

Aufgabe 1 (insgesamt 48 Punkte)

Bedeute auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P)

M : Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Tod eines x -jährigen Mannes,

N : Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Tod einer y -jährigen Frau,

(M, N) unabhängig) sowie

$$B_1 = v^{\min(M,N)+1}$$

$$B_2 = a_{\overline{\min(M,N)+1}|}$$

$$B_3 = v^{M+1} a_{\overline{N-M}|} \mathbf{1}_{\{N > M\}}$$

die Erfüllungsbeträge von ungewissen Verpflichtungen.

1. Um welche Art von Verpflichtungen handelt es sich bei B_1, B_2, B_3 ? Bitte u.a. unter Hinweis auf die Zahlungsweise genau charakterisieren!
2. Stellen Sie die Erwartungswerte $\mathcal{E}B_1, \mathcal{E}B_2, \mathcal{E}B_3$ mittels der Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}\{M = m, N = n\}$, $m, n = 0, 1, \dots$, dar und zeigen Sie, dass daraus folgt:

$$\mathcal{E}B_1 = \sum_{k \geq 0} v^{k+1} \mathbb{P}\{M \geq k, N = k\} + \sum_{k \geq 0} v^{k+1} \mathbb{P}\{M = k, N > k\}$$

$$\mathcal{E}B_2 = \sum_{k \geq 0} a_{\overline{k+1}|} \mathbb{P}\{M \geq k, N = k\} + \sum_{k \geq 0} a_{\overline{k+1}|} \mathbb{P}\{M = k, N > k\}$$

$$\mathcal{E}B_3 = \sum_{n \geq 0} \sum_{m=0}^{n-1} v^{m+1} a_{\overline{n-m}|} \mathbb{P}\{M = m, N = n\}$$

Hinweis: Beachten Sie, dass gilt

$$\sum_{i \geq 0} \sum_{j=0}^i b_{ij} = \sum_{j \geq 0} \sum_{i \geq j} b_{ij}.$$

3. Sei q_x^M die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit eines x -jährigen Mannes. Drücken Sie für $m \in \mathbb{N}_0$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}\{M = m\}$ versicherungsmathematisch mit Hilfe der q_x^M und daraus abgeleiteter Wahrscheinlichkeiten aus.
4. Sei q_y^W die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit einer y -jährigen Frau. Drücken Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}\{N \geq n\}$ versicherungsmathematisch mit Hilfe der q_y^W bzw. daraus abgeleiteter Wahrscheinlichkeiten aus.
Bem.: Es wird also nicht zwischen der Sterblichkeit einer Frau und einer Witwe unterschieden.
5. Zeigen Sie, ausgehend von der Darstellung in 2, dass gilt:

$$\mathcal{E}B_1 = \sum_{k \geq 0} v^{k+1} ({}_k p_x^M {}_k p_y^W - {}_{k+1} p_x^M {}_{k+1} p_y^W) \quad (= A_{xy}).$$

6. Zeigen Sie, ausgehend von der Darstellung in 2, dass gilt:

$$\mathcal{E}B_2 = \sum_{k \geq 0} v^k \begin{matrix} M \\ k p_x \end{matrix} \begin{matrix} W \\ k p_y \end{matrix} \quad (= a_{xy}).$$

7. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathcal{E}B_3 = \sum_{m \geq 0} v^{m+1} \begin{matrix} M \\ m p_x \end{matrix} \begin{matrix} M \\ q_{x+m} \end{matrix} \begin{matrix} W \\ m+1 p_y \end{matrix} a_{y+m+1}^W.$$

8. Zeigen Sie, dass sich B_3 auch in der Form $B_3 = a_{\overline{N+1}} - a_{\overline{\min(M,N)+1}}$ darstellen lässt, und damit

$$\mathcal{E}B_3 = a_y - a_{xy}.$$

9. Zeigen Sie, dass sich B_3 auch in der Form $B_3 = \frac{1}{d}(v^{\min(M,N)+1} - v^{N+1})$ darstellen lässt, und damit

$$\mathcal{E}B_3 = \frac{1}{d}(A_{xy} - A_y).$$

Aufgabe 2 (insgesamt 24 Punkte)

Wir betrachten eine im Alter x des Berechtigten zugesagte Pensionsverpflichtung auf der Basis des erweiterten Modells mit den bekannten Ausscheidewahrscheinlichkeiten für Fluktuation (s_u), Invalidität als interner Anwärter (\hat{i}_u) und Tod als interner Anwärter (\hat{q}_u^{aa}), $u = x, x + 1, \dots, x + n$ (Pensionsalter).

1. Geben Sie die versicherungsmathematischen Bilanzgleichungen für diese Verpflichtung an und erläutern Sie die darin vorkommenden Terme.
2. Leiten Sie aus den versicherungsmathematischen Bilanzgleichungen die Rekursionsformeln für die Barwerte der Verpflichtung, also

$${}_m B_x = {}_m \hat{L}_x + v p_{x+m} {}_{m+1} B_x, \quad m = 0, 1, \dots, n - 1 \quad \text{mit} \quad {}_n B_x = {}_n \hat{L}_x$$

ab, indem Sie die versicherungsmathematischen Bilanzgleichungen für den Fall der Einmalprämie mit ${}_0 V_x = 0$ betrachten.

