

## Aufgabe 1 (30 Punkte)

Im Rahmen des Repetitoriums wurde die Gesamtheit der internen Anwärter besprochen; aus dieser Gesamtheit scheidet eine Person (Interner Anwärter) aus 3 Ursachen aus:

1. Fluktuation
2. Invalidität
3. Tod

Es bedeutet, wie behandelt, auf der Basis eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraumes  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  bei einem internen Anwärter

$X_1$ : Alter bei Eintritt der Fluktuation

$X_2$ : Alter bei Eintritt der Invalidität

$X_3$ : Alter bei Eintritt des Todes

Hiermit lassen sich, wie behandelt, die jeweiligen Ausscheide- und Übergangswahrscheinlichkeiten definieren. Z.B. bedeutet

$$\hat{q}_x^a = P\{X_3 \leq x + 1 \mid X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}$$

die Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters  $x$ , innerhalb eines Jahres zu sterben.

a) Stellen Sie graphisch auf  $\{X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}$  die unterschiedlichen Übergangsmöglichkeiten dar, die zum Eintreffen des Ereignisses  $\{X_3 \leq x + 1\}$  führen und kennzeichnen Sie die Übergänge durch ihre zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

b)  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) bilden bekanntlich eine vollständige Zerlegung von  $\Omega$  wenn

$$- A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$$

$$- \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$$

Zeigen Sie, dass die Mengen  $\{X_i \triangleleft X_j \triangleleft X_k\}$ ,  $(i, j, k)$  eine Permutation von  $(1, 2, 3)$ , eine vollständige Zerlegung von  $\Omega$  bilden.

Dabei bedeutet das Zeichen " $\triangleleft$ " bei  $X_i, X_j$  mit  $i < j$  das Zeichen " $\leq$ ", bei  $X_i, X_j$  mit  $i > j$  das Zeichen " $<$ ".

c) Schneiden Sie  $\{X_3 \leq x + 1\}$  mit der vollständigen Zerlegung  $\{X_i \triangleleft X_j \triangleleft X_k\}$  nach Teilaufgabe b) und geben Sie die 6 Exemplare der Zerlegungsmenge von  $\{X_3 \leq x + 1\}$  explizit an.

d) Geben Sie auf der Basis dieser Zerlegung die Wahrscheinlichkeiten  $\hat{q}_x^{aa}$ ,  $\hat{q}_x^{as}$ ,  $\hat{q}_x^{ai}$  und  $\hat{q}_x^{asi}$  explizit in der Art, wie oben  $\hat{q}_x^a$  angegeben ist, an.

e) Begründen Sie die Gleichung

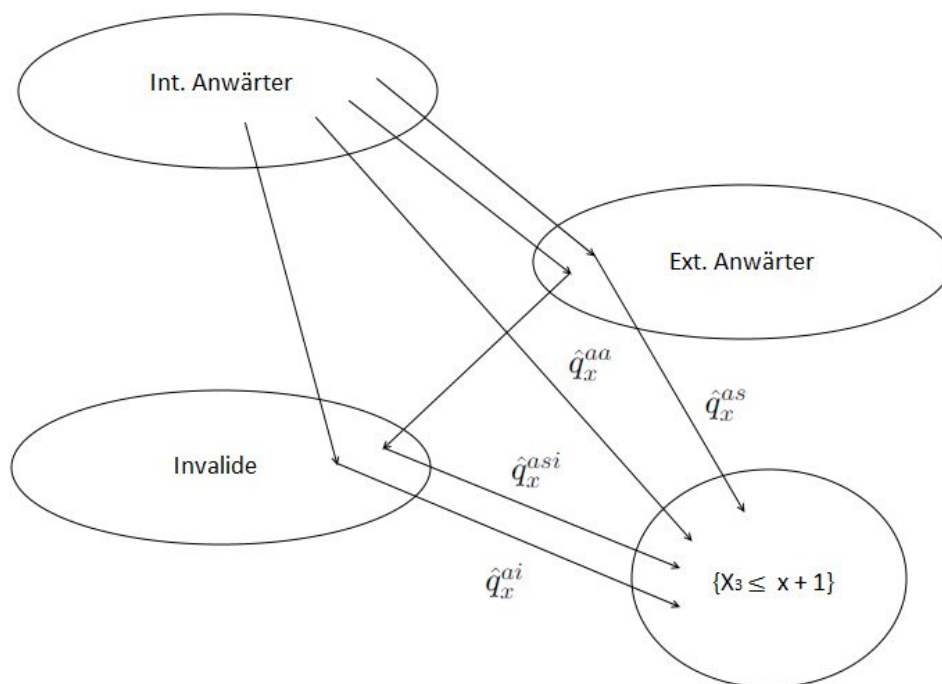
$$\hat{q}_x^a = \hat{q}_x^{aa} + \hat{q}_x^{as} + \hat{q}_x^{ai} + \hat{q}_x^{asi}$$

Lösung zu a):

$\{X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}$  = Gesamtheit der internen Anwärter des Alters  $x$ .

