

AUFGABE 1 (30 Punkte)

Ein Unternehmen hat für seine Mitarbeiter eine Versorgungsordnung, gemäß der jeder Mitarbeiter, falls er vor Erreichen der Altersgrenze invalide wird, ab Eintritt der Invalidität eine lebenslänglich laufende jährlich vorschüssig zahlbare Invalidenrente erhält. Die Höhe der Invalidenrente beträgt pro vollendetem Dienstjahr bis zum Eintritt der Invalidität $p\%$ des letzten Gehalts des Mitarbeiters. Bei vorzeitigem Tod sowie bei Erreichen der Altersgrenze als Aktiver verfällt der Anspruch.

Es seien auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ für einen aktiven Mitarbeiter des Alters x die folgenden Zufallsgrößen definiert:

$M : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$: Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Eintritt der Invalidität

$N : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$: Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Eintritt des Todes

Ferner sei

$k \in \mathbb{N} :=$ Anzahl der vollendeten Jahre bis zur Altersgrenze.

1. Geben Sie eine vollständige Zerlegung von Ω in 6 disjunkte Ereignisse an, die sich durch Kombination der Größenrelationen der Größen M , N und k ergeben, und geben Sie für diese Ereignisse die Renten R an, die sich bei Eintreffen dieser Ereignisse ergeben. Fangen Sie mit der Kombination $\{M < N \leq k\}$ an.

2. Geben Sie im Modell einer Aktivengesamtheit mit den vorzeitigen Ausscheideursachen Invalidität und Tod (z.B. das Modell der Richttafeln) den Erfüllungsbetrag B dieser Verpflichtung an.

3. Geben Sie die Menge der Realisierungen b_{mn} , $m, n \geq 0$, dieses Erfüllungsbetrages an und stellen Sie mit diesem Ergebnis den Erfüllungsbetrag in kanonischer Form dar, d.h. als $\sum_{m,n \geq 0} b_{mn} 1_{\{M=m, N=n\}}$.

4. Leiten Sie aus 3. den Erwartungswert $\mathcal{E}B$ des Erfüllungsbetrags B ab.

5. Zeigen Sie, dass für $m < k$, $n > m$ und $P\{M = m, N > m\} > 0$ gilt:

$$P\{M = m, N = n\} = P\{N = n | M = m, N > m\} P\{M = m, N > m\}.$$

6. Zeigen Sie, dass für $k > m$ gilt:

$$P\{M = m, N > m\} = {}_m p_x^a p_{x+m}^{ai}.$$

(Hinweis: Drücken Sie ${}_m p_x^a$ und p_{x+m}^{ai} durch die Zufallsgrößen M und N aus!)

7. Man kann zeigen, dass für $m < k$, $n > m$ und $P\{M = m, N > m\} > 0$ gilt:

$$P\{N = n | M = m, N > m\} = {}_{n-m-1} p_{x+m+1}^i q_{x+n}^i.$$

Stellen Sie damit \mathcal{EB} in versicherungsmathematischer Notation dar.

8. Geben Sie den Barwert a_x^{ai} in der im Repetitorium behandelten allgemeinen Darstellung des Barwerts an, und interpretieren Sie den Unterschied dieser Darstellung zur Darstellung nach Teilaufgabe 7.

AUFGABE 1 (30 Punkte)

Lösung:

1.

Sei x das Alter des Mitarbeiters bei Eintritt in das Unternehmen und bezeichne G sein letztes Gehalt. Sei der Prozentsatz p der Aufgabe auf $0,01 p$ gesetzt.

Dann gilt:

<u>Zerlegung von Ω</u>	<u>Rentenanspruch</u>
$A_1 := \{M < N \leq k\}$:	$M p G$
$A_2 := \{M < k < N\}$:	$M p G$
$A_3 := \{N \leq M < k\}$:	0
$A_4 := \{N \leq k \leq M\}$:	0
$A_5 := \{k \leq M < N\}$:	0
$A_6 := \{k < N \leq M\}$:	0

Bem.: Es gilt

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{für } i \neq j, 1 \leq i, j \leq 6$$

und

$$\bigcup_{i=1}^6 A_i = \Omega.$$

Die A_i , $i = 1, \dots, 6$ stellen also eine vollständige Zerlegung von Ω dar.

