

Aufgabe 1 (42 Punkte)

Ein stochastischer Prozess $Y = (Z_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$, wobei alle Z_t nur Werte aus dem höchstens abzählbaren Zustandsraum $S = \{s_1, s_2, \dots\}$ annehmen, heißt eine Markov-Kette genau dann, wenn für $P\{Z_t = s_{j_t}, Z_{t-1} = s_{j_{t-1}}, \dots, Z_0 = s_{j_0}\} > 0$ die sogenannte Markov-Eigenschaft gilt:

$$P\{Z_{t+1} = s_{j_{t+1}} \mid Z_t = s_{j_t}, Z_{t-1} = s_{j_{t-1}}, \dots, Z_0 = s_{j_0}\} = P\{Z_{t+1} = s_{j_{t+1}} \mid Z_t = s_{j_t}\}.$$

Die $p_{ij}(t) := P\{Z_{t+1} = s_j \mid Z_t = s_i\}$, $i, j, t \in \mathbb{N}$, heißen Übergangswahrscheinlichkeiten der Kette.

- (a) Wir betrachten eine Gesamtheit von Lebenden (einfache Ordnung). Für eine Person der Gesamtheit mit dem Alter $x \in \mathbb{N}_0$ wird diese bekanntlich charakterisiert durch die stetige reellwertige Zufallsgröße

X : Alter bei Tod

Wir wollen nun einen stochastischen Prozess definieren, der diese einfache Ordnung beschreibt. Hierzu definieren wir einen Zustandsraum $S = \{0, 1\}$ mit der Bedeutung 1=“lebend“ und 0=“tot“ und einen stochastischen Prozess $Y = (Z_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ gemäß

$$\begin{aligned} Z_t &= 0, \text{ falls } X \leq x + t \\ &= 1, \text{ falls } X > x + t \end{aligned}$$

- (i) Definieren Sie mit Hilfe von X die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{00}(t)$, $p_{10}(t)$, $p_{01}(t)$, $p_{11}(t)$ des Prozesses Y und geben Sie soweit möglich hierzu die üblichen versicherungsmathematischen Bezeichnungen an.
- (ii) Charakterisieren Sie die Zustandsfolgen $s_{j_t}, s_{j_{t-1}}, \dots, s_{j_0}$, für die gilt:
 $P\{Z_t = s_{j_t}, Z_{t-1} = s_{j_{t-1}}, \dots, Z_0 = s_{j_0}\} = 0$.
- (iii) Zeigen Sie, dass der Prozess Y eine Markov-Kette darstellt.

- (b) Wir betrachten nun die im Repetitorium behandelte Aktivenausscheideordnung. Für eine Person der Gesamtheit mit dem Alter $x \in \mathbb{N}_0$ wird diese charakterisiert durch die beiden stetigen reellwertigen Zufallsgrößen

X_1 : Alter bei Eintritt der Invalidität

X_2 : Alter bei Eintritt des Todes

Beachten Sie, dass in diesem Modell der Übergang von einer Nebengesamtheit zur Hauptgesamtheit der Aktiven ausgeschlossen ist.

Wir wollen nun wieder einen stochastischen Prozess definieren, der diese Ausscheidungsordnung beschreibt. Hierzu definieren wir einen Zustandsraum $S = \{0, 1, 2\}$ mit der Bedeutung 2=“aktiv“, 1=“invalide“ und 0=“tot“, und einen stochastischen Prozess $Y = (Z_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ gemäß

$$\begin{aligned} Z_t &= 0, \text{ falls } X_2 \leq x + t \\ &= 1, \text{ falls } X_1 \leq x + t, X_2 > x + t \\ &= 2, \text{ falls } X_1 > x + t, X_2 > x + t \end{aligned}$$

- (i) Definieren Sie mit Hilfe von X_1 und X_2 die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{00}(t), p_{01}(t), \dots, p_{22}(t)$ des Prozesses Y .
- (ii) Charakterisieren Sie die Zustandsfolgen $s_{j_t}, s_{j_{t-1}}, \dots, s_{j_0}$, für die gilt:
 $P\{Z_t = s_{j_t}, Z_{t-1} = s_{j_{t-1}}, \dots, Z_0 = s_{j_0}\} = 0$
- (iii) Zeigen Sie, dass für $P\{Z_{t+1} = s \mid Z_t = 2\}$ und $P\{Z_{t+1} = s \mid Z_t = 0\}$, $s \in \{0, 1, 2\}$ die Markov-Eigenschaft gilt.
- (iv) Zweifellos kann die Sterblichkeit eines Invaliden davon abhängen, wie lange der Eintritt der Invalidität zurückliegt. Definieren Sie unter der Annahme, dass die Sterblichkeit eines Invaliden des Alters $x + t$ davon abhängt, ob er im Alter $x + t - 1$ invalide oder aktiv war, mit Hilfe von X_1 und X_2 die beiden Invalidensterblichkeiten

$$\begin{aligned} &P\{Z_{t+1} = 0 \mid Z_t = 1, Z_{t-1} = 2\} \text{ und} \\ &P\{Z_{t+1} = 0 \mid Z_t = 1, Z_{t-1} = 1\} \end{aligned}$$

und stellen Sie damit die Wahrscheinlichkeit $q_{x+t}^i = P\{Z_{t+1} = 0 \mid Z_t = 1\}$ als Mischverteilung der beiden Wahrscheinlichkeiten $P\{Z_{t+1} = 0 \mid Z_t = 1, Z_{t-1} = 2\}$ und $P\{Z_{t+1} = 0 \mid Z_t = 1, Z_{t-1} = 1\}$ dar.

Anmerkung: Somit ist Y keine Markov-Kette.