3. Drücken Sie explizit p_u , $u = x, x + 1, \dots, x + n$ durch die Ausscheidewahrscheinlichkeiten s_u , \hat{i}_u und \hat{q}_u^{aa} aus.
4. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeiten s_u , \hat{i}_u , \hat{q}_u^{aa} und p_u , $u = x, x + 1, \dots, x + n$, mit Hilfe der stetigen Zufallsgrößen X_1, X_2, X_3 dar, also der Alter, zu denen die dem Berechtigten zugeordneten Ereignisse "Fluktuation", "Invalidität" und "Tod" eintreten.
5. Erläutern Sie $P\{X_2 \leq X_3 \leq x + 1 | X_2 > x, X_3 > x\}$ und geben Sie die versicherungsmathematische Notation dafür an.
6. Erläutern Sie ${}_0 V_x$ sowohl für die prospektive als auch für die retrospektive Reserve und erläutern Sie für beide Fälle die Aussage ${}_0 V_x = 0$.
7. Gewinnen Sie aus den in 2. aufgeführten Rekursionsformeln die bekannten Summenformeln für die Barwerte ${}_m B_x$, $m = 0, 1, \dots, n$.

Aufgabe 3 (insgesamt 36 Punkte)

Teil a) (10 Punkte)

Von Gerhard Mackenroth stammt der Satz: „Nun gilt der einfache und klare Satz, dass aller Sozialaufwand immer aus dem Volkseinkommen der laufenden Periode gedeckt werden muss ...“

Erläutern Sie, warum sich hieraus eine Fundamentalkritik an der kapitalgedeckten Alterssicherung ableiten lässt. Nehmen Sie auch Stellung zu dieser Fundamentalkritik!

Teil b) (11 Punkte)

Eine Pensionskasse hat einem Anlagevolumen von 10 Mio. €, das nach Aussagen des Vorstandes der Pensionskasse ausnahmslos „supersicher“ in festverzinslichen Wertpapieren und Schuldverschreibungen investiert ist.

Gleichwohl werden Sie beauftragt zu prüfen, ob tatsächlich die Kapitalanlagen „supersicher“ sind. Welche Daten/ Zusatzinformationen müssen Sie bei der Pensionskasse anfordern, um zu einer Risikoeinschätzung zu gelangen? Erläutern Sie jeweils, warum diese Daten/ Informationen relevant sind für die Risikobewertung.

Teil c) (6 + 9 Punkte)

Die Pensionskasse *PK* verwaltet einen Anwärterbestand. Die Bilanz habe folgende Struktur:

$P = 100$	$R = 10$
	$V = 90$

Die Deckungsrückstellungen werden mit einem Rechnungszins von 2,5% kalkuliert. Die derzeitige Asset-Allokation sieht eine Aktienquote von 5% vor, der Rest ist sicher angelegt zu einem festen Zins von 1,0%.

Die (vereinfachten) Solvabilitätsvorschriften verlangen freie unbelastete Mittel in Höhe von 4,5% der Deckungsrückstellung. Ferner wird ein Stresstest verlangt. Dieser fordert, dass auch bei einem simultanen Wertverlust von 10% auf Zinspapieren und von 40% auf Aktien noch hinreichend Eigenmittel vorhanden sind.

- c1) Prüfen Sie, ob unter den gegebenen Bedingungen die *PK* die Solvabilitätsanforderungen erfüllen kann. Berechnen Sie ggf. den zusätzlichen Eigenmittelbedarf. (Bei der Prüfung sollen nur die sicheren Kapitalerträge berücksichtigt werden!)
- c2) Der Arbeitgeber als Trägerunternehmen der *PK* ist bereit, die Kapitalkraft der *PK* zu stärken. Da der Arbeitgeber überzeugt ist, dass langfristig der Kapitalertrag aus Aktien deutlich höher sein wird, soll so viel Eigenkapital zugeschossen, dass sich die Pensionskasse eine Aktienquote von 30% „leisten“ kann. Wieviel Eigenkapital (ΔR) muss der Arbeitgeber mindestens zuschießen?

Zu c1) und c2): Bitte kommentieren Sie jeweils kurz Ihre Berechnungsschritte!

Aufgabe 4 (22 Punkte)

Charakterisieren Sie kurz folgende Finanzierungsverfahren für eine Versorgungseinrichtung:

- „laufende Einmalbeiträge“
- offenes Deckungsplanverfahren
- Abschnittsdeckungsverfahren

Gehen Sie dabei darauf ein, von welchen Arten von Einrichtungen die Verfahren jeweils typischerweise verwendet werden und aus welchen Gründen sie dort sinnvoll anwendbar sind. Gehen Sie außerdem darauf ein, inwieweit die Verfahren sich hinsichtlich der zu bildenden Reserve (bzw. der vorzuhaltenden Deckungsmittel) unterscheiden.

Aufgabe 5 (insgesamt 30 Punkte)

a) Der Jahresabschluss einer Pensionskasse weist folgende Positionen auf:

Position	Tsd. Euro
Verdiente Beiträge	440
Beiträge aus der RfB	20
Erträge aus Kapitalanlagen	250
Aufwendungen für Versicherungsfälle (davon Regulierung 4 Tsd. Euro)	244
Zuführung zur Deckungsrückstellung	400
Aufwendungen für den Versicherungsbetrieb	6
Aufwendungen für Kapitalanlagen	30
Rohüberschuss	30

Die Deckungsrückstellung zum Vorstichtag betrug 7.300 Tsd. Euro. Der Rechnungszins beträgt 3 %. Beiträge und Leistungen sind über das Jahr gleichmäßig verteilt. Als Inkassokosten sind 2 % der Bruttobeiträge kalkuliert, rechnungsmäßig steht 1 % der Leistungen für die Regulierung zur Verfügung.