2.

$$B = v^{M+1} \mathbb{M} \mathbb{P} \mathbb{G} \frac{1}{a_{N-M}} \mathbb{1}_{\{M < \min(N, k)\}}$$

3.

$$\begin{aligned} b_{mn} &= v^{m+1} \mathbb{m} \mathbb{P} \mathbb{G} \frac{1}{a_{n-m}} && \text{für } m < \min(n, k) \\ &= 0 && \text{sonst} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow B &= \sum_{m, n \geq 0} b_{mn} \mathbb{1}_{\{M=m, N=n\}} \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n>m} v^{m+1} \mathbb{m} \mathbb{P} \mathbb{G} \frac{1}{a_{n-m}} \mathbb{1}_{\{M=m, N=n\}} \\ &= \mathbb{P} \mathbb{G} \sum_{m=0}^{k-1} \mathbb{m} \sum_{n>m} v^{m+1} \frac{1}{a_{n-m}} \mathbb{1}_{\{M=m, N=n\}} \end{aligned}$$

4.

$$\mathcal{E}B = \mathbb{P} \mathbb{G} \sum_{m=0}^{k-1} \mathbb{m} \sum_{n>m} v^{m+1} \frac{1}{a_{n-m}} P\{M = m, N = n\}$$

5.

$$\begin{aligned} P\{M = m, N = n\} &= P\{M = m, N = n, N > m\}, \\ &\text{da } \{N = n\} \subset \{N > m\} \text{ für } m < n \\ &= P\{N = n \mid M = m, N > m\} P\{M = m, N > m\} \end{aligned}$$

6.

$${}_m p_x^a = P\{M \geq m, N \geq m\}$$

$$p_{x+m}^{ai} = P\{M = m, N > m \mid M \geq m, N \geq m\}$$

$$\begin{aligned} {}_m p_x^a p_{x+m}^{ai} &= P\{M = m, N > m \mid M \geq m, N \geq m\} P\{M \geq m, N \geq m\} \\ &= P\{M = m, N > m, M \geq m, N \geq m\} \\ &= P\{M = m, N > m\}, \text{ da } \{M = m\} \subset \{M \geq m\} \text{ und } \{N > m\} \subset \{N \geq m\} \end{aligned}$$

7.

Da für $m < \min(n, k)$ gilt:

$$P\{M = m, N = n\} = {}_m p_x^a p_{x+m}^{ai} {}_{n-m-1} p_{x+m+1}^i q_{x+n}^i$$

folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}B &= \text{p G} \sum_{m=0}^{k-1} m \sum_{n>m} v^{m+1} a_{n-m} \cdot {}_m p_x^a p_{x+m}^{ai} {}_{n-m-1} p_{x+m+1}^i q_{x+n}^i \\ &= \text{p G} \sum_{m=0}^{k-1} m v^{m+1} {}_m p_x^a p_{x+m}^{ai} \sum_{n>m} a_{n-m} {}_{n-m-1} p_{x+m+1}^i q_{x+n}^i \\ &= \text{p G} \sum_{m=0}^{k-1} m v^{m+1} {}_m p_x^a p_{x+m}^{ai} \sum_{n \geq 0} a_{n+1} {}_n p_{x+m+1}^i q_{x+m+n+1}^i \end{aligned}$$

8.

