Prüfung im November 2008
über Krankenversicherungsmathematik (Spezialwissen)

Erich Schneider

Am 8. November 2008 führte die DAV die Prüfung im Spezialgebiet Krankenversicherungsmathematik durch. Von 15 Teilnehmern haben 11 die Prüfung bestanden.

Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der die vier nachfolgenden Aufgaben zu lösen waren. Die Aufgaben wurden gestellt von A. Gartmann, C. Hofer, E. Schneider und G. Siegel. Maximal waren insgesamt 30 Punkte zu erreichen. Zum Bestehen der Klausur waren mindestens 12 Punkte erforderlich.

1. Aufgabe (9,0 Punkte)

a) Thema: Der Variationskoeffizient in individuellen Risikomodellen

In einem speziellen altersmäßig heterogenen Risikokollektiv ergeben sich die Gesamtleistungen S aus den Teilsummen S_a, S_s und S_z für ambulante, stationäre bzw. zahnärztliche Leistungen. Es wird vorausgesetzt, dass diese drei zufälligen Teilsummen stochastisch unabhängig sind. Absolute Selbstbehalte werden hierbei nicht berücksichtigt.

Berechnen Sie den Variationskoeffizient v von S, wenn folgende Parameter vorgegeben sind:

- Das Bestandsvolumen im Risikokollektiv sei L = 21.000.
- Der mittlere (erwartete) Kopfschaden des Gesamtkollektivs setzt sich zu $\alpha_a = 54$ % aus ambulanten, zu $\alpha_s = 29$ % aus stationären sowie zu $\alpha_z = 17$ % aus zahnärztliche Leistungen zusammen.
- Die (bestands)normierten Variationskoeffizienten w der drei Teilsummen seien vorgegeben
  durch $w_a = 1{,}7$, $w_s = 5{,}8$ und $w_z = 3{,}2$.

Hinweis:
Der normierte Variationskoeffizient w eines heterogenen Risikokollektivs ergibt sich durch Multiplikation des Variationskoeffizienten v mit der Wurzel aus dem Bestandsvolumen.

b) Thema: Der Variationskoeffizient bei Parameteränderung

Vereinfachend wird ein (altersmäßig) homogenes Risikokollektiv betrachtet. Es wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit p für die Leistungsfreiheit eines Versicherten im Kollektiv größer wird. Erwartungswert und zweites Moment einer positiven zufälligen individuellen Leistung Y_+ sollen hierbei jedoch unverändert bleiben. Auch das Bestandsvolumen L des Risikokollektivs werden als unverändert vorausgesetzt. Wird der Variationskoeffizient v der Gesamtleistungen durch die angegebene Änderung von p größer, kleiner oder gibt es keine Änderung?

Hinweise:
Lösen Sie die Teilaufgabe b) in zwei Teilschritten (i) und (ii):
(i) Untersuchen Sie zunächst formelmäßig den Variationskoeffizient einer zufälligen individuellen Leistung Y in Abhängigkeit vom Parameter p und den Momenten von Y_+.

(ii) Schließen Sie anschließend aus dem Ergebnis in (a) auf das Verhalten des Variationskoeffizienten v des homogenen Gesamtkollektivs.

Eine Unterscheidung in die drei Teilsummen wie in Teilaufgabe a) ist bei Teilaufgabe b) nicht erforderlich.

Begründen Sie Ihre jeweilige Aussage!

Lösung:

Zu a)

Abkürzend seien $\mu = ES$ und $\sigma^2 = VarS.$ Für die Momente im ambulanten Teilleistungsbereich ergeben sich offenbar die Darstellung

(*) $$\mu_a := ES_a = \alpha_a \cdot \mu$$

Wegen der Definition der Variationskoeffizienten v_a bzw. w_a und wegen (*) gelten dann

$$\sigma_a^2 := \operatorname{Var} S_a = \mu_a^2 \cdot v_a^2$$

(**) $$= \frac{1}{L} \cdot \mu_a^2 \cdot w_a^2$$

$$= \frac{1}{L} \cdot \mu^2 \cdot \alpha_a^2 \cdot w_a^2 .$$

Entsprechende Beziehungen ergeben sich für Erwartungswert, Varianz und Variationskoeffizient der stationären bzw. der zahnärztlichen Leistungen. Für die Varianz von S ergibt sich außerdem wegen der Unabhängigkeit der Teilleistungen