Zerlegen Sie das Rohergebnis buchhalterisch nach Ergebnisquellen (Kapitalanlage, Risiko und Verwaltungskosten).

b) Bei der Überprüfung der Rechnungsgrundlagen einer Kasse stellen Sie fest, dass die erzielte Nettoverzinsung den Rechnungszins geringfügig übersteigt. Wie ist das möglich, wenn zugleich das Kapitalanlageergebnis in der buchhalterischen Zerlegung negativ ist?

c) Warum wirkt sich eine Übersterblichkeit der Rentner in der Regel positiv auf das Risikoergebnis aus?

Aufgabe 6 (insgesamt 20 Punkte)

Einer Ihrer Mandanten möchte eine betriebswirtschaftliche Analyse seiner betrieblichen Altersversorgung als Grundlage für eine mögliche Umgestaltung vornehmen. Sie verwenden das nachsteuerliche Modell, um die „Spur“ der betrieblichen Altersversorgung zu ermitteln.

- a)** Welche unmittelbaren und mittelbaren Wirkungen der betrieblichen Altersversorgung werden in dem Modell gemessen?

- b)** Erläutern Sie den Begriff der „Spur“ der betrieblichen Altersversorgung und stellen Sie dar, inwiefern die Berechnung der „Spur“ bei der Entscheidung über eine Umgestaltung der betrieblichen Altersversorgung hilfreich ist.

- c)** Welchen Einfluss hätte eine Änderung des Rechnungszinssatzes in § 6a EStG auf das Ergebnis Ihrer Analyse?

Lösungshinweise:

AUFGABE 1

1.

B_1 stellt den Erfüllungsbetrag einer Todesfallversicherung dar, bei der die Versicherungssumme 1 zum Ende des Jahres des Todes des Erstversterbenden des betrachteten Paares von Mann und Frau gezahlt wird. Denn auf $\{N \geq M\}$ (die Frau stirbt im oder nach dem Todesjahr des Mannes) ist $v^{\min(M,N)+1} = v^{M+1}$, nach $M + 1$ Jahren wird also die Versicherungssumme 1 fällig, d.h. zum Beginn der Versicherung ist der Betrag v^{M+1} erforderlich, und auf $\{N < M\}$ (der Mann stirbt nach dem Todesjahr der Frau) ist $v^{\min(M,N)+1} = v^{N+1}$, nach $N + 1$ Jahren wird also die Versicherungssumme 1 fällig, d.h. zum Beginn der Versicherung ist der Betrag v^{N+1} erforderlich. Infolgedessen ist der Erfüllungsbetrag der Versicherung $v^{\min(M,N)+1}$.

B_2 stellt den Erfüllungsbetrag einer jährlich im voraus zahlbaren Rente vom Betrag 1 dar, die solange zu zahlen ist solange beide, Mann und Frau, leben. Denn auf $\{N \geq M\}$ ist $\min(M, N)+1 = M+1$, d.h. $a_{\overline{\min(M,N)+1}|} = a_{\overline{M+1}|}$, und das ist der Erfüllungsbetrag einer jährlich im voraus bis zum Tod des Mannes zahlbaren Rente vom Betrag 1, analog auf $\{N < M\}$, worauf die Rente bis zum Tod der Frau läuft. Infolgedessen ist der Erfüllungsbetrag dieser Rente $a_{\overline{\min(M,N)+1}|}$.

B_3 stellt den Erfüllungsbetrag einer Anwartschaft auf eine lebenslänglich jährlich zu zahlenden Witwenrente ab Ende des Jahres des Todes des Mannes dar. Denn auf $\{N > M\}$ (die Frau stirbt nach dem Todesjahr des Mannes) setzt nach $M + 1$ Jahren eine jährlich zu zahlende Witwenrente ein, die also zum ersten Mal zum Beginn des Jahres bezahlt wird, das dem Todesjahr des Mannes folgt und ab da jährlich jeweils zum Beginn eines Jahres bezahlt wird, zum letzten Mal zum Beginn des Jahres des Todes der Frau. Es werden also $N - M$ Renten fällig, deren Barwert zum Beginn des Jahres, das dem Todesjahr des Mannes folgt, den Wert $a_{\overline{N-M}|} = \sum_{k=0}^{N-M-1} v^k$ hat. Infolgedessen ist der Erfüllungsbetrag der Anwartschaft zum Stichtag $v^{M+1} a_{\overline{N-M}|}$.

Auf $\{N \leq M\}$ ist $B = 0$, da keine Leistung fällig wird, wenn die Frau vor oder im Jahr des Todes des Mannes stirbt.

2.

$$\mathcal{E}B_1 = \sum_{m,n \geq 0} b_{mn}^{(1)} P\{M = m, N = n\}$$

mit $b_{mn}^{(1)}$, $m, n \geq 0$: Realisierungen von B_1 .

Es gilt:

$$\begin{aligned} b_{mn}^{(1)} = v^{\min(m,n)+1} &= v^{n+1} \quad \text{f. } n \leq m \\ &= v^{m+1} \quad \text{f. } n \geq m \end{aligned}$$

\implies

$$\begin{aligned} \mathcal{E}B_1 &= \sum_{m,n \geq 0} v^{\min(m,n)+1} P\{M = m, N = n\} \\ &= \sum_{m \geq n \geq 0} v^{\min(m,n)+1} P\{M = m, N = n\} + \sum_{n > m \geq 0} v^{\min(m,n)+1} P\{M = m, N = n\} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq n} v^{n+1} P\{M = m, N = n\} + \sum_{m \geq 0} \sum_{n > m} v^{m+1} P\{M = m, N = n\} \\ &= \sum_{n \geq 0} v^{n+1} \sum_{m \geq n} P\{M = m, N = n\} + \sum_{m \geq 0} v^{m+1} \sum_{n > m} P\{M = m, N = n\} \\ &= \sum_{k \geq 0} v^{k+1} P\{M \geq k, N = k\} + \sum_{k \geq 0} v^{k+1} P\{M = k, N > k\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}B_2 = \sum_{m,n \geq 0} b_{mn}^{(2)} P\{M = m, N = n\}$$

mit $b_{mn}^{(2)}$, $m, n \geq 0$: Realisierungen von B_2 .