$$a_x^{ai} = \sum_{m=0}^{k-1} v^{m+1} p_x^a p_{x+m}^{ai} a_{x+m+1}^i$$

Von m abgesehen, zeigt ein Vergleich von 7. und 8., dass offenbar gilt:

$$a_{x+m+1}^i = \sum_{n \geq 0} a_{n+1} \cdot n p_{x+m+1}^i q_{x+m+n+1}^i$$

bzw. $a_x^i = \sum_{n \geq 0} a_{n+1} \cdot n p_x^i q_{x+n}^i,$

wie die folgende Betrachtung - auf Barwertebene - beweist:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a_{n+1} \cdot n p_x^i q_{x+n}^i &= \sum_{n \geq 0} a_{n+1} \cdot n p_x^i (1 - p_{x+n}^i) \\ &= \sum_{n \geq 0} a_{n+1} \cdot n p_x^i - \underbrace{\sum_{n \geq 0} a_{n+1} \cdot n+1 p_x^i}_{\sum_{n \geq 1} a_n \cdot n p_x^i} \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} \underbrace{(a_{n+1} - a_n)}_{v^n} \cdot n p_x^i \\ &= \sum_{n \geq 0} v^n \cdot n p_x^i \end{aligned}$$

AUFGABE 2 (30 Punkte)

Bekanntlich setzt sich die Gesamtheit der Aktiven aus der Gesamtheit der internen und der Gesamtheit der externen Anwärter zusammen. Seien

- q_x^{Iaa} : Wahrscheinlichkeit eines x -jährigen internen Anwärters, innerhalb eines Jahres als Aktiver zu sterben
- q_x^{Eaa} : Wahrscheinlichkeit eines x -jährigen externen Anwärters, innerhalb eines Jahres als Aktiver zu sterben
- q_x^{aa} : Wahrscheinlichkeit eines x -jährigen Aktiven, innerhalb eines Jahres als Aktiver zu sterben

1. Definieren Sie mit Hilfe der im Repetitorium behandelten stetigen Zufallsgrößen

$$\begin{aligned}X_1 &:= \text{Alter bei Eintritt der Fluktuation} \\X_2 &:= \text{Alter bei Eintritt der Invalidität} \\X_3 &:= \text{Alter bei Eintritt des Todes}\end{aligned}$$

diese Wahrscheinlichkeiten.

2. Stellen Sie in versicherungsmathematischer Schreibweise q_x^{aa} als gewichtete Summe der q_x^{Iaa} und q_x^{Eaa} dar. Benutzen Sie dabei neben den ihnen schon bereits bekannten Größen zusätzlich die Wahrscheinlichkeit, das Alter x als interner Anwärter zu erreichen, gemäß:

$$\hat{l}_x^{aa} := P\{X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}.$$

3. Treffen Sie eine Aussage über q_x^{Iaa} für den Fall, dass q_x^{aa} und q_x^{Eaa} übereinstimmen.

4. Stellen Sie mit Hilfe der oben aufgeführten Zufallsgrößen X_1 , X_2 und X_3 die Wahrscheinlichkeiten

- \hat{q}_x^{aa} : Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alter x , innerhalb eines Jahres als interner Anwärter zu sterben
- \hat{q}_x^{as} : Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alter x , innerhalb eines Jahres durch Fluktuation auszusteigen und noch innerhalb des gleichen Jahres als externer Anwärter zu sterben

dar.

5. Zeigen Sie, dass gilt:

$$q_x^{Iaa} = \hat{q}_x^{aa} + \hat{q}_x^{as}.$$

6. Stellen Sie unter der Voraussetzung, dass q_x^{aa} und q_x^{Eaa} übereinstimmen, in Anwendung der Richttafel-Methode und unter Benutzung der Wahrscheinlichkeiten der Richttafeln sowie zusätzlich der Wahrscheinlichkeit

s_x : Wahrscheinlichkeit eines x -jährigen internen Anwärters, innerhalb eines Jahres durch Fluktuation aus der Gesamtheit der internen Anwärter auszuscheiden

die Wahrscheinlichkeit \hat{q}_x^{aa} so dar, dass nur noch einjährige Ausscheidewahrscheinlichkeiten, abhängig von $x \in \mathbb{N}_0$, im Ergebnis vorkommen.