$$\sigma^2 = \sigma_a^2 + \sigma_s^2 + \sigma_z^2 .$$

Somit gelten für den Variationskoeffizient v von S die Darstellungen

$$v = \frac{1}{\mu} \cdot \sqrt{\sigma^2}$$

$$= \frac{1}{\mu} \cdot \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_s^2 + \sigma_z^2}$$

und wegen der Formel (**) angewendet auf alle drei Teilleistungsbereiche

$$v = \frac{1}{\sqrt{L}} \cdot \sqrt{\alpha_a^2 \cdot w_a^2 + \alpha_s^2 \cdot w_s^2 + \alpha_z^2 \cdot w_z^2} \ .$$

Im vorgegebenen Beispiel ergibt sich hieraus speziell der Wert v = 0,0137.

Zu b)

(i) Nach Voraussetzung gelten $c_1 := EY_+ =$ konstant sowie $c_2 := EY_+^2 =$ konstant. Die Momente von Y_+ ergeben sich außerdem über die bedingten Momente von Y unter Berücksichtigung der Bedingung $\{Y > 0\}$. Und zwar gelten wegen 1-p = P(Y>0)

$$EY = P(Y > 0) \cdot E\big(Y \big| \{Y > 0\}\big) = (1-p) \cdot EY_+ = (1-p) \cdot c_1 .$$

Entsprechend gilt für das zweite Moment von Y die Beziehung

$$EY^2 = P(Y > 0) \cdot E\big(Y^2 \big| \{Y > 0\}\big) = (1-p) \cdot EY_+^2 = (1-p) \cdot c_2 .$$

Folglich ist

$$\mathrm{Var} Y = E(Y^2) - (EY)^2 = (1-p)^2 \cdot \left[\frac{c_2}{1-p} - (c_1)^2 \right] .$$

Für den Variationskoeffizient von Y ergibt sich somit die Darstellung

$$v(Y) = \frac{1}{c_1} \sqrt{\frac{c_2}{1-p} - (c_1)^2} \ .$$

Offenbar ist der Quotient $\frac{1}{1-p}$ eine wachsende Funktion für wachsende Wahrscheinlichkeit p. Da $f(z) = \sqrt{z}$ eine wachsende Funktion in z ist, ist folglich auch v(Y) eine wachsende Funktion in p für wachsende Wahrscheinlichkeit p.

(ii) Für das homogene Gesamtkollektiv gelten

$$ES = L \cdot EY, \ \mathrm{Var}\, S = L \cdot \mathrm{Var}(Y) \quad \text{sowie}$$
$$v = V(S) = \frac{1}{\sqrt{L}} \cdot v(Y) .$$

Da der Variationskoeffizient von Y wegen Teil (a) eine wachsende Funktion in p ist und L unverändert bleibt, überträgt sich diese Eigenschaft folglich auch auf den Variationskoeffizient der Gesamtschäden S, d.h. v ist ebenfalls eine wachsende Funktion in p für wachsendes p.

Zusatzhinweis:

Für Wahrscheinlichkeiten p nahe 1 hat der Variationskoeffizient v(Y) offenbar eine Polstelle. Demzufolge ist auch das relative Schwankungsrisiko für die Gesamtsumme S in diesem Fall extrem groß. Für sehr kleine positive Werte p gilt dagegen näherungsweise $v(Y) \approx v(Y_+)$.
Allgemein gilt stets $v(Y) \geq v(Y_+)$.

2. Aufgabe (5,0 Punkte)

Thema: PKV-Sterbetafel

a) Wie begründet der Arbeitskreis Sterbetafel, dass die Verwendung der einheitlichen Tafel PKV-2009 auch für beihilfeberechtigte Versicherte als ausreichend angesehen wird?

b) Nach der Reform des Versicherungsvertragsgesetzes ist neben den Versicherungsleistungen auch die Sterbewahrscheinlichkeit als maßgebliche Rechnungsgrundlage anzusehen, deren Veränderung eine Überprüfung der Beiträge auslösen kann. Stellen Sie die Berechnung des Auslösenden Faktors für die Sterblichkeit dar, wie sie die BaFin vorgeschlagen hat. Erläutern Sie, warum der Arbeitskreis Sterbetafel diese Berechnung nicht für zielführend hält.