Lösungshinweise Aufgabe 1

- (a) (i) $p_{00}(t) = P\{X \leq x + t + 1 \mid X \leq x + t\}$
 $p_{01}(t) = P\{X > x + t + 1 \mid X \leq x + t\}$
 $p_{10}(t) = P\{X \leq x + t + 1 \mid X > x + t\} = q_{x+t}$
 $p_{11}(t) = P\{X > x + t + 1 \mid X > x + t\} = p_{x+t}$
- (ii) $P\{Z_t = s_{j_t}, Z_{t-1} = s_{j_{t-1}}, \dots, Z_0 = s_{j_0}\} = 0$,
 falls für ein Paar $s_{j_{i+1}}, s_{j_i} \in S, 0 \leq i \leq t-1$ gilt: $s_{j_{i+1}} > s_{j_i}$,
 denn in diesem Fall folgt nach Zustand "tot" der Zustand "lebend", also ein unmöglicher Übergang: Denn $s_{j_{i+1}} > s_{j_i}$ gilt nur für $s_{j_{i+1}} = 1, s_{j_i} = 0$ und hierfür gilt: $P\{Z_{i+1} = 1, Z_i = 0\} = 0$
- (iii) Vorbemerkung: Gilt die Markov-Eigenschaft für $P\{Z_{t+1} = s \mid \dots\}, s \in S$, dann gilt sie auch für $P\{Z_{t+1} = \bar{s} \mid \dots\}, \bar{s} \in S, \bar{s} \neq s$, wg.
 $P\{Z_{t+1} = \bar{s} \mid \dots\} = 1 - P\{Z_{t+1} = s \mid \dots\}$

Fall $1 \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned} & P\{Z_{t+1} = 1 \mid Z_t = 1, Z_{t-1} = s_{j_{t-1}}, \dots, Z_0 = s_{j_0}\} \\ &= P\{Z_{t+1} = 1 \mid Z_t = 1, Z_{t-1} = 1, \dots, Z_0 = 1\} \text{ wg. } \{Z_t = 1\} \subset \{Z_{t-1} = 1\} \subset \dots \subset \{Z_0 = 1\} \\ &= P\{Z_{t+1} = 1 \mid Z_t = 1\} = p_{11}(t) \end{aligned}$$

Damit gilt die Markov-Eigenschaft wg. der Vorbemerkung auch für den Fall $1 \rightarrow 0$ mit $p_{10}(t) = 1 - p_{11}(t)$.

Fall $0 \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned} & P\{Z_{t+1} = 1 \mid Z_t = 0, Z_{t-1} = s_{j_{t-1}}, \dots, Z_0 = s_{j_0}\} \\ &= \frac{P\{Z_{t+1} = 1, Z_t = 0, Z_{t-1} = s_{j_{t-1}}, \dots, Z_0 = s_{j_0}\}}{P\{Z_t = 0, Z_{t-1} = s_{j_{t-1}}, \dots, Z_0 = s_{j_0}\}} = 0 \text{ wg. } P\{Z_{t+1} = 1, Z_t = 0\} = 0 \end{aligned}$$

und

$$0 \leq P\{Z_{t+1} = 1, Z_t = 0, \dots, Z_0 = s_{j_0}\} \leq P\{Z_{t+1} = 1, Z_t = 0\} = 0$$

$$\text{Analog: } P\{Z_{t+1} = 1 \mid Z_t = 0\} = \frac{P\{Z_{t+1} = 1, Z_t = 0\}}{P\{Z_t = 0\}} = 0 = p_{01}(t)$$

Damit gilt die Markov-Eigenschaft wg. der Vorbemerkung auch für den Fall $0 \rightarrow 0$ mit $p_{00}(t) = 1 - p_{01}(t)$.

$$\begin{aligned}
\text{(b) (i)} \quad & p_{00}(t) = P\{Z_{t+1} = 0 \mid Z_t = 0\} = P\{X_2 \leq x+t+1 \mid X_2 \leq x+t\} \\
& p_{01}(t) = P\{X_1 \leq x+t+1, X_2 > x+t+1 \mid X_2 \leq x+t\} \\
& p_{02}(t) = P\{X_1 > x+t+1, X_2 > x+t+1 \mid X_2 \leq x+t\} \\
& p_{10}(t) = P\{X_2 \leq x+t+1 \mid X_1 \leq x+t, X_2 > x+t\} \\
& p_{11}(t) = P\{X_1 \leq x+t+1, X_2 > x+t+1 \mid X_1 \leq x+t, X_2 > x+t\} \\
& p_{12}(t) = P\{X_1 > x+t+1, X_2 > x+t+1 \mid X_1 \leq x+t, X_2 > x+t\} \\
& p_{20}(t) = P\{X_2 \leq x+t+1 \mid X_1 > x+t, X_2 > x+t\} \\
& p_{21}(t) = P\{X_1 \leq x+t+1, X_2 > x+t+1 \mid X_1 > x+t, X_2 > x+t\} \\
& p_{22}(t) = P\{X_1 > x+t+1, X_2 > x+t+1 \mid X_1 > x+t, X_2 > x+t\}
\end{aligned}$$

$$\text{(ii) } P\{Z_t = s_{j_t}, Z_{t-1} = s_{j_{t-1}}, \dots, Z_0 = s_{j_0}\} = 0,$$

falls für ein Paar $s_{j_{i+1}}, s_{j_i} \in S, 0 \leq i \leq t-1$, gilt: $s_{j_{i+1}} > s_{j_i}$.

Hierunter fallen die folgenden Paare: 1 0, 2 0 und 2 1, entsprechend der Übergänge $0 \rightarrow 1, 0 \rightarrow 2$ und $1 \rightarrow 2$. Für die entsprechenden Ereignisse gilt für ein geeignetes x' :

$$P\{X_1 \leq x' + 1, X_2 > x' + 1, X_2 < x'\} \leq P\{X_1 \leq x' + 1, X_2 > x' + 1, X_2 < x' + 1\} = 0$$

$$P\{X_1 > x' + 1, X_2 > x' + 1, X_2 < x'\} \leq P\{X_1 > x' + 1, X_2 > x' + 1, X_2 < x' + 1\} = 0$$

$$P\{X_1 > x' + 1, X_2 > x' + 1, X_1 \leq x', X_2 > x'\} \leq P\{X_1 > x' + 1, X_2 > x' + 1, X_1 \leq x' + 1, X_2 > x'\} = 0$$

Bemerkung: Alle anderen Übergänge sind möglich: $0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 0, 2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2$.