Es gilt:

$$\begin{aligned} b_{mn}^{(2)} &= a_{\overline{\min(m,n)+1}} = a_{\overline{n+1}} \quad \text{f. } n \leq m \\ &= a_{\overline{m+1}} \quad \text{f. } n \geq m \end{aligned}$$

\implies

Damit analog zu \mathcal{EB}_1 :

$$\mathcal{EB}_2 = \sum_{k \geq 0} a_{\overline{k+1}} P\{M \geq k, N = k\} + \sum_{k \geq 0} a_{\overline{k+1}} P\{M = k, N > k\}$$

$$\mathcal{EB}_3 = \sum_{m,n \geq 0} b_{mn}^{(3)} P\{M = m, N = n\}$$

mit $b_{mn}^{(3)}, m, n \geq 0$: Realisierungen von B_3 .

Es gilt:

$$\begin{aligned} b_{mn}^{(3)} &= v^{m+1} a_{\overline{n-m}} \quad \text{f. } n > m \\ &= 0 \quad \text{f. } n \leq m \end{aligned}$$

\implies

$$\begin{aligned} \mathcal{EB}_3 &= \sum_{m \geq 0} \sum_{n > m} v^{m+1} a_{\overline{n-m}} P\{M = m, N = n\} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{m=0}^{n-1} v^{m+1} a_{\overline{n-m}} P\{M = m, N = n\} \quad \text{lt. Hinweis} \end{aligned}$$

3.

$$P\{M = m\} = P\{M < m + 1 | M \geq m\} P\{M \geq m\} = {}_m p_x^M q_{x+m}^M$$

mit

$${}_m p_x^M = \prod_{j=0}^{m-1} p_{x+j}^M = \prod_{j=0}^{m-1} (1 - q_{x+j}^M)$$

4.

$$P\{N \geq n\} = {}_n p_y^W$$

mit

$${}_n p_y^W = \prod_{j=0}^{n-1} p_{y+j}^W = \prod_{j=0}^{n-1} (1 - q_{y+j}^W)$$

5.

Es gilt laut 2, da M, N unabhängig:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}B_1 &= \sum_{k \geq 0} v^{k+1} P\{M \geq k, N = k\} + \sum_{k \geq 0} v^{k+1} P\{M = k, N > k\} \\
&= \sum_{k \geq 0} v^{k+1} \binom{M}{k} p_x^M \binom{W}{k} p_y^W \underbrace{q_{y+k}^W}_{1 - p_{y+k}^W} + \sum_{k \geq 0} v^{k+1} \binom{M}{k} p_x^M \underbrace{q_{x+k}^M}_{1 - p_{x+k}^M} \binom{W}{k+1} p_y^W \\
&= \sum_{k \geq 0} v^{k+1} \left(\binom{M}{k} p_x^M \binom{W}{k} p_y^W - \binom{M}{k} p_x^M \underbrace{\binom{W}{k} p_y^W p_{y+k}^W}_{k+1 p_y^W} \right) + \sum_{k \geq 0} v^{k+1} \left(\binom{M}{k} p_x^M \binom{W}{k+1} p_y^W - \underbrace{\binom{M}{k} p_x^M p_{x+k}^M}_{k+1 p_x^M} \binom{W}{k+1} p_y^W \right) \\
&= \sum_{k \geq 0} v^{k+1} \left(\binom{M}{k} p_x^M \binom{W}{k} p_y^W - \binom{M}{k} p_x^M \binom{W}{k+1} p_y^W + \binom{M}{k} p_x^M \binom{W}{k+1} p_y^W - \binom{M}{k+1} p_x^M \binom{W}{k+1} p_y^W \right) \\
&= \sum_{k \geq 0} v^{k+1} \left(\binom{M}{k} p_x^M \binom{W}{k} p_y^W - \binom{M}{k+1} p_x^M \binom{W}{k+1} p_y^W \right),
\end{aligned}$$

die klassische Darstellung für A_{xy} .

6.

Es gilt laut 2:

$$\mathcal{EB}_2 = \sum_{m \geq 0} a_{\overline{m+1}} P\{M \geq m, N = m\} + \sum_{m \geq 0} a_{\overline{m+1}} P\{M = m, N > m\}$$

damit analog zur Berechnung von \mathcal{EB}_1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{EB}_2 &= \sum_{m \geq 0} a_{\overline{m+1}} ({}_m p_x^M {}_m p_y^W - {}_{m+1} p_x^M {}_{m+1} p_y^W) \\ &= \sum_{m \geq 0} \sum_{k=0}^m v^k ({}_m p_x^M {}_m p_y^W - {}_{m+1} p_x^M {}_{m+1} p_y^W) \\ &= \sum_{k \geq 0} v^k \left(\sum_{m \geq k} {}_m p_x^M {}_m p_y^W - \underbrace{\sum_{m \geq k} {}_{m+1} p_x^M {}_{m+1} p_y^W}_{\sum_{m \geq k+1} {}_m p_x^M {}_m p_y^W} \right) \quad \text{lt. Hinweis} \\ &= \sum_{k \geq 0} v^k {}_k p_x^M {}_k p_y^W, \text{ die klassische Darstellung f\u00fcr } a_{xy}. \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}B_3 &= \sum_{m \geq 0} \sum_{n > m} v^{m+1} a_{\overline{n-m}} P\{N = n\} P\{M = m\}, \text{ da } M, N \text{ unabhängig} \\ &= \sum_{m \geq 0} v^{m+1} \left(\sum_{n > m} a_{\overline{n-m}} P\{N = n\} \right) P\{M = m\} \end{aligned}$$