Lösung:

Zu a)

Die in den Jahren 1996 bis 2006 beobachteten Sterbewahrscheinlichkeiten beihilfeberechtigter Personen sind niedriger als die der sonstigen Personen. Die über die Alter und Jahre ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten beihilfeberechtigter Personen des Jahres 2006 liegen in wesentlichen Altersbereichen jedoch deutlich über den Werten der PKV-2009.

Die aus diesen Werten des Jahres 2006 für beihilfeberechtigte Personen ermittelten restlichen Lebenserwartungen sind für jedes Alter niedriger als die Lebenserwartungen, die sich aus der PKV-2009 berechnen lassen. Hieraus lässt sich zunächst ableiten, dass die Verwendung der PKV-2009 im Jahr 2006 auch für beihilfeberechtigte Personen ausreichend sicher gewesen wäre. Unterstellt man nun für die beihilfeberechtigten Personen die gleichen Trendfaktoren wie für alle PKV-Versicherten bei der Herleitung der PKV-2009 und berechnet aus den für beihilfeberechtigte Personen prognostizierten Sterbwahrscheinlichkeiten der Jahre 2006 bis 2013 – d.h. Beihilfesterblichkeit 2006 plus Trend – die jeweiligen restlichen Lebenserwartungen, so übertreffen diese Lebenserwartungen für beihilfeberechtigte Männer erstmals im Jahr 2011 für einige Alter die aus der PKV-2009 abgeleiteten Lebenserwartungen, bei Frauen sogar erst nach dem Jahr 2013. Die Sterbetafel PKV-2009 ist also unter der Annahme gleicher Trendfaktoren auch für beihilfeberechtigte Männer bis 2011 und für beihilfeberechtigte Frauen sogar über 2013 hinaus ausreichend sicher.

Die hierbei getroffene Annahme der gleichen Trendfaktoren ist als vorsichtig zu betrachten. Tatsächlich ist der Trend bei der Sterbewahrscheinlichkeit beihilfeberechtigter Personen sogar geringer. Betrachtet man je Alter die Differenz der über die Alter ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten nicht beihilfeberechtigter und beihilfeberechtigter Personen, so stellt man über die Jahre 1996 bis 2006 eine abnehmende Tendenz fest:

Die Differenzen nehmen also ab, d.h. die Sterbewahrscheinlichkeiten der beiden Teilgruppen nähern sich an.

Zu b)

Nach Vorstellung der BaFin wird der Auslösende Faktor für die Sterblichkeit je Beobachtungseinheit (Männer und Frauen) eines Tarifs aus dem Maximum der für drei Altersgruppen gebildeten durchschnittlichen Quotienten aus neuen und alten Leistungsbarwerten gebildet:

$$AF^{Sterb} = \max\left[\frac{1}{25}\cdot\sum_{x=21}^{45}\frac{A_x^{neu}}{A_x^{alt}};\frac{1}{25}\cdot\sum_{x=46}^{70}\frac{A_x^{neu}}{A_x^{alt}};\frac{1}{25}\cdot\sum_{x=71}^{95}\frac{A_x^{neu}}{A_x^{alt}}\right]$$

Zur Vermeidung unterschiedlicher AFs für alte und neue Welt werden die Leistungsbarwerte ohne Stornowahrscheinlichkeiten berechnet. In den alten Leistungsbarwerten wird die bei der letzten Kalkulation zuletzt von der BaFin veröffentlichte Sterbetafel verwendet, in den neuen Leistungsbarwerten die aktuell zuletzt veröffentlichte Tafel.