$\{X_3 \leq x + 1\} \cap \{X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}$  = int. Anwärter, die bis zum Alter  $x + 1$  versterben.

Graphische Darstellung der Übergänge vom internen Anwärter zu  $\{X_3 \leq x + 1\}$  :



Lösung zu b):

1)

Die Mengen  $\{X_i \triangleleft X_j \triangleleft X_k\}$ ,  $(i, j, k)$  eine Permutation von  $(1, 2, 3)$ , sind:

$$A_1 := \{X_1 \leq X_2 \leq X_3\} = \{X_1 \leq X_2, X_2 \leq X_3, X_1 \leq X_3\}$$

$$A_2 := \{X_1 \leq X_3 < X_2\} = \{X_1 \leq X_3, X_3 < X_2, X_1 < X_2\}$$

$$A_3 := \{X_2 < X_1 \leq X_3\} = \{X_2 < X_1, X_1 \leq X_3, X_2 < X_3\}$$

$$A_4 := \{X_2 \leq X_3 < X_1\} = \{X_2 \leq X_3, X_3 < X_1, X_2 < X_1\}$$

$$A_5 := \{X_3 < X_1 \leq X_2\} = \{X_3 < X_1, X_1 \leq X_2, X_3 < X_2\}$$

$$A_6 := \{X_3 < X_2 < X_1\} = \{X_3 < X_2, X_2 < X_1, X_3 < X_1\}$$

Seien  $i, j = 1, 2, \dots, 6$  mit  $i \neq j$ . Bei Betrachtung der Mengen  $A_i$  und  $A_j$  stellt man fest, dass es in  $A_i, A_j$  immer ein Indexpaar  $m, n$  gibt mit  $X_m \triangleleft X_n$  und  $X_n \triangleleft X_m$ . Damit gilt:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{für } i \neq j, 1 \leq i, j \leq 6.$$

2)

Mit den oben definierten  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$  gilt:

$$A_3 \cup A_4 = \{X_2 < X_1, X_2 \leq X_3\}$$

$$A_5 \cup A_6 = \{X_3 < X_1, X_3 < X_2\}$$

$$A_1 \cup A_3 \cup A_4 = \{X_2 \leq X_3\}$$

$$A_2 \cup A_5 \cup A_6 = \{X_2 > X_3\}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^6 A_i = \{X_2 \leq X_3\} \cup \{X_2 > X_3\} = \Omega$$

Damit bilden die  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ , eine vollständige Zerlegung von  $\Omega$ .

Lösung zu c):

$$B_1 := A_1 \cap \{X_3 \leq x + 1\}$$

$$B_2 := A_2 \cap \{X_3 \leq x + 1\}$$

$$B_3 := A_3 \cap \{X_3 \leq x + 1\}$$

$$B_4 := A_4 \cap \{X_3 \leq x + 1\}$$

$$B_5 := A_5 \cap \{X_3 \leq x + 1\}$$

$$B_6 := A_6 \cap \{X_3 \leq x + 1\}$$

Bem.: Die  $B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$  bilden eine vollständige Zerlegung von  $\{X_3 \leq x + 1\}$  :

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{für } i \neq j, 1 \leq i, j \leq 6$$

$$\bigcup_{i=1}^6 B_i = \{X_3 \leq x + 1\}.$$

Lösung zu d):

$$\hat{q}_x^{asi} = \mathbb{P}\{B_1 | X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}$$

$$\hat{q}_x^{as} = \mathbb{P}\{B_2 | X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}$$

$$\hat{q}_x^{ai} = \mathbb{P}\{B_3 \cup B_4 | X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}$$

$$\hat{q}_x^{aa} = \mathbb{P}\{B_5 \cup B_6 | X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}$$

Lösung zu e):

Es gilt:

$$\begin{aligned}\hat{q}_x^a &= \mathbb{P}\{X_3 \leq x + 1 | X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\} \\ &= \mathbb{P}\{\{X_3 \leq x + 1\} \cap \bigcup_{i=1}^6 A_i | X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\} \\ &= \mathbb{P}\{\bigcup_{i=1}^6 B_i | X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\} \\ &= \hat{q}_x^{aa} + \hat{q}_x^{as} + \hat{q}_x^{ai} + \hat{q}_x^{asi}\end{aligned}$$