AUFGABE 2 (30 Punkte)

Lösung:

1.

$$q_x^{Iaa} = \mathbb{P}\{X_3 < \min(x+1, X_2) | X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}$$

$$q_x^{Eaa} = \mathbb{P}\{X_3 < \min(x+1, X_2) | X_1 \leq x, X_2 > x, X_3 > x\}$$

$$q_x^{aa} = \mathbb{P}\{X_3 < \min(x+1, X_2) | X_2 > x, X_3 > x\}$$

2.

$$q_x^{aa} = \underbrace{\mathbb{P}\{X_3 < \min(x+1, X_2) | X_2 > x, X_3 > x, X_1 > x\}}_{q_x^{Iaa}} \mathbb{P}\{X_1 > x | X_2 > x, X_3 > x\}$$

$$+ \underbrace{\mathbb{P}\{X_3 < \min(x+1, X_2) | X_2 > x, X_3 > x, X_1 \leq x\}}_{q_x^{Eaa}} \mathbb{P}\{X_1 \leq x | X_2 > x, X_3 > x\}$$

$$= q_x^{Iaa} \mathbb{P}\{X_1 > x | X_2 > x, X_3 > x\} + q_x^{Eaa} \mathbb{P}\{X_1 \leq x | X_2 > x, X_3 > x\}$$

$$= \frac{\hat{l}_x^{aa}}{l_x^{aa}} q_x^{Iaa} + \frac{l_x^{aa} - \hat{l}_x^{aa}}{l_x^{aa}} q_x^{Eaa}$$

3.

$$q_x^{aa} = q_x^{Eaa}$$

\Rightarrow

$$q_x^{Iaa} = \frac{q_x^{aa}(1 - \mathbb{P}\{X_1 \leq x | X_2 > x, X_3 > x\})}{\mathbb{P}\{X_1 > x | X_2 > x, X_3 > x\}} = q_x^{aa}$$

4.

$$\hat{q}_x^{aa} = \mathbb{P}\{X_3 < \min(x+1, X_1, X_2) | X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}$$

$$\hat{q}_x^{as} = \mathbb{P}\{X_1 \leq X_3 < \min(x+1, X_2) | X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}$$

5.

$$\text{Da } \hat{q}_x^{aa} = \mathbb{P}(\{X_3 < X_1\} \cap \{X_3 < X_2\} \cap \{X_3 < x + 1\} | \{X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\})$$

$$\text{und } \hat{q}_x^{as} = \mathbb{P}(\{X_3 \geq X_1\} \cap \{X_3 < X_2\} \cap \{X_3 < x + 1\} | \{X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\})$$

$$\text{sowie } \{X_3 < X_1\} \cap \{X_3 \geq X_1\} = \emptyset$$

$$\text{und } \{X_3 < X_1\} \cup \{X_3 \geq X_1\} = \Omega$$

$$\text{folgt } \hat{q}_x^{aa} + \hat{q}_x^{as} = \mathbb{P}(\{X_3 < X_2\} \cap \{X_3 < x + 1\} | \{X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\})$$

$$= \mathbb{P}\{X_3 < \min(x + 1, X_2) | X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}$$

$$= q_x^{Iaa}$$

6.

Die Richttafel-Methode führt zu

$$\hat{q}_x^{as} = s_x \frac{1}{2} q_{x+\frac{1}{2}}^{aa}$$

Nun gilt infolge der Gleichverteilung der Ereignisse {Eintritt der Invalidität} und {Eintritt des Todes} innerhalb des Jahres:

$$q_x^{aa} = \frac{1}{2} q_x^{aa} + \frac{1}{2} p_x^a \frac{1}{2} q_{x+\frac{1}{2}}^{aa} = \frac{1}{2} q_x^{aa} + \frac{1}{2} p_x^a \frac{1}{2} q_{x+\frac{1}{2}}^{aa}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} q_{x+\frac{1}{2}}^{aa} = \frac{q_x^{aa} - \frac{1}{2} q_x^{aa}}{\frac{1}{2} p_x^a} = \frac{\frac{1}{2} q_x^{aa}}{1 - \frac{1}{2} i_x - \frac{1}{2} q_x^{aa}} = \frac{\frac{1}{2} q_x^{aa}}{1 - \frac{1}{2} (i_x - q_x^{aa})}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\hat{q}_x^{aa} &= q_x^{aa} - \hat{q}_x^{as} \\ &= q_x^{aa} - \frac{\frac{1}{2} s_x q_x^{aa}}{1 - \frac{1}{2}(i_x + q_x^{aa})} \\ &= q_x^{aa} \left(1 - \frac{\frac{1}{2} s_x}{1 - \frac{1}{2}(i_x + q_x^{aa})} \right)\end{aligned}$$

AUFGABE 3 (35 Punkte)

Teil a) (5 + 5 Punkte)

- a1) Nehmen Sie bitte kurz Stellung zur sogenannten *Mackenrothschen These*!
- a2) Stellen Sie stichwortartig die wesentlichen Risiken einer umlagefinanzierten (nicht kapitalgedeckten) und einer kapitalgedeckten Alterssicherung gegenüber!

Teil b) (4+5 Punkte)

- b1) Erläutern Sie die wesentlichen Risiken festverzinslicher Wertpapiere!
- b2) Wie sähe ein angemessener Stresstest für ein Portfolio festverzinslicher Wertpapiere aus?

Teil c) (6 + 10 Punkte)

Die Bilanz einer Pensionskasse habe folgende Struktur:

$P = 100$	$R = 15$
	$V = 85$

Auf den Deckungsrückstellungen (V) lastet eine Garantieverzinsung von 2,5%, während auf dem Kapitalmarkt lediglich ein sicherer Zins von 1,5% erwirtschaftet werden kann. Für risikobehaftete Anlagen (Aktien) wird eine Zusatzrendite (Risikoprämie) von 4% erwartet.

Die (vereinfachten) Solvabilitätsvorschriften verlangen freie unbelastete Mittel in Höhe von 4,5% der Deckungsrückstellung. Ferner wird ein Stresstest verlangt. Dieser fordert, dass auch bei einem simultanen Wertverlust von 10% auf Zinspapieren und von 30% auf Aktien noch hinreichend Eigenmittel vorhanden sind.

Die Pensionskasse überlegt, wie sie die Deklaration d (Gesamtverzinsung einschl. Garantieverzinsung von 2,5%) und die Aktienquote α für das nächste Jahr festlegen soll.

- c1) Unterstellen Sie zunächst, dass die Pensionskasse nur den Garantiezins gewährt, also $d=0,025$. Berechnen Sie die *erwartete* Reservequote als Funktion der Aktienquote α . Welche Aktienquote ist erforderlich, um die Reservequote (zumindest im Erwartungswert) konstant zu halten?
- c2) Welcher Zusammenhang von d und α ergibt sich aus der obigen Solvabilitätsbedingung? Berechnen Sie dabei den *Wert der Assets nach Stress* in Abhängigkeit von α für zwei Varianten, nämlich
- Variante 1:* ohne Berücksichtigung der erwarteten Kapitalerträge,
- Variante 2:* mit Berücksichtigung der erwarteten Kapitalerträge.
- Interpretieren Sie die Ergebnisse!

Zu c1) und c2): Bitte kommentieren Sie jeweils kurz Ihre Berechnungsschritte!

Lösungshinweise:

zu a1) Die Mackenrothsche These besagt, dass aller Sozialaufwand immer aus dem laufenden Volkseinkommen gedeckt werden muss. Hieraus folge, dass gesamtwirtschaftlich ein Sparen nicht möglich sei. Bezogen auf die Altersvorsorge würde dies bedeuten, dass zwar einzelwirtschaftlich ein Ansparen für die Altersversorgung möglich ist, dass jedoch gesamtwirtschaftlich eine kapitalgedeckte Altersversorgung insgesamt die Altersversorgung nicht verbessern kann.