Ziel der neuen gesetzlichen Vorschrift ist laut Gesetzesbegründung die „Vermeidung von Beitragssprüngen, die sich aus der Kumulierung von Anpassungserfordernissen ergeben können“. Dies kann nur erreicht werden, wenn die beiden Auslösenden Faktoren für die Schadenentwicklung und die Entwicklung der Sterblichkeit nicht nur separat, sondern auch zusammengefasst betrachtet werden. Daraus ergibt sich nach Auffassung des Arbeitskreises Sterbetafel ein dritter Auslösender Faktor:

$$\mathrm{AF}^{\mathrm{Gesamt}} = \mathrm{AF}^{\mathrm{Schad}} \cdot \mathrm{AF}^{\mathrm{Sterb}}$$

3. Aufgabe (8,0 Punkte)

Thema: Basistarif

Die Bestimmung der rechnungsmäßigen Kopfschäden des Basistarifs erfolgte in zwei Schritten. Im ersten Schritt wurden Kopfschäden für den Basistarif aufgrund einer üblichen Stütztarifkalkulation ermittelt. Im zweiten Schritt wurden diese Kopfschäden zur Berücksichtigung der Risikomischung des Basistarifs modifiziert.

a) Nennen Sie die Gründe für den zweiten Schritt.

b) Welche Folge hat der zweite Schritt?

c) Beschreiben Sie unter Angabe der entsprechenden Formeln das Verfahren, nach dem im zweiten Schritt das Risiko aus Vorerkrankungen berücksichtigt wurde.

Lösung:

Zu a)

Der Basistarif sieht im Vergleich zu herkömmlichen PKV-Tarifen bei der Risikoeinstufung einige Besonderheiten vor:

Individuelle Risikozuschläge und/ oder Leistungsausschlüsse sind nicht zulässig. Vielmehr werden Mehraufwendungen, die im Basistarif auf Grund von Vorerkrankungen entstehen, auf alle im Basistarif Versicherten gleichmäßig verteilt (kollektiver Risikozuschlag: Tau).

Eine Risikoprüfung wird nicht - wie bisher üblich - nur dann durchgeführt, wenn ein Neuabschluss erfolgt oder eine Mehrleistung hinzu versichert wird, sondern generell bei Zugang zum Basistarif (auch bei Tarifwechsel) zur Ermittlung des Mehrrisikos.

In diesen Fällen wird auf das Vorhandensein von Vorerkrankungen geprüft, für die Leistungen dann aber in der Zukunft nicht über die Kopfschäden, sondern über den sog. Tau-Zuschlag (§12g (1) VAG und §8 (1) KalV) finanziert werden.

Zusätzlich ist damit zu rechnen, dass sich die Altersverteilung der Neuzugänge im Basistarif dauerhaft von der der Normaltarife unterscheiden wird, da

- Die Eintrittsaltersstruktur bereits im mST stark abweicht (Zugang zumeist von älteren Versicherten) und die ersten Bestände des BT die derzeit mST Versicherten sind.
- Bestandswechsler neu risikogeprüft werden und somit eine „neues Risikoeinstufung“ erhalten.

Zu b)

Die aufgrund der Herausnahme der Vorerkrankungen folgende „Selektion“ wirkt dann im Basistarif vor allen in den höheren Altern. Die Kopfschäden (ohne Berücksichtigung von Vorerkrankungen) des Basistarifs sind als Folge hiervon in den höheren Altern deutlich geringer als im ST. Demzufolge wird der Basistarif einen deutlich flacheren Profilverlauf aufweisen.

zu c)

Bei der Erstkalkulation lagen keine Erfahrungswerte darüber vor, wie stark diese Selektion die Kopfschäden beeinflusst. Daher wurde eine Sondererhebung des PKV-Verbandes durchgeführt, bei der die Versicherten in zwei Gruppen aufgeteilt wurden. In die erste Gruppe wurden Versicherte aufgenommen, die aufgrund von folgenden definierten Vorerkrankungen: Aids, Krebs / Leukämie, Diabetes, Hämophilie, Dialyse, Psychosen / Suchtkrankheiten, Herzkrankheiten als Mehrrisiko auszuweisen waren. Der Grund für die Wahl dieser Diagnosen war, dass Untersuchungen ergeben haben, dass die genannten Diagnosen den hauptsächlichen Anteil an den Mehrrisiken aufgrund Vorerkrankungen ausmachen. In die zweite Gruppe kamen alle Versicherte ohne eine dieser Diagnosen („Gesunde“).

Aus den Leistungsauszahlungen der Jahre 2004 – 2006 in den ambulanten und stationären Vollversicherungstarifen für die beiden Gruppen wurden jeweils Kopfschäden der „Gesunden“ und des Gesamtbestandes ermittelt und gegenübergestellt. Ergebnis dieser Gegenüberstellung waren altersabhängige Reduktionsfaktoren.