## Aufgabe 2 (30 Punkte)

Im Repetitorium wurde im Rahmen eines Versicherungsvertrages der Zusammenhang zwischen Barwert, Prämie, Reserve, Sparprämie und Risikoprämie einer Verpflichtung behandelt (alle Prämien jährlich vorschüssig). Hiernach gilt für die Sparprämie nach  $m$  Jahren seit Beginn ( $m = 0, 1, \dots, n - 1$  mit  $n$ : Laufzeit des Versicherungsvertrages)

$${}_m P_x^S = v_{m+1} V_x - {}_m V_x$$

und für die Risikoprämie nach  $m$  Jahren seit Beginn

$${}_m P_x^R = {}_m \hat{L}_x - v q_{x+m} {}_{m+1} V_x.$$

- a) Beweisen Sie  ${}_m \hat{P}_x = {}_m P_x^S + {}_m P_x^R$ ,  $m = 0, 1, \dots, n - 1$ .
- b) Der Vertrag sieht als Prämie die natürliche Prämie vor: Für jedes Jahr entspricht die "natürliche Prämie" dem Barwert der in diesem Jahr verursachten Leistungen, also

$${}_m \hat{P}_x = {}_m \hat{L}_x, \quad m = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Berechnen Sie unter der Bedingung  ${}_0 V_x = 0$  die Reserven  ${}_m V_x$ ,  $m = 0, 1, \dots, n$ , und hieraus  ${}_m P_x^S$  und  ${}_m P_x^R$ ,  $m = 0, 1, \dots, n - 1$ .

- c) Der Vertrag sieht als Leistung für den Fall des Ausscheidens die Verrentung der Reserve zum Ende des Jahres vor, also

$${}_m \hat{L}_x = q_{x+m} v {}_{m+1} V_x, \quad m = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Berechnen Sie  ${}_m P_x^S$ ,  ${}_m P_x^R$ ,  $m = 0, 1, \dots, n - 1$ , und stellen Sie  ${}_{m+1} V_x$ ,  $m = 0, 1, \dots, n - 1$ , unter der Bedingung  ${}_0 V_x = 0$  in Abhängigkeit der Prämien  ${}_k \hat{P}_x$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ , dar.

- d) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Sparprämie höher als die Prämie ausfallen kann, wobei Sie  ${}_m V_x \geq 0 \forall m$  unterstellen können. Erläutern Sie die finanzielle Quelle dieser positiven Differenz zwischen Sparprämie und Prämie.
- e) Es liege als Vertrag die Verpflichtung zur Zahlung einer lebenslänglich laufenden, jährlich vorschüssig zahlbaren Rente vom Jahresbetrag  $R$  vor, also  ${}_m \hat{P}_x = 0$  für  $m = 0, 1, \dots$

- i. Geben Sie  ${}_m V_x$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , für diesen Vertrag explizit an und zeigen Sie

$${}_m P_x^S = -R(1 - v q_{x+m} a_{x+m+1}).$$

- ii. Die Risikoprämie  ${}_m P_x^R$  lässt sich bekanntlich in eine Risikoprämie für den Überlebensfall  ${}_m P_x^{R(0)}$  und eine Risikoprämie für den Todesfall  ${}_m P_x^{R(1)}$  aufteilen.

Geben Sie  ${}_m P_x^R$ ,  ${}_m P_x^{R(0)}$  und  ${}_m P_x^{R(1)}$  für diesen Vertrag explizit an und stellen Sie  $R$  als Funktion von  ${}_m V_x$  und  ${}_m P_x^{R(1)}$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , dar. Erläutern Sie damit, aus welchen Quellen sich  $R$  finanziert.

Lösung zu a):

$$\begin{aligned} {}_mP_x^S + {}_mP_x^R &= {}_v{}_{m+1}V_x - {}_mV_x + {}_m\hat{L}_x - {}_vq_{x+m}{}_{m+1}V_x \\ &= {}_m\hat{L}_x + {}_vp_{x+m}{}_{m+1}V_x - {}_mV_x \quad (\text{versicherungsmath. Bilanzgleichung}) \\ &= {}_m\hat{P}_x \end{aligned}$$

Lösung zu b):

$$\begin{aligned} {}_vp_{x+m}{}_{m+1}V_x &= {}_mV_x + {}_m\hat{P}_x - {}_m\hat{L}_x = {}_mV_x \quad \text{für } m = 0, 1, \dots, n-1 \\ &\Rightarrow {}_mV_x = 0 \quad \forall m \\ {}_mP_x^S &= {}_v{}_{m+1}V_x - {}_mV_x = 0 \\ {}_mP_x^R &= {}_m\hat{L}_x = {}_m\hat{P}_x \end{aligned}$$

Lösung zu c):

Für  $m = 0, 1, \dots, n - 1$  gilt:

$${}_m \hat{L}_x = q_{x+m} v_{m+1} V_x$$

$${}_m P_x^R = q_{x+m} v_{m+1} V_x - v q_{x+m} v_{m+1} V_x = 0$$

$$\Rightarrow {}_m P_x^S = {}_m \hat{P}_x$$

Beh:  ${}_{m+1} V_x = \sum_{k=0}^m r^{m+1-k} {}_k \hat{P}_x$

Beweis (vollständige Induktion):