(iii) Vorbemerkung:

Gilt die Markov-Eigenschaft für $P\{Z_{t+1} = s_1 \mid \dots\}$ und $P\{Z_{t+1} = s_2 \mid \dots\}$, $s_1, s_2 \in S, s_1 \neq s_2$, dann gilt sie auch für $P\{Z_{t+1} = \bar{s} \mid \dots\}$, $\bar{s} \in S, \bar{s} \neq s_1, \bar{s} \neq s_2$, denn es gilt:

$$P\{Z_{t+1} = \bar{s} \mid \dots\} = 1 - P\{Z_{t+1} = s_1 \mid \dots\} - P\{Z_{t+1} = s_2 \mid \dots\}.$$

Fall $2 \rightarrow 2$:

$$\begin{aligned}
& P\{Z_{t+1} = 2 \mid Z_t = 2, Z_{t-1} = s_{j_{t-1}}, \dots, Z_0 = s_{j_0}\} \\
& = P\{Z_{t+1} = 2 \mid Z_t = 2, Z_{t-1} = 2, \dots, Z_0 = 2\}
\end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned}
& \{Z_t = 2\} \subset \{Z_{t-1} = 2\} \subset \dots \subset \{Z_0 = 2\} \quad (*) \\
& = P\{Z_{t+1} = 2 \mid Z_t = 2\} = p_{22}(t), \text{ auch wg. } (*)
\end{aligned}$$

Fall $2 \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
& P\{Z_{t+1} = 0 \mid Z_t = 2, Z_{t-1} = s_{j_{t-1}}, \dots, Z_0 = s_{j_0}\} \\
& = P\{Z_{t+1} = 0 \mid Z_t = 2, Z_{t-1} = 2, \dots, Z_0 = 2\} \text{ wg. } (*) \\
& = P\{Z_{t+1} = 0 \mid Z_t = 2\} = p_{20}(t), \text{ wieder wg. } (*)
\end{aligned}$$

Für Fall 2 → 1 folgt die Markov-Eigenschaft aus der Vorbemerkung.

Fall 0 → 0:

$$P\{Z_{t+1} = 0 \mid Z_t = 0, Z_{t-1} = s_{j_{t-1}}, \dots, Z_0 = s_{j_0}\} = 1 \text{ da } \{Z_t = 0\} \subset \{Z_{t+1} = 0\}$$

$$P\{Z_{t+1} = 0 \mid Z_t = 0\} = 1, \text{ da } \{Z_t = 0\} \subset \{Z_{t+1} = 0\}$$

Also gilt die Markov-Eigenschaft.

Fall 0 → 1:

$$P\{Z_{t+1} = 1 \mid Z_t = 0, Z_{t-1} = s_{j_{t-1}}, \dots, Z_0 = s_{j_0}\} = 0 \text{ sowie } P\{Z_{t+1} = 1 \mid Z_t = 0\} = 0 \text{ wg. } \{Z_{t+1} = 1, Z_t = 0\} = \emptyset$$

Also gilt die Markov-Eigenschaft.

Für Fall 0 → 2 folgt die Markov-Eigenschaft aus der Vorbemerkung.

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad & P\{Z_{t+1} = 0 \mid Z_t = 1, Z_{t-1} = 2\} \\ &= P\{X_2 \leq x + t + 1 \mid X_1 \leq x + t, X_2 > x + t, X_1 > x + t - 1, X_2 > x + t - 1\} \\ &= P\{X_2 \leq x + t + 1 \mid x + t + 1 < X_1 \leq x + t, X_2 > x + t\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P\{Z_{t+1} = 0 \mid Z_t = 1, Z_{t-1} = 1\} \\ &= P\{X_2 \leq x + t + 1 \mid X_1 \leq x + t, X_2 > x + t, X_1 \leq x + t - 1, X_2 > x + t - 1\} \\ &= P\{X_2 \leq x + t + 1 \mid X_1 \leq x + t - 1, X_2 > x + 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{x+t}^i &= P\{Z_{t+1} = 0 \mid Z_t = 1\} \\ &= \underbrace{P\{Z_{t+1} = 0, Z_{t-1} = 0 \mid Z_t = 1\}}_{(1)} + \underbrace{P\{Z_{t+1} = 0, Z_{t-1} = 1 \mid Z_t = 1\}}_{(2)} \\ &+ \underbrace{P\{Z_{t+1} = 0, Z_{t-1} = 2 \mid Z_t = 1\}}_{(3)} \end{aligned}$$

$$(1) = 0 \text{ wg. } \{Z_t = 1, Z_{t-1} = 0\} = \emptyset$$

$$(2) = P\{Z_{t+1} = 0 \mid Z_t = 1, Z_{t-1} = 1\} P\{Z_{t-1} = 1 \mid Z_t = 1\}$$

$$(3) = P\{Z_{t+1} = 0 \mid Z_t = 1, Z_{t-1} = 2\} P\{Z_{t-1} = 2 \mid Z_t = 1\}$$

$$q_{x+t}^i = P\{Z_{t+1} = 0 \mid Z_t = 1, Z_{t-1} = 1\} P\{Z_{t-1} = 1 \mid Z_t = 1\}$$

$$+ P\{Z_{t+1} = 0 \mid Z_t = 1, Z_{t-1} = 2\} P\{Z_{t-1} = 2 \mid Z_t = 1\}$$

Aufgabe 2 (30 Punkte)

Eine Bewertungsvorschrift für Pensionsverpflichtungen gehe nicht von einem jährlich konstanten Aufwand (Prämie) aus, sondern lege die Rückstellung für die Verpflichtung zum Anfang und Ende des Wirtschaftsjahres fest – bezeichnet mit ${}_m B_x$ bzw. ${}_{m+1} B_x$ – und ermittle hieraus den Aufwand. Nach Erkenntnisstand zum Beginn des Wirtschaftsjahres wird betriebswirtschaftlich von folgender Gleichung ausgegangen (mit Wertstellung zum Ende des Wirtschaftsjahres):

$$r {}_m B_x + P_m = R_m + {}_{m+1} B'_x \quad (1)$$

Dabei bezeichne:

x : das Eintrittsalter eines Berechtigten, sowie $z = x + n$ (Pensionierungsalter)

m bzw. $m + 1$: die Anzahl der Jahre vom Unternehmenseintritt bis zum Beginn bzw. Ende des betrachteten Wirtschaftsjahres

${}_m B_x$: Rückstellung der Verpflichtung, festgesetzt als Barwert des zum Stichtag (Anfang des Jahres) – z.B. auf Grund von Bewertungsvorschriften definierten – verdienten Anspruchs