Nun:

$$\begin{aligned} \sum_{n > m} a_{\overline{n-m}} P\{N = n\} &= \sum_{n > m} \sum_{k=0}^{n-m-1} v^k P\{N = n\} \\ &= \sum_{k \geq 0} v^k \underbrace{\sum_{n \geq m+k+1} P\{N = n\}}_{P\{N \geq m+k+1\}} && \text{lt. Hinweis} \\ P\{N \geq m+k+1\} &= {}_{m+k+1}p_y^W = {}_{m+1}p_y^W {}_k p_{y+m+1}^W \\ &= {}_{m+1}p_y^W \sum_{k \geq 0} v^k {}_k p_{y+m+1}^W \\ &= {}_{m+1}p_y^W a_{y+m+1}^W \end{aligned}$$

\implies

$$\mathcal{E}B_3 = \sum_{m \geq 0} v^{m+1} {}_m p_x^M q_{x+m}^M {}_{m+1} p_y^W a_{y+m+1}^W$$

8.

Auf $\{N > M\}$ gilt:

$$\begin{aligned} B_3 = v^{M+1} a_{\overline{N-M}} &= v^{M+1} \sum_{k=0}^{N-M-1} v^k \\ &= \sum_{k=M+1}^N v^k \\ &= \sum_{k=0}^N v^k - \sum_{k=0}^M v^k \\ &= a_{\overline{N+1}} - a_{\overline{M+1}} \end{aligned}$$

Da auf $\{N \leq M\}$ $B_3 = 0$ gilt, lässt sich B_3 darstellen gemäß

$$\begin{aligned}
B_3 &= a_{\overline{N+1}|} - \min \left(a_{\overline{N+1}|}, a_{\overline{M+1}|} \right) \\
&= a_{\overline{N+1}|} - a_{\overline{\min(M,N)+1}|}
\end{aligned}$$

\implies

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}B_3 &= \mathcal{E}a_{\overline{N+1}|} - \mathcal{E}a_{\overline{\min(M,N)+1}|} \\
&= a_y - a_{xy}
\end{aligned}$$

9.

Auf $\{N > M\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
B_3 = v^{M+1} a_{\overline{N-M}|} &= v^{M+1} \sum_{k=0}^{N-M-1} v^k \\
&= v^{M+1} \frac{1 - v^{N-M}}{1 - v} \\
&= \frac{1}{d} (v^{M+1} - v^{N+1})
\end{aligned}$$

Da auf $\{N \leq M\}$ $B_3 = 0$ gilt, lässt sich B_3 darstellen gemäß

$$B_3 = \frac{1}{d} (v^{\min(M,N)+1} - v^{N+1})$$

\implies

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}B_3 &= \frac{1}{d} (\mathcal{E}v^{\min(M,N)+1} - \mathcal{E}v^{N+1}) \\
&= \frac{1}{d} (A_{xy} - A_y)
\end{aligned}$$

AUFGABE 2

Lösung:

1.

Versicherungsmathematische Bilanzgleichungen:

$${}_mV_x + {}_m\hat{P}_x = {}_m\hat{L}_x + v p_{x+m} {}_{m+1}V_x, \quad m = 0, 1, \dots, n-1$$

Die Bedeutung der einzelnen Terme:

${}_m\hat{L}_x$ = Erwartungswert der gesamten Leistung, die durch Erreichen des Altersintervalls $]x + m, x + m + 1]$ in der Hauptgesamtheit ausgelöst werden kann, diskontiert auf den Beginn dieses Jahres ($m = 0, 1, \dots, n$)

${}_m\hat{P}_x$ = Erwartungswert der Prämienleistungen des Jahres $]m, m + 1]$, die durch Erreichen des Alters $x + m$ in der Hauptgesamtheit verursacht werden, diskontiert auf den Beginn des Jahres ($m = 0, 1, \dots, n - 1$)

${}_mV_x$ = Versicherungsmathematische Reserve nach m Jahren (vor Einzahlung der Prämie des $(m + 1)$ -ten Jahres) ($m = 0, 1, \dots, n$)

p_u = Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters $u \in \mathbb{N}_0$, das Alter $u + 1$ als interner Anwärter zu erreichen (einjährige Bestandsverbleibewahrscheinlichkeit) ($u = x, x + 1, \dots, x + n - 1$)

v = Abzinsungsfaktor eines Jahres

2.