Es gilt

$$v_{m+1} V_x - {}_m V_x = {}_m P_x^S = {}_m \hat{P}_x$$

$$\Rightarrow {}_{m+1} V_x = r ({}_m V_x + {}_m \hat{P}_x)$$

$m = 0$ :

$${}_1 V_x = r ({}_0 V_x + {}_0 \hat{P}_x)$$

$$= r {}_0 \hat{P}_x$$

$m \rightarrow m + 1$ :

$${}_{m+1} V_x = r \sum_{k=0}^{m-1} r^{m-k} {}_k \hat{P}_x + r {}_m \hat{P}_x$$

$$= \sum_{k=0}^m r^{m+1-k} {}_k \hat{P}_x$$



Lösung zu d):

$$\begin{aligned}\text{Beispiel: } \quad {}_m\hat{L}_x &= 0 \\ &\Rightarrow {}_mP_x^R = -v q_{x+m} {}_{m+1}V_x \\ &\Rightarrow {}_mP_x^R < 0 \\ &\Rightarrow {}_mP_x^S = {}_m\hat{P}_x - {}_mP_x^R > {}_m\hat{P}_x\end{aligned}$$

Die Differenz wird durch Wegfall der Reserve finanziert (Stichwort: Vererbung).

Lösung zu e):

i.

Für  ${}_mV_x$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , gilt:

$${}_mV_x = R \cdot a_{x+m}$$

$$\begin{aligned}{}_m\hat{P}_x^S &= v {}_{m+1}V_x - {}_mV_x = R(v a_{x+m+1} - a_{x+m}) \\ &= R \left( \underbrace{v p_{x+m} a_{x+m+1} + v q_{x+m} a_{x+m+1}}_{v a_{x+m+1}} \underbrace{- 1 - v p_{x+m} a_{x+m+1}}_{-a_{x+m}} \right) \\ &= R(v q_{x+m} a_{x+m+1} - 1) \\ &= -R(1 - v q_{x+m} a_{x+m+1})\end{aligned}$$

ii.

$${}_m\hat{P}_x^R = -{}_mP_x^S = R - Rvq_{x+m}a_{x+m+1}$$

$${}_m\hat{P}_x^{R(0)} = R, \quad {}_m\hat{P}_x^{R(1)} = -vRq_{x+m}a_{x+m+1}$$

$$\Rightarrow R = {}_m\hat{P}_x^{R(0)} = {}_m\hat{P}_x^R - {}_m\hat{P}_x^{R(1)} = -{}_m\hat{P}_x^S + Rvq_{x+m}a_{x+m+1}$$

$$= \underbrace{{}_mV_x - v_{m+1}V_x}_{\text{Auflösung der Reserve}} + \underbrace{Rvq_{x+m}a_{x+m+1}}_{\text{Vererbungsbetrag der wegfallenden Verpflichtung}}$$

## Lösung für die Klausur „Spezialwissen Pensionsversicherungsmathematik“ (Oktober 2014) zu Aufgabe 3

### Teil a) (5 + 5 + 5 Punkte)

- a1) Diskutieren Sie die wesentlichen Risiken einer kapitalgedeckten Altersvorsorge.
- a2) Worin sehen Sie die besonderen Risiken einer umlagefinanzierten (nicht kapitalgedeckten) Altersvorsorge?
- a3) Nehmen Sie bitte Stellung zu der Behauptung, dass eine kapitalgedeckte Altersvorsorge gegen die Risiken einer alternden Bevölkerung immunisiere.

### Lösungshinweise:

#### zu Aufgabe 3 a)

- a1) Bei der kapitalgedeckten Altersvorsorge wird systematisch ein Versorgungskapital angespart, aus dem dann ab Altersrentenbeginn die laufenden Renten finanziert werden. Da in aller Regel nominale (also auf € bezogene) Rentenansprüche aufgebaut werden, ist das *Fundamentalrisiko* der kapitalgedeckten Altersvorsorge eine *Inflation*, insbesondere dann, wenn die laufende Preissteigerungsrate höher ausfällt als die Verzinsung der zugrunde gelegten Kapitalanlagen.

Da die Deckungsmittel am Kapitalmarkt angelegt werden müssen, ist bei gegebenen Sparbeiträgen die Höhe der späteren Renten sehr stark abhängig von der *Kapitalmarktentwicklung*, insbesondere der *Zinsentwicklung*. Die Zinsentwicklung (bzw. die Kapitalmarktentwicklung) muss jedoch immer in Bezug zur Inflationsrate betrachtet werden.

Ein Kernproblem der kapitalgedeckten Altersvorsorge ist der *extrem lange Planungszeitraum*. Zu Beginn der Sparphase muss bereits geschätzt werden, mit welcher Verzinsung das Versorgungskapital fortgeschrieben werden kann. Korrekturen einer fehlgeschätzten Planung sind nur während der Ansparphase möglich. Je kürzer die Restspardauer ist, desto schwieriger ist es, Korrekturen vorzunehmen.