$P_m = r {}_m \hat{L}_x^{(t)} + p_{x+m} {}_{m+1} B_x - r {}_m B_x$, mit p_{x+m} je nach Bestand: Rechnungsmäßiger Aufwand des Wirtschaftsjahres als Einmalbetrag zum Ende des Wirtschaftsjahres

R_m : Die im Wirtschaftsjahr zu erwartenden (also rechnungsmäßigen) Rentenzahlungen mit Wertstellung Ende des Wirtschaftsjahres

${}_{m+1} B'_x$: Auf der Basis der gegebenen Verpflichtung erwartete Rückstellung zum Ende des Jahres (Rückstellung zum Ende des Jahres, wie sie sich rechnungsmäßig aus der Verpflichtung zum Beginn des Wirtschaftsjahres entwickelt). Beachten Sie dabei, dass sich je nach Verpflichtung aus der Verpflichtung zum Jahresbeginn auch abgeleitete Verpflichtungen ergeben können (${}_{m+1} B'_x$ besteht also i.a. nicht nur aus ${}_{m+1} B_x$, sondern zusätzlich noch aus Rückstellungen für abgeleitete Verpflichtungen).

- (a) Wir betrachten zunächst den Fall eines Rentners (d.h. insbesondere $m \geq n$ und der erdiente Anspruch zum Ende des Jahres entspricht dem verdienten Anspruch zum Beginn des Jahres) mit der Verpflichtung einer lebenslänglich $\frac{1}{t}$ -jährlich vorschüssig zahlbaren Rente vom Jahresbetrag R . Berechnen Sie P_m , R_m sowie ${}_{m+1} B'_x$.

Bem.: Berechnen Sie $R_m + {}_{m+1} B'_x$ und teilen Sie das Ergebnis auf nach rechnungsmäßigen Zahlungen des Jahres und rechnungsmäßigen Rückstellungen zum Ende des Jahres.

- (b) Wie 1., doch zum Ende des Wirtschaftsjahres wird die zugesagte Jahresrente von R um ΔR auf $R + \Delta R$ erhöht.

(c) Wir betrachten nun eine Zusage an einen Anwärter (d.h. insbesondere $m < n$) der zufolge als Leistungen eine lebenslänglich laufende $\frac{1}{t}$ -jährlich vorschüssig zahlbare Alters- und Invalidenrente in Höhe eines Jahresbetrags R vorgesehen sind.

(i) Geben Sie ${}_m\hat{L}_x^{(t)}$ an und berechnen Sie damit P_m .

(ii) Berechnen Sie für diese Verpflichtung R_m sowie ${}_{m+1}B'_x$.

Lösungshinweise Aufgabe 2

$$(a) P_m = r {}_m\hat{L}_x^{(t)} + p_{x+m}^r {}_{m+1}B_x - r {}_mB_x$$

mit

$${}_m\hat{L}_x^{(t)} = R[1 - k^{(t)}(1 - v p_{x+m}^r)]$$

und

$${}_mB_x = R^{(t)} a_{x+m}^r$$

mit

$${}_mB_x = {}_m\hat{L}_x^{(t)} + v p_{x+m}^r {}_{m+1}B_x \quad (2)$$

Es folgt:

$$P_m = 0 \text{ (wie zu erwarten!)}$$

Bem.: Dieses Ergebnis gilt offenbar genau dann, wenn Gl. (2) gilt. Vergleiche dagegen Teilaufgabe 2.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} R_m + {}_{m+1}B_x' &= r {}_mB_x + P_m \text{ nach Gl.(1)} \\ &= r {}_m\hat{L}_x^{(t)} + p_{x+m}^r {}_{m+1}B_x \text{ nach Gl.(2)} \\ &= rR[1 - k^{(t)}(1 - v p_{x+m}^r)] + p_{x+m}^r R^{(t)} a_{x+m+1}^r \end{aligned}$$

\implies

$$\begin{aligned} R_m &= rR[1 - k^{(t)}(1 - v p_{x+m}^r)] \\ {}_{m+1}B_x' &= p_{x+m}^r R^{(t)} a_{x+m+1}^r \end{aligned}$$

(b) Seien die Größen G von Teilaufgabe 1 mit $G(1)$ bezeichnet.

${}_m\hat{L}_x^{(t)}$ und ${}_mB_x$ von Teilaufgabe 1 bleiben unverändert, da die Anspruchserhöhung zum Ende des Jahres erfolgt:

$$\begin{aligned} {}_m\hat{L}_x^{(t)} &= {}_m\hat{L}_x^{(t)}(1), \\ {}_mB_x &= {}_mB_x(1); \end{aligned}$$

dagegen gilt:

$$\begin{aligned} {}_{m+1}B_x &= (R + \Delta R)^{(t)} a_{x+m+1}^r \\ &= {}_{m+1}B_x(1) + \Delta R^{(t)} a_{x+m+1}^r \end{aligned}$$

$$P_m = r {}_m\hat{L}_x^{(t)} + p_{x+m}^r {}_{m+1}B_x(1) + p_{x+m}^r \Delta R^{(t)} a_{x+m+1}^r - r {}_mB_x$$

Es folgt wegen Gl. (2):

$$P_m = \Delta R p_{x+m}^r \cdot {}^{(t)}a_{x+m+1}^r$$

Weiter gilt:

$$R_m + {}_{m+1}B'_x = rR[1 - k^{(t)}(1 - v p_{x+m}^r)] \\ + (R + \Delta R) p_{x+m}^r \cdot {}^{(t)}a_{x+m+1}^r$$

\implies

$$R_m = rR[1 - k^{(t)}(1 - v p_{x+m}^r)] = R_m(1)$$

$${}_{m+1}B'_x = (R + \Delta R) p_{x+m}^r \cdot {}^{(t)}a_{x+m+1}^r \\ = {}_{m+1}B'_x(1) + P_m$$

(c) (i)

$${}_m\hat{L}_x^{(t)} = {}_m^{(t)}L_x^{(0)} + \sum_{i=1}^1 q_{x+i}^{(i)} \cdot {}_m^{(t)}L_x^{(i)} \\ = i_{x+m} R v \frac{1}{2} p_{x+\frac{1}{2}}^i (k^{(t)} + {}^{(t)}a_{x+m+1}^i) \quad \text{f. } m < n \\ = {}^{(t)}a_z^r \quad \text{f. } m = n$$

Dabei gilt $x + n = z$ mit z : Pensionsalter laut Zusage.