Einmalprämie mit ${}_0V_x = 0 : {}_0\hat{P}_x = {}_0B_x, {}_m\hat{P}_x = 0$ für $m = 1, 2, \dots, n - 1$

Es folgt für $m = 0$: ${}_0V_x + {}_0\hat{P}_x = {}_0B_x = {}_0\hat{L}_x + v p_{x+1}V_x = {}_0\hat{L}_x + v p_{x+1}B_x$

Es folgt für $m > 0$: ${}_mB_x = {}_mV_x \Rightarrow {}_mB_x = {}_m\hat{L}_x + v p_{x+m} {}_{m+1}B_x$

3.

$$p_u = 1 - s_u - \hat{i}_u - \hat{q}_u^{aa} \quad , \quad u = x, x + 1, \dots, x + n - 1$$

4.

$$p_u = \mathbb{P}\{X_1 > u + 1, X_2 > u + 1, X_3 > u + 1 | X_1 > u, X_2 > u, X_3 > u\}$$

$$s_u = \mathbb{P}\{X_1 \leq \min(u + 1, X_2, X_3) | X_1 > u, X_2 > u, X_3 > u\}$$

$$\hat{i}_u = \mathbb{P}\{X_2 \leq u + 1, X_2 < X_1, X_2 \leq X_3 | X_1 > u, X_2 > u, X_3 > u\}$$

$$\hat{q}_u^{aa} = \mathbb{P}\{X_3 < \min(u + 1, X_1, X_2) | X_1 > u, X_2 > u, X_3 > u\}$$

5.

Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x , innerhalb eines Jahres invalide zu werden und noch im gleichen Jahr - als Invaliden - zu sterben.

Versicherungsmathematische Notation: q_x^{ai}

6.

${}_0V_x^{retro}$: Anfangskapital $\Rightarrow {}_0V_x^{retro} = 0$: kein Anfangskapital

${}_0V_x^{pro}$: der Betrag, der zu Beginn des Vertrages vorhanden sein muss, damit die Verpflichtungen rechnermäßig erfüllt werden können.

$\Rightarrow {}_0V_x^{pro} = 0 = {}_0B_x - {}_0B_x^P \Rightarrow {}_0B_x = {}_0B_x^P$: Individuelles Äquivalenzprinzip.

7.

$$\begin{aligned} {}_nB_x &= {}_n\hat{L}_x \\ {}_{n-1}B_x &= {}_{n-1}\hat{L}_x + v p_{x+n-1} {}_nB_x = {}_{n-1}\hat{L}_x + v p_{x+n-1} {}_n\hat{L}_x \\ {}_{n-2}B_x &= {}_{n-2}\hat{L}_x + v p_{x+n-2} {}_{n-1}B_x = {}_{n-2}\hat{L}_x + v p_{x+n-2} {}_{n-1}\hat{L}_x + v^2 {}_2p_{x+n-2} {}_n\hat{L}_x \end{aligned}$$

Beh.:

$${}_mB_x = \sum_{k=0}^{n-m} v^k {}_k p_{x+m} {}_{m+k}\hat{L}_x$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Annahme:

$${}_{m+1}B_x = \sum_{k=0}^{n-m-1} v^k {}_k p_{x+m+1} {}_{m+k+1} \hat{L}_x$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} {}_m B_x &= {}_m \hat{L}_x + v {}_p_{x+m} {}_{m+1} B_x \\ &= {}_m \hat{L}_x + v {}_p_{x+m} \sum_{k=0}^{n-m-1} v^k {}_k p_{x+m+1} {}_{m+k+1} \hat{L}_x \\ &= {}_m \hat{L}_x + \sum_{k=0}^{n-m-1} v^{k+1} {}_{k+1} p_{x+m} {}_{m+k+1} \hat{L}_x \\ &= {}_m \hat{L}_x + \sum_{k=1}^{n-m} v^k {}_k p_{x+m} {}_{m+k} \hat{L}_x \\ &= \sum_{k=0}^{n-m} v^k {}_k p_{x+m} {}_{m+k} \hat{L}_x \quad , \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

zu Teil a)

Das erwähnte Zitat von Gerhard Mackenroth fährt fort:

„... . Es gibt keine andere Quelle und hat nie eine andere Quelle gegeben, aus der der Sozialaufwand fließen könnte, es gibt keine Ansammlung von Fonds, keine Übertragung von Einkommensteilen von Periode zu Periode, kein Sparen im privatwirtschaftlichen Sinne, es gibt einfach gar nichts anderes als das laufende Volkseinkommen als Quelle für den Sozialaufwand.“

Hierin kommt also zum Ausdruck, dass aus volkswirtschaftlicher Sicht das Vorhandensein eines Geldvermögens alleine keinen Sozialaufwand, also insbesondere keine Altersversorgung sicherstellen kann. Abgesehen vielleicht von Immobilien kann man nämlich real keine nutzbaren Güter langfristig ansparen.

Drei Aspekte sollten jedoch im Hinblick auf die Mackenrothsche These beachtet werden:

1. In der vorliegenden Fassung unterstellt die These eine geschlossene Volkswirtschaft. Tatsächlich ist es jedoch denkbar, dass ein Kapitalvermögen genutzt werden kann, um am Volkseinkommen anderer Volkswirtschaften zu partizipieren. Ob dies allerdings eine sinnvolle Strategie sein kann, muss dahingestellt bleiben.
2. Durch erhöhte Sparanstrengungen kann die Investition in eine Volkswirtschaft gestärkt werden. Hierdurch steigt langfristig das Produktionspotenzial und somit besteht die Erwartung das heutiges Sparen einen positiven Einfluss auf das zukünftige Sozialprodukt hat.
3. Unabhängig davon, ob insgesamt die volkswirtschaftlich Sparneigung steigt, bedeutet der Aufbau eines Versorgungskapitals für den einzelnen, dass er in der Zukunft über ein Geldvermögen verfügt, das er nutzen kann, um am Volkseinkommen (bzw. dem Sozialprodukt) zu partizipieren.

zu Teil b)

Fünf Kernrisiken der Kapitalanlagen sind

- Marktrisiko
- Kreditrisiko
- Konzentrationsrisiko
- Liquiditätsrisiko
- Rechtsrisiko.