In der Rentenphase ist keinerlei Korrektur mehr möglich; werden nicht die geplanten Kapitalerträge erzielt oder fällt die Preissteigerungsrate höher aus als erwartet, so muss der Rentenbezieher reale oder sogar nominale Rentenkürzungen hinnehmen.

Sofern kein kollektives Sicherungsinstrument (Lebensversicherung, Pensionskasse o.ä.) zur Verfügung steht, besteht für den einzelnen Vorsorgesparer auch das Risiko, dass er die eigene Lebensdauer falsch einschätzt, bzw. *dass das Versorgungskapital noch zu Lebzeiten aufgezehrt wird*.

Weitere Risiken: Rechtsrisiken z.B. steuerliche Behandlung, Anbieterisiko: falsche (spekulative) Kapitalanlage, zu hohe Verwaltungskosten, Veruntreuung, Betrug etc.

a2) Bei einem Umlagesystem werden die laufenden Rentenzahlungen (an die Generation der Rentenbezieher) durch Umlage auf die aktiven Lohnempfänger umgelegt. Sofern nicht aus Steuermitteln kompensierende Maßnahmen greifen, führt

- eine schrumpfende Erwerbsbevölkerung
- real sinkende Löhne
- hohe Arbeitslosigkeit
- wachsende Anzahl von Rentenbezieher (z.B. wenn beispielsweise geburtenstarke Jahrgänge in den Rentenbezug eintreten.)
- höhere Lebenserwartung der Rentenbezieher

zu realen oder nominalen Kürzungen der Renten.

Weitere Risiken: Rechtsrisiko: bei einem staatlich organisierten Umlagesystem muss stets Konsens darüber erzielt werden, dass die „Jungen“ die „Alten“ finanzieren. Durch Rechtsetzung kann der Staat jederzeit in den Verteilungsmechanismus eingreifen.

Erwähnt werden könnte auch die Tatsache, dass bei einem reinen Umlagesystem möglicherweise der Volkswirtschaft nicht genügend Investitionskapital zur Verfügung stehen, während bei einem kapitalgedeckten System die Sparbeiträge für Investitionen in die Realwirtschaft genutzt werden können.

a3) Ein kapitalgedecktes Alterssicherungssystem kann nicht gegen Risiken einer alternden Bevölkerung immunisieren. Aus dem Versorgungskapital der Rentnergeneration müssen Güter und Dienstleistungen erworben werden. Diese müssen aber von der Generation der Aktiven hergestellt bzw. bereitgestellt werden. Dies ist Kern der sogenannten Mackenrothschen These, wonach aller Sozialaufwand immer aus dem Sozialaufwand immer aus dem Volkseinkommen der laufenden Periode gedeckt werden muss. Die Mackenrothsche These gilt aber nur für eine geschlossene Volkswirtschaft; in der offenen Volkswirtschaft können natürlich Güter und Dienstleistungen aus anderen (ggf. jungen) Volkswirtschaften erworben werden. Hierbei sollte man jedoch bedenken, dass in sehr vielen Volkswirtschaften eine alternde Bevölkerung zu beobachten ist.

Insbesondere kann ein kapitalgedecktes System nicht gegen das Langlebigkeitsrisiko als Teilaspekt des demografischen Risikos immunisieren.

### **Teil b) (10 Punkte)**

Der § 66 Absatz 1 VAG hat folgenden Wortlaut:

*„Der Vorstand des Unternehmens hat schon im Laufe des Geschäftsjahrs Beträge in solcher Höhe dem Sicherungsvermögen zuzuführen und vorschriftsmäßig anzulegen, wie es dem voraussichtlichen Anwachsen des Mindestumfangs nach Absatz 1a entspricht. Die Aufsichtsbehörde kann hierüber nähere Anordnung treffen.“*

Erläutern Sie die Bedeutung des Sicherungsvermögens im Kontext der Versicherungsaufsicht. Gehen Sie insbesondere darauf ein, inwieweit die Vorschriften des VAG zum Sicherungsvermögen dem Schutz der Wahrung der Belange der Versicherten dienen. Leiten Sie hieraus für den Fall einer Pensionskasse ab, aus welchen Bilanzpositionen sich der Mindestumfang des Sicherungsvermögens bestimmt.

#### **zu Aufgabe 3 b)**

Das Sicherungsvermögen ist Teil des gebundenen Vermögens (§ 54 VAG) ist getrennt vom übrigen Vermögen zu verwahren (vgl. § 66 Abs. 5 VAG) und es ist sicherzustellen, dass nur mit Zustimmung des Sicherungstreuhanders (§ 70 VAG) darüber verfügt werden kann (vgl. § 72 Abs. 1 VAG). Dem Sicherungsvermögen sind laufend Mittel zuzuführen, so dass der Gesamtumfang des Sicherungsvermögens die „Kernverbindlichkeiten“ (vgl. § 66 Abs. 1 VAG) bedeckt. Die aufsichtsrechtlichen Vorschriften zum Sicherungsvermögen stellen somit ein zusätzliches Instrument zur Sicherstellung des Kapitalstocks dar. Als Teil des gebundenen Vermögens unterliegt das Sicherungsvermögen den besonderen Anlagegrundsätzen des § 54 VAG. Das Sicherungsvermögen entspricht im Wesentlichen der Kernverpflichtung eines Lebensversicherers bzw. einer Pensionskasse.