Für $m < n$ gilt:

$$P_m = r {}_m\hat{L}_x^{(t)} + p_{x+m}^a \cdot {}_{m+1}B_x - r {}_mB_x \\ = R i_{x+m} \frac{1}{2} p_{x+\frac{1}{2}}^i (k^{(t)} + {}^{(t)}a_{x+m+1}^i) + p_{x+m}^a \cdot {}_{m+1}B_x - r {}_mB_x$$

Bem.: Man beachte, dass ${}_mB_x$ bzw. ${}_{m+1}B_x$ Barwerte eines – beliebig definierten – erdienten Anspruchs sind, also nicht notwendigerweise die Barwerte nach Zusage. In diesem Fall wäre $P_m = 0$.

(ii)

$$R_m + {}_{m+1}B'_x = r {}_m\hat{L}_x^{(t)} + p_{x+m}^a \cdot {}_{m+1}B_x \quad \text{wg. (1)} \\ = R i_{x+m} \frac{1}{2} p_{x+m+\frac{1}{2}}^i (k^{(t)} + {}^{(t)}a_{x+m+1}^i) + p_{x+m}^a \cdot {}_{m+1}B_x$$

$$R_m = R k^{(t)} i_{x+m} \frac{1}{2} p_{x+m+\frac{1}{2}}^i \\ {}_{m+1}B'_x = R i_{x+m} \frac{1}{2} p_{x+m+\frac{1}{2}}^i \cdot {}^{(t)}a_{x+m+1}^i + p_{x+m}^a \cdot {}_{m+1}B_x$$

Aufgabe 3 (insgesamt 36 Punkte)

Teil a) (10 Punkte)

Nehmen Sie zu folgender Aussage Stellung:

„Die kapitalgedeckte Altersvorsorge ist ein Instrument, um die Alterssicherung gegen demographische Risiken zu immunisieren; insbesondere koppelt man dadurch die Abhängigkeit der Alterssicherung von der allgemeinen wirtschaftlichen Entwicklung ab.“

Teil b) (6 + 6 Punkte)

Der § 125 Absatz 1 VAG hat folgenden Wortlaut:

„(1) Der Vorstand eines Erstversicherungsunternehmens hat schon im Laufe des Geschäftsjahres Beträge in solcher Höhe dem Sicherungsvermögen zuzuführen und vorschriftsmäßig anzulegen, wie es dem voraussichtlichen Anwachsen des Mindestumfangs nach Absatz 2 entspricht. Wenn Erstversicherungsunternehmen Vermögen in

- 1. Darlehensforderungen,*
- 2. Schuldverschreibungen und Genussrechten,*
- 3. Schuldbuchforderungen,*
- 4. Aktien,*
- 5. Beteiligungen,*
- 6. Grundstücken und grundstücksgleichen Rechten,*
- 7. Anteilen im Sinne des § 215 Absatz 2 Satz 1 Nummer 6 oder*
- 8. laufenden Guthaben und Einlagen bei Kreditinstituten*

anlegen, sind diese Vermögenswerte bis zur Höhe der in Absatz 2 genannten Summe der Bilanzwerte dem Sicherungsvermögen zuzuführen. Die in Satz 2 genannten Vermögenswerte sollen insgesamt im Hinblick auf Sicherheit, Liquidität, Rentabilität und Qualität mindestens dem Niveau des Gesamtportfolios entsprechen.“

- Erläutern Sie die Bedeutung des Sicherungsvermögens im Kontext der Versicherungsaufsicht!
- Im obigen § 125 Abs. 1 VAG wird auf den *Mindestumfang nach Absatz 2* hingewiesen. Nennen Sie mindestens drei Positionen der Passivseite, die in die Berechnung des Mindestumfangs nach Absatz 2 einfließen.

Teil c) (8 + 6 Punkte)

Die Pensionskasse *PK* verwaltet einen Anwärterbestand. Die Bilanz habe folgende Struktur:

$P = 100$	$R = 15$
	$V = 85$

Für die Kapitalanlagen stehen zwei Assetklassen zur Verfügung:

- sichere Kapitalanlage mit einer Verzinsung von 2,0%
- Aktienanlage mit einer erwarteten (aber unsicheren) Verzinsung von 7%.

Wählen Sie als Risikokennzahl die Aktienquote α , $0 \leq \alpha \leq 100\%$.

Die Deckungsrückstellungen werden mit einem Rechnungszins (= Garantiezins) von **1,0%** kalkuliert.

Die (vereinfachten) Solvabilitätsvorschriften verlangen freie unbelastete Mittel in Höhe von 4,5% der Deckungsrückstellung. Ferner wird ein Stresstest verlangt. Dieser fordert, dass auch bei einem simultanen Wertverlust von 10% auf Zinspapieren und von 40% auf Aktien noch hinreichend Eigenmittel vorhanden sind.

- Bestimmen Sie unter Beachtung der Solvabilitätsgrenzen die maximale reserveneutrale Deklaration d (Garantiezins einschließlich Bonuszins) und die zugehörigen Aktienquote α .
- Wie ändert sich das Ergebnis, wenn der Arbeitgeber bereit ist, durch eine Einlage die Reserve R von 15 auf 25 zu erhöhen?

Stellen Sie die entsprechenden Bestimmungsgleichungen für d und α auf und kommentieren Sie Ihre Rechenschritte in Stichworten!

Hinweis: Unterstellen Sie vereinfachend, dass keine neuen Beiträge eingehen und dass (noch) keine Leistungen ausgezahlt werden.