Zusammen mit der Annahme zur künftigen Eintrittsaltersverteilung des BT, die aus den bekannten Werten des mST abgeleitet wurde, konnte eine Modifikation der Kopfschadenreihe erfolgen. Wobei von folgenden Voraussetzungen ausgegangen wurde:

- Angenommene Neuzugangsverteilung des mST auch dauerhaft im BT
- rechnungsmäßige Entwicklung des Bestandes (Storno, Sterblichkeit)

- Startkopfschäden ergeben sich gemäß der üblichen Stütztarif-Kalkulation
- Vorerkrankungen sind aus den Kopfschäden aus Stütztarifkalkulation noch nicht herausgerechnet
- Die Kopfschäden der Gesunden ergeben sich aus der Anwendung der Reduktionsfaktoren der PKV- Sondererhebung auf die Kopfschäden der Stütztarifkalkulation
- Selektion durch Risikoprüfung wirkt linear über R Jahre

Aus der Voraussetzung folgt, dass sich der Bestand im Basistarif wie folgt entwickelt

$$\boldsymbol{L}_{x,x_0} = \begin{cases} \boldsymbol{L}_{x_0} & ;\ \textbf{\textit{für}}\ \ x = x_0 \\ \boldsymbol{L}_{x_0} \cdot \prod\limits_{k=x_o}^{x-1} (1 - q_k - w_k) & ;\ \textbf{\textit{für}}\ \ x > x_0 \end{cases}$$

mit

L_{x_0} := Anzahl Versicherte mit Eintrittsalter x0 (x0 ≥21)

L_{x,x_0} := Anzahl Versicherte mit Alter x und Eintrittsalter x0 (x ≥ x0)

Dann lässt sich der durch Selektion beeinflusste Kopfschaden wie folgt ermitteln

$$\widetilde{K}_{x,x_0} = \begin{cases} K_x \cdot (1 - \frac{R - (x - x_0)}{R} \cdot r_{x_0}) & ;\ \textbf{\textit{für}}\ \ x - x_0\ \varepsilon\ \{0,...,R\} \\ K_x & ;\ \textbf{\textit{für}}\ \ x - x_0 > R \end{cases}$$

mit

$\widetilde{K}_{x,x_0}$:= durch die Selektion beeinflusster Kopfschaden der Versicherten des Alters x mit Eintrittsalter x0

R := Dauer der Selektionswirkung

r_{x_0} := Reduktionsfaktor aus der Sondererhebung des PKV-Verbandes siehe oben

Mit diesen Ergebnissen lässt sich der modifizierte Kopfschaden zum Alter x ermitteln:

$$\widetilde{K}_x = \frac{\sum\limits_{x_0=21}^{x} L_{x,x_0} \cdot \widetilde{K}_{x,x_0}}{\sum\limits_{x_0=21}^{x} L_{x,x_0}}$$

Das modifizierte Profil ergibt sich dann aus:

$$\widetilde{k}_x = \frac{\widetilde{K}_x}{K_x} \cdot k_x$$

4. Aufgabe (8,0 Punkte)

Thema: Solvency II

Stellen Sie dar, wie im Rahmen von QIS 3 die Erwartungswertrückstellung definiert ist und wie sie über den Neubewertungsansatz näherungsweise ermittelt werden kann.

Hinweise:

- Nach dem Neubewertungsansatz besteht die Erwartungswertrückstellung aus sieben Summanden.
- Die neu bewertete tarifliche HGB-Alterungsrückstellung ergibt sich durch Reduzierung der neu diskontierten tariflichen HGB-Alterungsrückstellung um einen bestimmten Betrag.