Die Kernverbindlichkeiten eines Lebensversicherers (bzw. einer Pensionskasse bzw. eines Pensionsfonds) sind die Deckungsrückstellungen und die Beitragsüberträge, also die Beiträge, der Lebensversicherer bereits vereinnahmt hat, jedoch noch nicht dem Deckungskapital zugeführt hat. Ebenso gehören zu den Kernverbindlichkeiten die fälligen, jedoch noch nicht ausgezahlten Versicherungsleistungen. Hinzu kommen weitere Positionen, wie z.B. festgelegte Überschussanteile.

### Teil c) (6 + 5 Punkte)

- c1) Im Rundschreiben R 4/2011 (VA) – Hinweise zur Anlage des gebundenen Vermögens von Versicherungsunternehmen – werden die Vorschriften des § 54 VAG und der hierzu ergangenen Anlageverordnung erläutert und interpretiert. Dabei werden folgende „wesentliche Risiken“ der Kapitalanlage genannt: *Marktrisiken, Kreditrisiken, Konzentrationsrisiken, Liquiditätsrisiken und Rechtsrisiken*. Erläutern Sie diese Risiken in Stichworten!
- c2) Erläutern Sie, welche Methoden zur Verfügung stehen, um *Marktrisiken* und *Kreditrisiken* zu messen.

### zu Aufgabe 3 c)

- c1) Als Lösungsvorschlag wird im Folgenden aus dem o.g. Rundschreiben zitiert (vgl. Abschnitt B.2.1 Unterpunkt c). Es reichte natürlich eine sinngemäß richtige Darstellung!

- „i) *Marktrisiken* (das Marktrisiko bezeichnet das Risiko, das sich direkt oder indirekt aus Schwankungen in der Höhe bzw. in der Volatilität der Marktpreise für die Vermögenswerte und Finanzinstrumente ergibt; das Marktrisiko schließt das Währungsrisiko und Zinsänderungsrisiko ein);
- ii) *Kreditrisiken* (das Kreditrisiko bezeichnet das Risiko, das sich aufgrund eines Ausfalls oder aufgrund einer Veränderung der Bonität oder der Bewertung von Bonität (Credit Spread) von Wertpapieremittenten, Gegenparteien und anderen Schuldnern ergibt, gegenüber denen die Versicherungsunternehmen Forderungen haben);
- iii) *Konzentrationsrisiken* (das Konzentrationsrisiko bezeichnet das Risiko, das sich dadurch ergibt, dass das Versicherungsunternehmen einzelne Risiken oder stark korrelierte Risiken eingeht, die ein bedeutendes Schaden- oder Ausfallpotenzial haben);
- iv) *Liquiditätsrisiken* (das Liquiditätsrisiko bezeichnet das Risiko, dass Versicherungsunternehmen auf Grund mangelnder Fungibilität nicht in der Lage sind, ihren finanziellen Verpflichtungen bei Fälligkeit nachzukommen);
- v) *Rechtsrisiken* (der Anlage innewohnende rechtliche Risiken, insbesondere komplexe Vertragsbedingungen und ausländische Rechtsnormen, sowie externe Risiken, die vor allem aus einer veränderten Gesetzgebung und Rechtsprechung resultieren können).“

- c2) Das Marktrisiko äußert sich vor allem in Preisrisiken (für Aktien, Immobilien), Zinsrisiken (für festverzinsliche Wertpapiere) und Währungsrisiken.

Preisrisiken und Währungsrisiken können erfasst werden durch

- Schwankungsmaße (Standardabweichung, Varianz, höhere Momente,..)
- Quantile
- Worst-case Szenarien (aus Vergangenheitsbetrachtung)

Zinsrisiken können erfasst werden durch

- Durationsmaße
- Worst-case Szenarien (aus Vergangenheitsbetrachtung)

Kreditrisiken werden erfasst durch Ausfallwahrscheinlichkeiten (die ihrerseits das Kreditrating bestimmen). Aus den Daten des Kapitalmarktes kann man die Zinsstruktur in Abhängigkeit von der Ratingklasse bestimmen; hieraus ergibt sich dann auch eine Schätzung des Effektes einer Bonitätsverschlechterung.

### Teil d) (5 + 4 Punkte)

- d1) Die BaFin verlangt von Pensionskassen und Pensionsfonds regelmäßig sogenannte Stresstests. Erläutern Sie, wie ein Stresstest für die Kapitalanlage durchgeführt werden könnte. Versuchen Sie auch eine Quantifizierung geeigneter Stressszenarien! Müssen auch sichere Staatsanleihen „gestresst“ werden?
- d2) Nach einem nicht bestandenem Stresstest kann die BaFin u.U. vom Management verlangen, dass geeignete „Maßnahmen“ zu treffen sind. Welche Maßnahmen könnten das sein?