Diese Risiken sind sämtlich auch bei sogenannten festverzinslichen Wertpapieren zu beachten. Die Aussage des Vorstandes der Pensionskasse ist also kritisch zu prüfen, denn es ist nicht auszuschließen, dass er meint, dass ein festes Zinsversprechen a priori „supersicher“ ist. Die wesentlichen Informationen, die man für die Beurteilung der Risiken des Portfolios benötigt sind:

1. Laufzeit bzw. Fälligkeitsstruktur: Je länger die Restlaufzeit eines festverzinslichen Wertpapiers, desto größer sind die Verluste, die bei einer Zinserhöhung eintreten können. Die Fälligkeitsstruktur erlaubt auch eine Prüfung, ob die passivischen Cashflows bedient werden können (Liquiditätsrisiko). Schließlich kann aus der Fälligkeitsstruktur abgelesen

werden, ob ggf. auch ein substanzielles Wiederanlagerisiko besteht, wenn nämlich zu bestimmten Zeiten sehr viele Papiere fällig sind und somit möglicherweise in einer Niedrigzinsphase erheblich Mittel anlegt werden müssen.

2. Informationen über den Schuldner der Wertpapiere bzw. über dessen Rating: Hieran kann abgeschätzt werden. Unternehmensanleihen unterliegen in der Regel einem größeren Ausfallrisiko als Bankschuldverschreibung oder als Pfandbriefe oder als Staatsanleihen. Gerade ein Konjunkturunbruch mit steigenden Unternehmensinsolvenzen kann ggf. das Portfolio substanziell treffen. (Zeitwert-) Verlust ergeben sich bereits, wenn nur das Rating herabgestuft wird. Schließlich können auch ohne eine Herabstufung des Ratings Unternehmensanleihen an Wert verlieren, wenn allgemein die Risikobereitschaft im Markt sinkt.

Informationen über den Schuldner sind auch wichtig, um zu prüfen, ob ggf. ein Konzentrationsrisiko besteht.

In aller Regel hilft die Kenntnis der Schuldnerstruktur auch abzuschätzen, wie liquide die einzelnen festverzinslichen Wertpapiere sind. Große Schuldner, die regelmäßig sich am Kapitalmarkt durch Emission von Anleihen refinanzieren (insbesondere Banken und Staaten) deuten darauf hin, dass die entsprechenden Papiere relativ liquide sind, d.h. auch vorzeitig verkauft werden können.

4. Anlagen in Fremdwährungen. Sind die Verpflichtungen der Pensionskasse in Euro, so sind auch sichere Anlagen in fremder Währung u.U. sehr risikoreich!

3. Weitere Informationen könnten beispielsweise von Bedeutung sein: Handelt es sich um „normale“ Kuponanleihen oder Standard-Schuldverschreibungen oder sehen die Wertpapiere Sonderrechte vor, wie beispielsweise ein vorzeitiges einseitiges Kündigungsrecht des Schuldners. Bei „exotischen“ Verträgen sollte selbstverständlich ein Rechtsexperte hinzugezogen werden, der auch die Rechtsrisiken solcher Verträge beurteilen kann.

zu Teil c1)

Bei der gegebenen Asset-Allokation beträgt der Wert des Portfolios nach Stress:

$$\begin{aligned} P_{Stress} &= 100(\alpha \cdot 0,6 + (1 - \alpha) \cdot 0,9 \cdot (1 + i_{sicher})) \\ &= 100(0,05 \cdot 0,6 + 0,95 \cdot 0,9 \cdot 1,01) = 89,355 \end{aligned}$$

Hierbei haben wir eingesetzt: $\alpha = 0,05$ und $i_{sicher} = 1,0\%$.

Unter Berücksichtigung der Garantieverzinsung ($i_{gar} = 2,5\%$) und der Solvamarge ($s = 4,5\%$) ergibt als Kapitalbedarf:

$$K = 90 \cdot (1 + i_{gar})(1 + s) = 90 \cdot 1,025 \cdot 1,045 = 96,40125.$$

Es besteht also ein Fehlbetrag von 7,04625.

Hinweis zur Lösung: Man gelangt zu einem etwas höheren Fehlbetrag, wenn man berücksichtigt, dass die zugeführten Eigenmittel, auch wenn sie vollständig sicher angelegt werden, wiederum einem 90%-Anlagestress zu unterworfen sind. Wenn man dies auch noch berücksichtigt, so müssten $7,04625 / 0,9 \approx 7,83$ zugeführt werden. Diese Zusatzüberlegung wurde nicht verlangt.

zu Teil c2)

Wir bezeichnen mit ΔR die erforderliche Auffüllung mit Eigenmitteln, dann muss gelten:

$$\begin{aligned} P_{Stress, \Delta R} &= (100 + \Delta R)(\alpha \cdot 0,6 + (1 - \alpha) \cdot 1,01 \cdot 0,9) \\ &= (100 + \Delta R)(0,18 + 0,6363) = 81,63 + 0,8163 \Delta R \end{aligned}$$

Hierbei haben wir $\alpha = 0,3$ gesetzt.

Dies muss den erforderlichen Kapitalbedarf decken, also muss gelten:

$$\begin{aligned} P_{Stress, \Delta R} &\geq K \\ \Leftrightarrow 81,63 + 0,8163 \Delta R &\geq 96,40125 \\ \Leftrightarrow \Delta R &\geq 18,0954 \end{aligned}$$

Der Arbeitgeber müsste also rund 18,1 an Eigenkapital zufügen.