Lösungshinweise:

zu Aufgabe 3 a)

Ein kapitalgedecktes Alterssicherungssystem kann nicht gegen Risiken einer alternden Bevölkerung immunisieren. Aus dem Versorgungskapital der Rentnergeneration müssen Güter und Dienstleistungen erworben werden. Diese müssen aber von der Generation der Aktiven hergestellt bzw. bereitgestellt werden. Dies ist Kern der sogenannten Mackenrothschen These, wonach aller Sozialaufwand immer aus dem Sozialaufwand immer aus dem Volkseinkommen der laufenden Periode gedeckt werden muss. Insbesondere kann eine Kapitaldeckung nicht vor den Folgen einer schlechten wirtschaftlichen Entwicklung schützen. Allerdings ist zu beachten, dass die Mackenrothsche These nur für eine geschlossene Volkswirtschaft gilt; in der offenen Volkswirtschaft können natürlich Güter und Dienstleistungen aus anderen (ggf. jungen) Volkswirtschaften erworben werden. Hierbei sollte man jedoch bedenken, dass in sehr vielen Volkswirtschaften eine alternde Bevölkerung zu beobachten ist.

zu Aufgabe 3 b)

Das Sicherungsvermögen ist getrennt vom übrigen Vermögen zu verwahren (vgl. § 125 Abs. 4 VAG) und es ist sicherzustellen, dass nur mit Zustimmung des Sicherungstreuhänders darüber verfügt werden kann (§ 129 VAG). Auf diese Weise ist gewährleistet, dass die Vermögenswerte des Sicherungsvermögens dem alleinigen Zugriff durch den Vorstand entzogen sind. Vor der Bestellung des Treuhänders durch das Unternehmen muss die Bestellung der Aufsichtsbehörde mitgeteilt werden. Diese kann ggf. verlangen, dass eine andere Person bestellt wird. Soweit das Sicherungsvermögen betroffen ist, hat der Treuhänder das Recht, jederzeit in die Bücher des Versicherungsunternehmens einsehen.

§ 125 Abs. 2 VAG regelt den Mindestumfang des Sicherungsvermögens. Aufgrund des Zwecks des Sicherungsvermögens muss der Mindestumfang so bemessen sein, dass diese die Kernverbindlichkeiten eines Lebensversicherers bedecken. Dies bedeutet, dass der Mindestumfang u.a. folgende Größen umfasst:

- die Deckungsrückstellung
- die Beitragsüberträge
- der gebundene Teil der RfB
- Rückstellung für noch nicht abgewickelte Versicherungsfälle oder Rückkäufe.

zu Aufgabe 3 c)

Das Vermögen unter Berücksichtigung der möglichen Verluste muss die Verbindlichkeiten unter Berücksichtigung der Solvaspanne bedecken.

Das „gestresste“ Vermögen beträgt in Abhängigkeit von der Aktienquote α :

$$P(\alpha) = (1 - \alpha) \cdot 100 \cdot (1 - 0,1) + \alpha \cdot 100 \cdot (1 - 0,4) = 90 - 30 \alpha$$

Die Deckungsrückstellung unter Berücksichtigung der Solvaspanne in Abhängigkeit von der Deklaration d (Rechnungszins von 1% zuzüglich Bonuszins) :

$$V(d) = V \cdot (1+d) \cdot 1,045 = 88,825 \cdot (1+d)$$

Aus der Bedingung $P(\alpha) \geq V(d)$ folgt

$$90 - 30 \alpha \geq 88,825 \cdot (1+d)$$

$$d \leq 0,013228 - 0,337743 \alpha$$

Für eine reserveneutrale Deklaration muss gelten:

$$d = (1 - \alpha) \cdot 0,02 + \alpha \cdot 0,07 = 0,02 + 0,05 \alpha \quad \text{bzw.} \quad \alpha = 20 d - 0,4.$$

Für die maximale reserveneutrale Deklaration muss somit gelten:

$$d \leq 0,013228 - 0,337743 (20 d - 0,4)$$

also

$$d \leq 0,013228 - 0,337743 (20 d - 0,4)$$

$$7,75486 d \leq 0,1483252$$

$$d \leq 0,019127$$

Die maximale Deklaration beträgt also 1,91%, dies ist weniger als der sichere Zins von 2%. Also ist eine reserveneutrale Deklaration nicht möglich, da diese bei einer Aktienquote von Null 2% betragen würde.

Bei einer Reserve von 25 statt 15 ergibt sich

$$V(d) = V \cdot (1+d) \cdot 1,045 = 78,325 \cdot (1+d)$$

und

$$90 - 30 \alpha \geq 78,325 \cdot (1+d)$$

$$d \leq 0,149058 - 0,383019 \alpha$$

Für die maximale reserveneutrale Deklaration muss somit gelten:

$$d \leq 0,149058 - 0,383019 (20 d - 0,4)$$

bzw.

$$8,6604 d \leq 0,302266$$

$$d \leq 0,03490$$

Bei einer Reserve von 25% beträgt maximale reserveneutrale Deklaration rund 3,49%; dies erfordert eine Aktienquote von $\alpha = 20 d - 0,4 = 29,8\%$.

Aufgabe 4 (36 Punkte)

Die „Gute Produkte GmbH“ steht vor wichtigen Entscheidungen über die Zukunft des Unternehmens. Zur Fundierung dieser Entscheidungen sollen Prognosen über die wirtschaftliche Zukunft angestellt werden. Bei der Firma besteht auch eine unmittelbare Pensionszusage in Form einer beitragsorientierten Leistungszusage, die Alters-, Invaliden- und Hinterbliebenenrenten vorsieht. Die Beschreibung der wirtschaftlichen Konsequenzen dieser betrieblichen Altersversorgung traut sich die Firma selbst nicht zu. Daher zieht man Sie als Aktuar/in hinzu. Bitte beantworten folgende Fragen:

- a)** Erläutern Sie die beiden im Repetitorium vorgestellten Prognosemethoden, um die zukünftige Entwicklung der betrieblichen Altersversorgung im Zeitablauf zu beschreiben! Worin unterscheiden sich diese Verfahren?
- b)** Welche Kenngrößen sind üblicherweise Gegenstand einer Prognoserechnung?
- c)** Welche Parameter sind für die Prognoserechnung festzulegen?
- d)** Im Bestand befinden sich viele Anwärter, die bereits das Finanzierungsendalter der Rückstellungsberechnung erreicht oder überschritten haben. Welche besonderen Probleme können hieraus resultieren und wie lassen sich diese vermeiden?
- e)** Welche Probleme können gerade bei langen Prognosezeiträumen bei der Interpretation der Ergebnisse durch den Kunden entstehen? Was sollten Sie als Aktuar/in beachten, um diese Probleme möglichst zu vermeiden? Gehen Sie auch darauf ein, worauf Sie bei der Ergebnisaufbereitung achten sollten!