### zu Aufgabe 3 d)

- d1) Bei einem Stresstest der Kapitalanlagen versucht man zu ermitteln, welcher Anteil des bilanziellen Werte bzw. des Zeitwertes einer Assetklassen in einem „worst case“-Fall abgeschrieben werden müsste bzw. verloren ginge. Hierbei wird der *worst case* Fall relativ zu vorgegebenem Sicherheitsniveau bestimmt – z.B. in Solvency 2 von einem Sicherheitsniveau von 99,5%. Mathematisch bestimmt man den worst case Abschlag als Value at Risk der zugrunde gelegten Verteilung.

Es gibt gute Gründe anzunehmen, dass Stressszenarien nicht in allen Klassen zugleich eintreten, d.h. die zugrunde gelegten Verteilungen sind *nicht* vollständig unkorreliert. Dies führt dazu, dass bei einem simultanen Stress aller Assetklassen die Summe der VaR-Abschläge geringer ausfällt als das Gesamt-VaR. Erfahrungen in der Vergangenheit zeigen allerdings, dass in Extremsituationen häufig auch die Korrelationen steigen. Insofern ist die Annahme, dass Assetklassen schwach korreliert sind, nur nach sorgfältiger Prüfung zulässig.

Bei einer Assetklasse, die Aktien umfasst kann man bei geeigneter Kalibrierung eine Lognormalverteilung der Zeitwerte unterstellen und hieraus der VaR-Wert berechnen. Bei einer Assetklasse, die festverzinsliche Wertpapiere umfasst ergibt sich der worst case Abschlag indirekt durch die Betrachtung einer gestressten Zinskurve und unter Berücksichtigung der Duration der Assetklasse.

Je nach Detaillierungsgrad des Stresstests müssen viele Assetklassen gebildet werden und für jede Assetklasse nach geeigneter Kalibrierung ein *worst case* Abschlag berechnet werden. Beispielsweise ist ein Aktienteilportfolio, das Nebenwerte oder Spezialtitel umfasst, höher zu stressen als ein Portfolio mit Standardwerten. Bei einem Immobilienportfolio wird man berücksichtigen, ob es sich um Wohnimmobilien oder Gewerbeimmobilien handelt. Bei Rentenwerten wird man die Ratingklasse berücksichtigen.

Eine grobe Schätzung für die Höhe eines Aktiencrash unter Zugrundelegung einer Lognormalverteilung ergibt: Die Annahme  $\sigma=20\%$ ,  $\mu = 6\%$ , 99,5%-Quantil der Standard-Normalverteilung ca. 2,5 („Daumenwert“) ergibt einen Abschlag von rund  $0,06 - 0,2 * 2,5 = - 0,44$  bezogen auf den Logarithmus; dies entspricht einem Kursverlust von  $1 - \exp(-0,44)$  ca. = 36%.

Auch sichere Staatsanleihen müssen gestresst werden, da bei einem Zinsanstieg die Kurse fallen. Bei einem Rentenportfolio mit einer Duration von 7 ergibt ein Zinsanstieg von 1,5% einen Kursverlust von rund  $7 * 1,5\%$  ca. = 10%. Die Festlegung, was als Stressszenario bei der Zinsentwicklung zugrunde zu legen ist, sollte in erster Linie anhand historischer Daten geprüft werden. Man kann allerdings auch (mit deutlich höherem Aufwand) eine Verteilungsannahme für die Zinsentwicklung vornehmen und geeignet kalibrieren.

d2) Maßnahmen können auf der Aktiv und/ oder auf der Passivseite getroffen werden.  
Maßnahmen bei den Aktiva:

- Änderung des Asset-Allokation (Reduktion der Aktienquote, Verkürzung der Duration)
- ggf. Heben von stillen Reserven
- Zukauf von Sicherungsinstrumenten (Optionen)
- Möglicherweise kann auch eine detailliertere Analyse der Aktiva zeigen, dass der tatsächliche Stress niedriger ist als bei einem groben Modell. Etwa durch die Berücksichtigung von Korrelationen  $< +1$

Maßnahmen der Passiva:

- Anpassung der Deklaration
- Änderung des Gewinnbeteiligungssystems (Betonung der Schlussgewinne)
- Änderung der Produktspektrums (- ist eher eine langfristige Maßnahme)
- Zuführung von Eigenkapital



Lösung für die Klausur „Spezialwissen Pensionsversicherungsmathematik“  
(Oktober 2014) zu den Aufgaben 4 bis 6

**Aufgabe 4 (40 Punkte)**

Welcher Zins ist in der betrieblichen Altersversorgung anzusetzen? Differenzieren Sie bei der Beantwortung der Frage nach Durchführungswegen und im Hinblick auf unmittelbare Pensionszusagen auch nach Bewertungsanlässen. Gehen Sie ggf. auch auf die Herleitung des Zinssatzes ein.