Im Kern ist die Mackenrothsche These richtig, denn die Generation der Rentenbezieher muss, ob die Altersversorgung kapitalgedeckt oder umlagefinanziert ist, mit Gütern und Dienstleistungen ausgestattet werden, die von der aktiven Generation produziert bzw. bereitgestellt werden. Streng genommen gilt jedoch diese These nur für eine geschlossene Volkswirtschaft, denn mit einem Kapitalstock können auch Güter und Dienstleistungen im Ausland erworben werden. Des Weiteren gilt zu bedenken, dass der Aufbau eines Kapitalstocks eine Umschichtung von Konsumausgaben zu investiven Ausgaben führt. Diese Investitionen können helfen, langfristig die Produktivität zu steigern, wodurch dann auch das künftige Volkseinkommen positiv beeinflusst wird.

zu a2)

	umlagefinanzierte Alterssicherung	kapitalgedeckte Alterssicherung
Geldentwertung (Inflation)	keine direkte Auswirkung, wenn die Lohnsteigerungen die Geldentwertung kompensieren.	wirkt sofort auf den Realwert des Versorgungskapitals. Verlust kann u.U. teilweise kompensiert werden, wenn die Zinsen die Geldentwertung ausgleichen.
stagnierende Löhne/ Arbeitslosigkeit	wirken unmittelbar belastend auf das Umlageverfahren, wenn nicht die Beitragssätze erhöht werden.	kein direkter Zusammenhang mit der Lohnentwicklung. Stagnierende Wirtschaft führt aber i.d.R. auch dazu, dass die Realverzinsung von Kapitalvermögen sinkt
niedrige Zinsen, Baisse am Kapitalmarkt	kein direkter Zusammenhang zur Zinsentwicklung, da an Löhne/ Gehälter gekoppelt.	wirken unmittelbar belastend auf kapitalgedeckte Systeme. Bei niedrigem Zins muss c.p. für die gleiche Rentenleistung mehr angespart werden
Alterung der Bevölkerung	Wenn nicht durch Erhöhung des Rentenzugangsalters gegen gewirkt wird, führt eine alternde Bevölkerung c.p. zu niedrigeren Renten oder zu höheren Beiträgen.	Wenn ein Sparer individuell vorsorgt, so ist er zunächst immun gegen eine alternde Bevölkerung. Allerdings ist zu beachten, dass eine alternde Bevölkerung sich auch negativ auf das Sozialprodukt auswirkt und somit auch die Kapitalerträge sinken werden. Sonderproblem: Asset- Meltdown. Hypothese

Sonstiges	Sofern die umlagefinanzierte Alterssicherung staatlich organisiert ist, kann ein sozialer Ausgleich (etwa durch steuerfinanzierte Komponenten) durchgeführt werden. Eingriffsmöglichkeiten des Staates sind stärker ausgeprägt. Umlageverfahren setzt einen gesellschaftlichen Konsens über den „Generationenvertrag“ voraus.	Die kapitalgedeckte Alterssicherung ist meist privat organisiert und es besteht kein Sicherungsversprechen des Staates. Anbieterrisiko: Schlecht Kapitalanlage, übermäßige Kosten, irreführende Werbung, Untreue. Kapitaldeckung setzt eine gesellschaftlichen Konsens hinsichtlich des Schutzes von Eigentum voraus.
Inland/ Ausland	Umlagefinanzierte Systeme sind stark abhängig von der Binnenkonjunktur	Durch Investitionen im Ausland teilweise Abkopplung von der inländischen Konjunktur.
Anpassung an veränderte Rahmenbedingungen	Ändern sich die wirtschaftlichen Rahmenbedingungen substanziell, so können Beitrags- und Leistungsseite mit sofortiger Wirkung beeinflusst werden	Kernproblem der (individuellen) Kapitaldeckung ist das Prognose-Problem, denn schon in der Ansparphase muss geschätzt werden, welche Beiträge aufgebracht werden müssen, um ein bestimmtes Versorgungsziel zu erreichen

zu b1)