Lösungshinweise Aufgabe 4:

a) (9 Punkte)

Als Prognoseverfahren stehen die deterministische Prognose, sowie die stochastische Prognose (Monte-Carlo-Verfahren) zu Verfügung.

Bei der deterministischen Methode wird jede einzelne Person des Bestandes nach Maßgabe der aus den biometrischen Rechnungsgrundlagen hergeleiteten Übergangswahrscheinlichkeiten Jahr für Jahr fortentwickelt. Auf diese Weise können unmittelbar die Erwartungswert der interessierenden Kenngrößen im Zeitablauf ermittelt werden.

Bei der Monte-Carlo-Simulation hingegen wird das individuelle Schicksal eines jeden Berechtigten des Bestandes auf Basis der zugrunde gelegten Rechnungsgrundlagen simuliert. Als Resultat erhält man eine mögliche Realisierung der zu prognostizierenden Größen (z.B. Rentenzahlungen). Anhand einer Vielzahl von Realisierungen werden Schätzer für die zu prognostizierenden Größen gewonnen.

Im Gegensatz zu einer deterministischer können bei einer Monte-Carlo-Simulation neben Schätzern für den Erwartungswert der interessierenden Größen auch Schätzer für weitere Größen (z.B. die Varianz) ermittelt werden.

b) (5 Punkte)

Gegenstand einer Prognoserechnung können z.B. sein

- *Anzahlen von Anwärtern und Leistungsempfängern*
- *Zahlungsströme, wie z.B.*
 - *Versorgungsleistungen*
 - *Dotierungen bei beitragsorientierten Systemen*
 - *Lohn- und Gehaltssumme*
 - *Verwaltungskosten (z.B. PSV-Beiträge)*
- *Bilanz- und GUV-Werte, wie z.B.*
 - *Pensionsrückstellung*
 - *Aufwand*

Die jeweiligen Größen können sowohl als Absolut- wie auch als Relativgrößen ermittelt werden.

Zu c) (7 Punkte)

Festzulegende Parameter sind z.B.:

- *Biometrische Rechnungsgrundlagen*
- *Altersgrenzen*
- *Annahmen zur Modellierung des Neuzugangs*
 - *abnehmender / konstanter / wachsender Aktivenbestand*
 - *Eintrittsaltersverteilung*
- *Zukünftige Dotierungen bei beitragsorientierten Systemen*
- *Trendannahmen zur Steigerung der Bemessungsgrößen*
- *Trendannahmen zur Steigerung der Renten*
- *Prognosezeitraum*
- *Bewertungsmethode und -prämissen für Bilanzwerte*
- *Ggf. weitere Größen (wie z.B. Steuersätze, PSV-Beitragsätze)*

Zu d) (5 Punkte)

Bei den sogenannten technischen Rentnern wird als Rückstellung der Barwert der Verpflichtungen gebildet. Damit verbunden ist, dass ein sofortiger Rentenbezug im Bewertungsverfahren unterstellt wird. Setzt man dies 1:1 bei der Prognoserechnung um, so erhält man in den ersten Jahren der Prognose deutlich zu hohe Zahlungsströme und Rentneranzahlen.

Um dieses Problem zu lösen, kommt in Betracht, dass die technischen Rentner modellhaft über einen Zeitraum von mehreren Jahren in Pension gehen, d.h. insbesondere, dass das Finanzierungsendalter für die Rückstellungsberechnung und das Pensionierungsalter für die Bestandsfortentwicklung voneinander abweichen.

Zu e) (10 Punkte)

Gerade bei Kenngrößen, die einem Trend unterliegen (z.B. Rentenhöhen, Höhe von gehaltsabhängigen Dotierungen) führt die Wirkung dieses Trends im Falle der Angabe von Absolutwerten zu falschen Interpretationen. Die Belastungen werden tendenziell überschätzt. Daher sollten vorzugsweise Relativzahlen (z.B. im Verhältnis der Lohn- und Gehaltssumme) oder trendbereinigte Werte dargestellt werden.

Ferner ist eine Angabe von Erwartungswerten – insbesondere bei Absolutwerten - kritisch, da der Mandant in diesem Fall keine Einschätzung erhält, welche Abweichungen von den Ergebnissen einer Prognoserechnung realistisch sind. Hier hilft die Darstellung eines Streuungsbereichs. Auch eine Angabe von Relativzahlen ist ein probates Mittel, da diese deutlich weniger schwankungsanfällig sind. Auch Sensitivitätsanalysen helfen dem Mandanten bei der Einordnung der Ergebnisse.

Bei der Ergebnisdarstellung sollte der Aktuar darauf achten, dass die Ergebnisse eine klar erkennbare Struktur aufweisen und unmissverständlich formuliert werden. Aussagekräftige Tabellen und Grafiken helfen beim Verständnis. Je nach Vorkenntnissen des Lesers sollte der Aktuar nur unter Spezialisten bekannte Fachwörter meiden oder erklären. Ferner sollten angemessene Einheiten gewählt werden.

Aufgabe 5 (36 Punkte)

a) Stellen Sie für eine nicht regulierte Pensionskasse die wesentlichen Inhaltsbestandteile eines Erläuterungsberichts und eines Angemessenheitsberichts knapp dar!

b) Eine Pensionskasse, die nur Altersrenten gewährt, weist ein negatives Risikoergebnis bei den Rentnern aus. Sie analysieren die Ursache und kommen zu dem Ergebnis, dass die Quelle für dieses negative Risikoergebnis in der biometrischen Entwicklung des Rentnerbestandes liegt. Bei einem Vergleich der rechnerisch erwarteten Todesfälle mit den tatsächlich beobachteten Fallzahlen stellen Sie jedoch keine Untersterblichkeit im Bestand fest.