*a) Unmittelbare Pensionszusage*

*Für die steuerliche Bewertung ist in § 6a EStG ein Zins von 6 % vorgeschrieben, für den handelsrechtlichen Jahresabschluss gilt nach § 253 HGB ein der Restlaufzeit entsprechender durchschnittlicher Marktzins über 7 Jahre; dabei darf eine einheitliche Restlaufzeit von 15 Jahren unterstellt werden. Für die internationale Bewertung nach IAS 19 ist ein laufzeitadäquater stichtagsbezogener Zins für qualifizierte Industrieanleihen anzusetzen. Für die Kostenrechnung kommt ein interner kalkulatorischer Zins in Betracht. Für sonstige betriebswirtschaftliche Fragen kommt es auf den der Handlungsalternative innewohnenden Zins an.*

*b) Direktversicherung*

*Es gilt die bei Versicherungsabschluss maßgebende Deckungsrückstellungsverordnung. Für die Bemessung der Zinszusatzreserve kommt es zudem auf einen Referenzzinssatz an.*

*c) Pensionskasse*

*Maßgebend ist bei regulierten Pensionskassen der Technische Geschäftsplan, ansonsten die bei Versicherungsabschluss maßgebende Deckungsrückstellungsverordnung, zur Zeit 1,75 %. Für die Bemessung der Zinszusatzreserve kommt es zudem auf einen Referenzzinssatz an.*

*d) Pensionsfonds*

*Übernimmt der Pensionsfonds versicherungsförmige Garantien, ist der Rechnungszinssatz vorsichtig, derzeit mit höchstens 1,75 % festzusetzen,*

*e) Unterstützungskasse*

*Bei einer rückgedeckten Unterstützungskasse kommt der Zins der Rückdeckungsversicherung zur Anwendung. Bei der nicht rückgedeckten Unterstützungskasse kommt eine Tabelle mit veralteten biometrischen Werten und einem Rechnungszins von 5,5 % zur Anwendung.*

### **Aufgabe 5 (20 Punkte)**

Der Arbeitnehmer P. wechselt vom Unternehmen A zum Unternehmen E. Seine Pensionszusage soll von A nach E übertragen werden. Welche Bewertungsmethode und welche Rechnungsgrundlagen würden Sie empfehlen, wenn Sie das Unternehmen A oder das Unternehmen E zu beraten hätten?

*Das Unternehmen A ist daran interessiert, die Pensionszusage zu einem möglichst niedrigen Betrag abzugeben. Die Empfehlung lautet daher, den Barwert der zeiträtierlichen gekürzten Pensionszusage (unverfallbare Anwartschaft) zu übertragen. Besonders günstig für A wäre zur Zeit der für die steuerliche Bewertung vorgeschriebene Zins von 6 %.*

*Dem aufnehmenden Unternehmen wäre mindestens ein Übernahmebetrag zu empfehlen, der nach den dort verwendeten Methoden und Prämissen für die Handelsbilanz bzw. für die IAS-Bewertung Anwendung findet.*

### **Aufgabe 6 (15 Punkte)**

Zusatzversorgungskassen arbeiten oft nach dem gleitenden Deckungsabschnittsverfahren. Beschreiben Sie das Verfahren und seine charakteristischen Eigenschaften.

*Das Deckungsabschnittsverfahren ist ein kollektives Finanzierungsverfahren. Es werden innerhalb des Deckungsabschnitts Umlagen erhoben, die mindestens so bemessen sind, dass sie zusammen mit einem etwa vorhandenen Vermögen und seinen Erträgen ausreichen, die innerhalb des Deckungsabschnitts und eines Überhangzeitraumes anfallenden Leistungen und Verwaltungskosten zu erfüllen. Zu bestimmten Zeitpunkten, z.B. nach drei oder fünf Jahren oder nach der Hälfte des Deckungsabschnitts, wird der Umlagebedarf neu kalkuliert („gleitendes“ Deckungsabschnittsverfahren).*

*Verbreitet ist der Ansatz des „ewigen“ Umlagesatzes, der für einen unendlichen Deckungsabschnitt ermittelt wird. Soweit die übrigen Prämissen sich tatsächlich realisieren, bleibt dieser ewige Umlagesatz auf Dauer bestehen.*

*Je nachdem, wie hoch der Umlagesatz über dem Bedarfssatz zur Erfüllung der Leistungen und Tragung der Verwaltungskosten hinaus festgesetzt wird, bildet sich in der Zusatzversorgungseinrichtung ein Vermögen. Wenn dieses Vermögen hinreichend groß wird, kommt ein Wechsel des Finanzierungsverfahrens in eine kapitalgedeckte Finanzierung in Betracht.*