Zinsrisiken:

- steigende Zinsen: Kursverluste, Ausmaß abhängig von der Duration des Portfolios
- sinkende Zinsen: Kursgewinne, jedoch Verschlechterung der Wiederanlagemöglichkeiten

Kreditrisiken:

- Ausfallrisiko: Der Schuldner zahlt nicht, unvollständig, verspätet.
- Rating –Risiko: Der Schuldner zahlt zwar vollständig und pünktlich, jedoch kommt es zu einer Abwertung der Zuverlässigkeit der Schuldner schlechter bewertet.

Das Kreditrisiko ist zunächst ein ideosynkratisches Risiko, also ein Risiko, das die einzelne Anleihe bzw. den einzelnen Schuldner betrifft. Wenn jedoch durch eine Änderung der allgemeinen wirtschaftlichen Rahmenbedingungen das Kreditrisiko für alle Anleihen steigt, so wird man von einem systematische Kreditrisiko sprechen.

Änderung der Marktrisikoprämie:

- Steigt die Marktrisikoprämie (also der Zusatzzins, den Investoren erwarten, wenn sie Risiken eingehen), so sinkt der Kurswert aller Anleihen mit nicht sicheren Emittenten. Der Kursverlust tritt also ein, auch wenn sich das Zinsniveau nicht ändert und das Ausfallrisiko nicht gestiegen ist.

Liquiditätsrisiko:

- Wenn kein liquider Markt für das Wertpapier vorhanden ist, können Anleihen nicht oder nicht zu akzeptablen Preisen veräußert werden.

Weitere Risiken:

- Währungsrisiko, wenn die Forderung auf eine andere Währung als die zu bedeckende Verbindlichkeit
- Inflationsrisiko, wenn eine nominale Forderung eine reale Verbindlichkeit bedeckte (z.B. Krankheitskosten)

zu b2)

Das Zinsänderungsrisiko kann bei einem Stresstest durch pauschalen Abschlag berücksichtigt werden. Der pauschale Abschlag könnte man berechnen als

$$\text{Abschlag} = \text{Zinsanstieg} \times \text{Duration}$$

Ein Zinsanstieg um 1% bei einer Duration von 10 würde dann zu einen Stress von -10% führen.

Das systematische Kreditrisiko hängt ab von der Änderung der Risikoprämie und der Duration. Ein Stresstest in Bezug auf das Kreditrisiko könnte also in der Form durchgeführt werden, dass für jede Ratingklasse eine Verschlechterung (etwa um 3 Ratingstufen) angenommen wird. Dies bedingt dann für jede Ratingklasse einen Zinsanstieg, der dann entsprechend der Duration gewichtet werden müsste.

zu c1)

Für die erwartete Reservequote gilt:

$$RQ_e = 1 - \frac{V_e}{P_e} = 1 - \frac{V(1+d)}{P(1,015+0,04\alpha)} = 1 - \frac{87,125}{101,5+4\alpha}$$

$$\text{Aus } RQ_e = 0,15 \text{ folgt: } 0,15 = 1 - \frac{87,125}{101,5+4\alpha} \Rightarrow \alpha = 0,25$$

Um die Reservequote zu halten, wäre also eine Aktienquote von 25 % erforderlich!

zu c2)

Wir berechnen den Wert des Portfolios nach Stress P_{Stress} :

$$\text{Variante 1: } P_{Stress, V1} = 100(\alpha \cdot 0,7 + (1-\alpha) \cdot 0,9) = 90 - 20\alpha$$

$$\text{Variante 2: } P_{Stress, V2} = 100(\alpha \cdot 0,7 \cdot 1,055 + (1-\alpha) \cdot 0,9 \cdot 1,015) = 91,35 - 17,5\alpha$$

Die Solva-Bedingung fordert nun: $1,045 \cdot V_e = 1,045 \cdot (1+d) \cdot 85 \leq P_{Stress}$.