Aufgabe 4

„laufende Einmalbeiträge“: Jeder einzelne Beitrag wird technisch als Einmalprämie in einem kapitalgedeckten System behandelt. Dazu wird er versicherungsmathematisch äquivalent in eine Leistung umgerechnet. Die Deckungsrückstellung entspricht dem Barwert der Leistungen aus bereits geleisteten Einmalprämien. Das Verfahren findet vor allem bei Pensionskassen Anwendung, häufig zur Finanzierung von Versorgungszusagen aus Entgeltumwandlung. Dies insbesondere, da aufgrund der grundsätzlich freiwilligen Beitragszahlung nicht von einem gleichbleibenden Beitragseingang ausgegangen werden kann. Häufig wird jedoch für alle Beiträge eines Versicherten der selbe Tarif verwendet, selbst wenn für Neuversicherungen zwischenzeitlich abweichende Tarife gelten.

„offenes Deckungsplanverfahren“: Auch hier erfolgt eine Kapitaldeckung der Verpflichtungen, jedoch im Kollektiv aller Versicherten und Einbeziehung des künftig zu erwartenden Neuzugangs. Letzteres führt i.d.R. zu einer Reduzierung der erforderlichen Deckungsmittel und kann auch als Umlageelement in der Finanzierung interpretiert werden. Angewendet wird das Verfahren vor allem bei berufsständischen Versorgungswerken, die von einem gesetzlich garantierten Zugang an Versicherten ausgehen können, da für die Angehörigen des jeweiligen Berufs Versicherungspflicht besteht.

„Abschnittsdeckungsverfahren“: Bei diesem Verfahren werden die Leistungen im Umlageverfahren finanziert. Eine Ansammlung von Deckungsmitteln ergibt sich allein daraus, dass der Bedarf an Umlagen nicht Jahr für Jahr anhand der zu erwartenden Ausgaben ermittelt, sondern über einen mehrjährigen Zeitraum und mit einem gewissen Sicherheitspuffer (Mindestrücklage) festgestellt wird. Das Verfahren findet bei Zusatzversorgungskassen des öffentlichen Dienstes Anwendung, die ebenfalls eine Pflichtversicherung betreiben und daher davon ausgehen dürfen, dass auch zukünftig Umlagezahler vorhanden sein werden.

Aufgabe 5

a)

Ergebnis aus Kapitalanlagen

+	Kapitalerträge	250
-	Aufwendungen für Kapitalanlagen	- 30
-	rechnungsmäßige Verzinsung (7.300 + 7.300 + 400) / 2 x 3%	- 225
=		<hr/> - 5

Ergebnis aus Verwaltungskosten

+	rechnungsmäßige Kosten 440 x 2% + 240 x 1%	11,2
-	Aufwendungen für Versicherungsbetrieb	- 6
-	Regulierungsaufwendungen	- 4
=		<hr/> + 1,2

Risikoergebnis

+	Beitragseinnahmen	440
+	Beiträge aus der RfB	20
+	rechnungsmäßige Verzinsung	225
-	Leistungszahlungen	- 240
-	rechnungsmäßige Kosten	- 11,2
-	Zuführung zur Deckungsrückstellung	- 400
=		<hr/> + 33,8

Gesamtergebnis

+ 30

b)

Der Rechnungszins entspricht der erforderlichen Verzinsung der Deckungsrückstellung, die Nettoverzinsung bezieht sich jedoch auf den mittleren Bestand an Kapitalanlagen. In der beschriebenen Situation ist dieser daher wohl geringer als die mittlere Deckungsrückstellung. Dies kann z.B. auf einem hohen Bestand an liquiden Mitteln oder anderen Aktiva, die nicht den Kapitalanlagen zugerechnet werden, beruhen.

c)

Bei Übersterblichkeit wird mehr Deckungsrückstellung frei als erwartet. Die Deckungsrückstellung fällt niedriger aus, als dies aufgrund der Beitrags- und Leistungszahlungen sowie der rechnermäßigen Verzinsung zu erwarten wäre. Im Risikoergebnis wird gerade die erwartete Veränderung der Deckungsrückstellung der tatsächlichen gegenübergestellt, weshalb dieses verbessert wird.

Aufgabe 6

a)

Die unmittelbaren Wirkungen betreffen die zahlungswirksamen Effekte aus Beiträgen, Versorgungsleistungen, Verwaltungskosten, PSV-Beiträgen und unbare Erfolgswirkungen wie die Rückstellungsveränderung.

Mittelbare Wirkungen sind die Auswirkungen auf Steuerzahlungen sowie die nachsteuerlichen Zinsen auf verdrängtes oder zusätzliches Fremdkapital.

b)

Unter der Spur der betrieblichen Altersversorgung versteht man die kumulierte Liquidität nach Erfüllung aller Verpflichtungen gegenüber einer Zugangsgeneration von Berechtigten. Die Spur kann etwa für verschiedene denkbar Gestaltungen einer Versorgungszusage ermittelt werden und ermöglicht so einen unmittelbaren Vergleich der gesamten wirtschaftlichen Auswirkungen der Gestaltungsoptionen für das Unternehmen. Das Modell unterstellt allerdings gleichbleibende Rahmenbedingungen für bAV und berücksichtigt nicht die abstrakten (z.B. personalpolitischen) Zielsetzungen.

c)

Der Rechnungszinssatz nach § 6a EStG beeinflusst den Umfang der steuerlichen Anerkennung von Pensionsverpflichtungen bei Innenfinanzierung. Soweit also Direktzusagen betrachtet werden, würde eine Absenkung dieses Rechnungszinssatzes die steuerlich abzugsfähigen Zuführungen in den früheren Jahren erhöhen und somit tendenziell die Liquiditätswirkungen - und damit die Spur - vermindern.