Wie erklären Sie sich dieses Ergebnis? Welche Möglichkeit sehen Sie, Ihre Einschätzung zu überprüfen?

c) Die Pensionskasse gewähre nun auch Leistungen bei Eintritt eines vorzeitigen Versorgungsfalles aufgrund von Invalidität. Bei der Überprüfung der Invalidisierungswahrscheinlichkeiten i_x stellen Sie fest, dass die tatsächlich beobachtete Anzahl an Invaliditätsfällen bei jüngeren Aktiven die rechnerisch erwartete Anzahl deutlich übersteigt. Die Pensionskasse möchte darauf mit dem Ziel einer erhöhten Sicherheit reagieren und erwägt, die i_x in dem betroffenen Altersbereich anzuheben.

Wird durch dieses Vorgehen das Ziel einer erhöhten Sicherheit in jedem Fall erreicht? Begründen Sie Ihre Auffassung!

d) Stellen Sie – ohne Berücksichtigung von Beitragsüberträgen und Rückdeckung – dar, wie die Solvabilitätskapitalanforderungen gemäß § 9 Abs. 1 KapAusstV ermittelt werden. Beschreiben Sie in diesem Zusammenhang für den Fall eines Vertrages mit den Leistungen Alters- und Invalidenrente, wie das Risikokapital im Sinne von § 9 KapAusstV für eine x -jährige versicherte Person ermittelt wird und geben Sie die im Repetitorium vorgestellte formelmäßige Darstellung an.

Lösungshinweise Aufgabe 5:

Zu a) (12 Punkte)

Der Erläuterungsbericht muss gemäß § 4 AktuarV folgendes enthalten:

- *Begründung einer Einteilung des Bestandes in Risikoklassen*
- *Methoden zur Berechnung der Deckungsrückstellung*
- *Rechnungsgrundlagen*
- *Darlegungen, dass ...*
 - *alle garantierten Leistungen berücksichtigt sind*
 - *die Rechnungsgrundlagen angemessene Sicherheitsspannen enthalten*
 - *das Vorsichtsprinzip auch bei der Bewertung der Aktiva angewendet wurde*
- *Einschätzung über die künftige Entwicklung der Sicherheitsspannen*
- *Erläuterungen zu Zusatzrückstellungen*
- *Im Fall von Eintrittsverlusten: Höhe der Auffüllbeträge mit Erläuterung*

Im Angemessenheitsbericht muss der Verantwortliche Aktuar gemäß § 5 AktuarV darlegen, dass die dauernde Erfüllbarkeit der Verpflichtungen auch unter Einschluss der zusätzlichen Verpflichtungen aus der von ihm vorgeschlagenen Überschussbeteiligung gewährleistet bleibt. Außerdem ist darzulegen, dass die Vorschläge im Einklang mit dem aufsichtsrechtlichen Gleichbehandlungsgrundsatz stehen und dass diese verursachungsgerecht sind.

Zu b) (4 Punkte)

Da bei der Überprüfung nach Anzahlen keine Untersterblichkeit feststellbar ist, ist zu vermuten, dass überdurchschnittlich viele Rentner mit relativ geringen Altersrenten und unterdurchschnittlich viele Rentner mit relativ hohen Renten verstorben sind.

Um diese Vermutung zu überprüfen, kommt eine Überprüfung der Sterblichkeit anhand der mit der Leistungshöhe gewichteten Anzahlen oder eine Überprüfung anhand des riskierten Kapitals in Betracht.

Zu c) (8 Punkte)

Das Vorhaben der Pensionskasse ist ohne weitere Betrachtung der Invalidenleistungen kritisch zu sehen. Sollten bei den jüngeren Aktiven nur geringe oder gar keine Invalidenleistungen gewährt werden, so übersteigt die vorhandene Reserve den Barwert der ausgelösten Invalidenleistungen, d.h. das Risikokapital ist negativ. In diesem Fall würde also ein Invaliditätsfall im betroffenen Altersbereich zu einem positiven Vererbungseffekt führen. Folglich würde dann durch eine Erhöhung der Invalidisierungswahrscheinlichkeiten im betroffenen Altersbereich die Sicherheit reduziert und nicht erhöht werden.

Ferner ist eine isolierte Modifikation der Invalidisierungswahrscheinlichkeiten aufgrund der 1. Konsistenzgleichung mathematisch nicht sachgerecht. Vielmehr muss mindestens eine weitere Wahrscheinlichkeit angepasst werden. Auch diese Modifikation muss daraufhin untersucht werden, inwieweit sie eine erhöhte Sicherheit zur Folge hat.

Zu d) (12 Punkte)

Die Solvabilitätskapitalanforderungen entsprechen der Summe von

- 4 Prozent der Deckungsrückstellung und
- 0,3 Prozent des Risikokapitals aus dem gesamten Versicherungsgeschäft

Das Risikokapital für eine x -jährige versicherte Person entspricht dabei der Differenz zwischen dem Barwert der zugesagten Leistungen bei Eintritt des Versorgungsfalles am maßgeblichen Stichtag und dem vorhandenen Deckungskapital.

Für die Leistungsfälle Invalidität und Alter ist getrennt ein Risikokapital zu ermitteln. Von den so ermittelten Beträgen ist der höchste als Risikokapital für die versicherte Person anzusetzen, d.h.:

$$RK_{\text{Gesamt}} = \max(\max(RK_{\text{Alter}}; RK_{\text{Invalidität}}) - V_x; 0)$$

V_x : Vorhandene Deckungsrückstellung für den x -jährigen Berechtigten

Für die Berechnung einige Besonderheiten:

- Barwertberechnung erfolgt mit gleichen Rechnungsgrundlagen wie bei der Deckungsrückstellung.
- Dabei wird keine Ausscheideordnung berücksichtigt, d.h. die Renten werden als (aufgeschobene) Zeitrente bis zum Tafelendalter modelliert.
- Von dem so berechneten Barwert der Leistungen ist der Barwert der Beiträge, berechnet als Barwert einer abgekürzten Zeitrente bis zum Rentenbeginnalter, abzuziehen.

Die einzelnen Bestandteile des Risikokapitals lassen sich formelmäßig wie folgt darstellen:

$$RK_{\text{Alter}} = R^A v^{z-x} a_{\omega-z} - P_x a_{z-x}$$

$$RK_{\text{Invalidität}} = R^i v^{t-x} a_{\omega-t} - P_x a_{t-x}$$

R^A bzw. R^i : Jährliche Altersrente bzw. Invalidenrente

t : Alter bei Ablauf einer Wartezeit ($x < t$)

ω : Endalter der Tafeln.