Lösung

Die Erwartungswertrückstellung ist definiert als

$$EWR = E[\sum_t (AU_t - B_t) \cdot (\frac{1}{1+i_t})^t],$$

wobei

i_t = risikoneutraler Zins zur Laufzeit t Jahre
(t=0: Bewertungsstichtag zum Ende des letzten Geschäftsjahres)

AU_t = Ausgaben (Zufallsvariable) zum Zeitpunkt t, also insbesondere

- Versicherungsleistungen
- Überschussbeteiligung
  (ohne Mittel aus der zum Bewertungsstichtag gegebenen freien RfB)
- Abschluss-, Verwaltungs- und Schadenregulierungskosten

B_t =Einnahmen (Zufallsvariable) zum Zeitpunkt t (Beiträge)

Nach dem Neubewertungsansatz kann die Erwartungswertrückstellung näherungsweise als Summe der folgenden sieben Werte bestimmt werden:

- neu bewertete tarifliche HGB-Alterungsrückstellung (NBR);
  "tariflich" bedeutet dabei, dass die Rückstellungen zur Prämienermäßigung im Alter hier nicht berücksichtigt sind.
- Zeitwert der zukünftigen Überschussbeteiligung (ZÜB)
- HGB-Rückstellungen zur Prämienermäßigung im Alter
- HGB-Beitragsüberträge
- HGB-Rückstellung für Versicherungsfälle (Schadenrückstellung)
- Rückstellung für Beitragsrückerstattung, soweit gebunden
- sonstige versicherungstechnische HGB-Rückstellungen

Die neu bewertete tarifliche HGB-Alterungsrückstellung ist

$$NBR = NDR - \sum_{t=0}^{4} \frac{Z_t^{vtÜ}}{(1+i_t)^t},$$

wobei

NDR = neu diskontierte tarifliche HGB-Alterungsrückstellung

$$Z_t^{vtÜ} = P_t \cdot \frac{1}{5} \sum_{s=-2}^{6} \frac{ZwErg3_s - KapErg_s}{P_s}$$

erwarteter HGB-Rohüberschuss ohne Zinsüberschuss im Jahr t

$ZwErg3_s$ = Zwischenergebnis 3 von Nw 231 (Rohüberschuss) im Jahr s

$KapErg_s$ = Kapitalanlagenergebnis gemäß Nw 231 im Jahr s

P_s = Prämie nach Art der LV im Jahr s

Die neu diskontierte tarifliche HGB-Alterungsrückstellung ist

$$NDR = \sum_{t=0}^{N-1} \frac{Z_t^{HGB}}{(1+i_t)^t} + \sum_{t=N}^{\omega} \frac{mZ_t^{HGB}}{(1+i_t)^t}$$

wobei

Z_t^{HGB} = erwartete Zahlung (Saldo) im Jahr t gemäß tariflicher HGB-Alterungsrückstellung

N = Zeitpunkt einer erwarteten Beitragsanpassung zur Rechnungszinsabsenkung (ggf. $N = \omega+1$)

mZ_t^{HGB} = erwartete Zahlung im Jahr t nach Beitragsanpassung

Von einer Beitragsanpassung ist abzusehen, falls dadurch NDR < V+R, wobei

V = tarifliche HGB-Alterungsrückstellung

R = anteilige stille Reserven/Lasten
= Anteil der stillen Reserven abzgl. stiller Lasten (im Vergleich zur QIS-3-Bilanz) in den HGB-Kapitalanlagen, der den versicherungstechnischen Verpflichtungen gemäß Überschussverordnung zuzurechnen ist.

Falls eine Beitragsanpassung berücksichtigt wird, kann der neue Rechnungszins so gewählt werden, dass NDR = V + R

Der Zeitwert der zukünftigen Überschussbeteiligung ist

$$ZÜB = \max(ZÜB_{Zins}; BS \cdot ZÜ)$$

wobei

$ZÜB_{Zins} = \max(BS_{Zins} \cdot ZÜ_{Zins}; 0)$
Zeitwert der künftigen Zinsüberschussbeteiligung nach §12a VAG

BS_{Zins} = Zinsüberschussbeteiligungssatz*

$ZÜ_{Zins}$ = V – NDR + min(R;0)
Zeitwert der künftigen HGB-Zinsüberschüsse auf die tarifliche Alterungsrückstellung

ZÜ = V – NBR + min(R;0) Zeitwert der künftigen HGB-Überschüsse

BS = Überschussbeteiligungssatz*

*entsprechend der mittleren Erwartung und ggf. nach Tarifen differenziert, z.B. weil §12a VAG nicht für jede nach Art der Lebensversicherung betriebene Krankenversicherung gilt.