Punkte) Sie wollen eine Einschätzung für das Brutto-Risikokapital für Ihr Erdbebenrisiko angeben. Als Risikomaß verwenden Sie wie üblich den zentrierten Value-at-Risk zum 200-Jahresereignis (d.h. inklusive Berücksichtigung der Erwartungswertkorrektur). Wie hoch ist dieses Risikokapital in EUR, wenn ein Euro genau 1,07 USD kostet?

c) (2 Punkte) Die Rückversicherungsabteilung möchte nun durch ein Cat-XL-Programm ein Erdbebenereignis absichern, welches statistisch nur alle 250 Jahre eintritt. Wie hoch muss bei einem Selbstbehalt von 5 Mio. EUR die Haftungsstrecke in EUR sein, wenn ein Euro genau 1,07 USD kostet?

d) (8 Punkte) Nach Verhandlungen mit den Rückversicherern wird das folgende Cat-XL-Programm gezeichnet, **durch welches EUR-Aufwände gedeckt sind**. Die Basisprämie beträgt 40 Mio. USD.

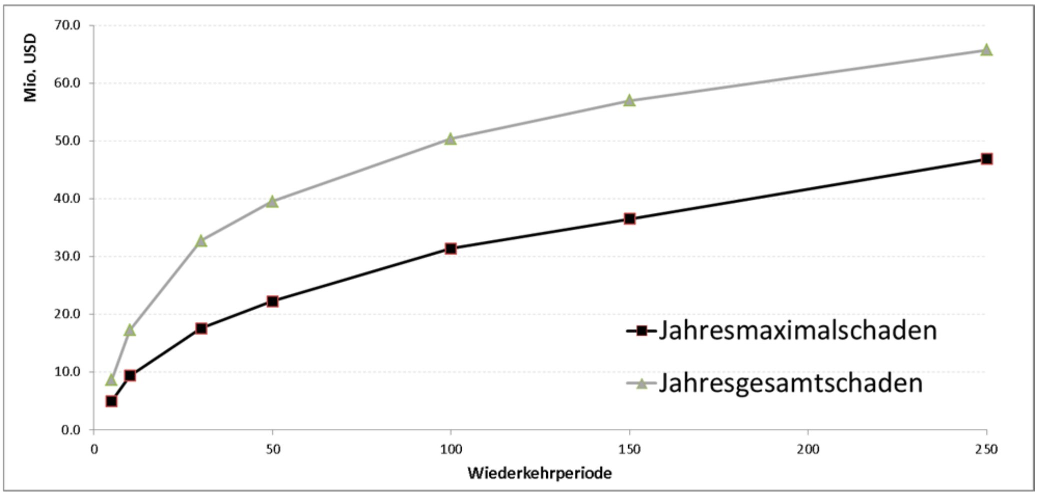
	Haftung	Prämienrate	Wiederauffüllungen
Layer 1:	10 xs 5 Mio. EUR	7.6%	5 zu 100%
Layer 2:	30 xs 15 Mio. EUR	3.5%	3 zu 100%

Nach einem Jahr hat sich nun folgendes realisiert: Der Euro gibt nach und kostet nur noch 0,91 USD. Außerdem ist es zu einem verheerenden Erdbeben gekommen, durch welches ein Brutto-Schadenaufwand in Höhe von 42 Mio. USD entsteht.

- Berechnen Sie den zedierten Schadenaufwand und den Selbstbehalt in EUR.
- Berechnen Sie die zedierte Prämie (Installment und Wiederauffüllung) in EUR.
- Der Leiter der Rückversicherung beschwert sich bei Ihnen, dass die von Ihnen vorgeschlagene Deckung nicht ausgereicht hat. Warum ist dies so?
- Welche eindeutige Aussage können Sie zu der Anzahl der gedeckten Erdbebenereignisse treffen (mit kurzer Begründung)?
    I. Maximal fünf Ereignisse sind gedeckt.
    II. Maximal drei Ereignisse sind gedeckt.
    III. Maximal acht Ereignisse sind gedeckt.
    IV. Keine eindeutige Aussage bezüglich der Anzahl der gedeckten Ereignisse möglich.

Lösungsvorschlag:

a) (6 Punkte) Zunächst werden die Wiederkehrperioden zu den jeweiligen Eintrittswahrscheinlichkeiten bestimmt und danach kann das folgende Diagramm angefertigt werden:



b) (2 Punkte) Der Jahresgesamtschaden liegt im 200-Jahresereignis bei ca. 61,4 Mio. USD (bei Interpolation über die Wiederkehrperioden). Nach Mittelwertabzug in Höhe von 5,5 Mio. USD ergibt sich ein Risikokapital von ca. 55,9 Mio. USD bzw. ca. 52,2 Mio. EUR. Wird stattdessen über die Eintrittswahrscheinlichkeiten interpoliert, beträgt das Risikokapital 51,5 Mio. USD bzw. 48,1 Mio. EUR.

c) (2 Punkte) Der Jahresmaximalschaden liegt für das 250-Jahresereignis bei 46,9 Mio. USD bzw. 43,8 Mio. EUR. Nach Abzug eines Selbstbehaltes von 5 Mio. EUR muss die Haftungsstrecke 38,8 Mio. EUR betragen.

d) (8 Punkte) Da die Rückversicherungsverträge auf Euro laufen, muss der Schaden zunächst in EUR umgerechnet werden: Er beträgt 46,2 Mio. EUR. Damit ergibt sich

- ein zedierter Schadenaufwand in Höhe von 40 Mio. EUR und ein Selbstbehalt von 6,2 Mio. EUR (der Schadenaufwand übersteigt den Plafond der Rückdeckung).
- Sowohl UP-Front-Prämie als auch Wiederauffüllungsprämie betragen (7,6%+3.5%)*40 = 4,4 Mio.USD bzw 4,9 Mio. EUR. In Summe also 9,8 Mio. EUR.
- In Aufgabenteil c) sind Sie von einem Umrechnungskurs in Höhe von 1,07 USD/EUR ausgegangen. Für diesen Umrechnungskurs wäre die Rückdeckung ausreichend. Zusätzlich zum verheerenden Erdbebenereignis hat nun auch noch der Euro gegenüber dem USD derart abgewertet, dass der in EUR umgerechnete Betrag den Plafond der Deckung übersteigt (hier hat sich Wechselkursrisiko realisiert!).
- Antwort IV: Keine Aussage möglich, die Wiederauffüllung bezieht sich nicht auf die Anzahl der Ereignisse, sondern auf die verbrauchte Haftungsstrecke.