Für Variante 1 ergibt sich

$$\begin{aligned} 1,045 \cdot (1+d) \cdot 85 &\leq 90 - 20\alpha \\ \Rightarrow d &\leq \frac{1,175 - 20\alpha}{88,825} = 0,013228 - 0,22516\alpha \end{aligned}$$

Kommentar: Selbst bei einer Aktienquote von Null wird der Stresstest bei der Gewährung der Garantieverzinsung nicht bestanden!

Für *Variante 2* ergibt sich

$$1,045 \cdot (1 + d) \cdot 85 \leq 91,35 - 17,5\alpha$$
$$\Rightarrow d \leq \frac{2,525 - 17,5\alpha}{88,825} = 0,028427 - 0,197017\alpha$$

Kommentar: Bei dieser Variante ist die Garantieverzinsung noch darstellbar. Entscheidet sich die Pensionskasse nur den Garantiezins zu gewähren, so ergibt sich eine maximale Aktienquote von $\alpha = 1,74\%$. Bei dieser Aktienquote wird aber aller voraussichtlich (im Erwartungswert) die Reservequote sinken!

Aufgabe 4 (30 Punkte)

Das Jahresergebnis einer Pensionskasse kann buchhalterisch auf die Teilergebnisse aus der Kapitalanlage, aus den Verwaltungskosten, aus dem Risiko und aus sonstigen Quellen zerlegt werden.

i) Wie werden die einzelnen Teilergebnisse aus der Gewinn- und Verlustrechnung und ergänzenden internen Informationen festgestellt?

ii) Nehmen Sie Stellung zu folgenden Beobachtungen:

a) Warum wirkt sich eine Untersterblichkeit der Rentner in der Regel negativ auf das Risikoergebnis aus?

b) Die von der Pensionskasse festgestellte Kapitalverzinsung liegt leicht unter dem Rechnungszins. Gleichwohl ist das mittels der buchhalterischen Methode ermittelte Zinsergebnis positiv. Wie kann das sein?

c) die Anzahl der erwarteten Todes- und Invaliditätsfälle stimmt mit den biometrischen Rechnungsgrundlagen ebenso überein wie die Verheiratungshäufigkeit und das Alter der Ehegatten. Gleichwohl ergibt die Gewinnzerlegung einen Risikoverlust. Woran kann das liegen?

Lösung:

Zu i):

Die Zerlegung erfolgt in vier Teilergebnisse wie folgt:

Ergebnis aus Kapitalanlagen

Erträge aus Kapitalanlagen

abzgl. Aufwendungen für Kapitalanlagen

abzgl. Rechnungsmäßige Verzinsung

Verwaltungskostenergebnis

Rechnungsmäßige Verwaltungskosten

abzgl. Aufwendungen für den Versicherungsbetrieb

abzgl. Regulierungsaufwendungen

Risikoergebnis

Nettobeiträge

zzgl. Rechnungsmäßige Verzinsung

abzgl. Nettoleistungen

abzgl. Zuführung zur Deckungsrückstellung

Sonstiges Ergebnis

Sonstige Erträge

abzgl. Sonstige Aufwendungen

Zu ii):

- a) *Bei Untersterblichkeit werden weniger Deckungsmittel frei als kalkulatorisch unterstellt. Die Deckungsrückstellung wächst stärker (oder sinkt langsamer), woraus ein negativer Ergebnisbeitrag resultiert. Außerdem werden mehr Leistungen ausgezahlt als einkalkuliert waren.*
- b) *Der Effekt liegt daran, dass der Zinsträger für die Ermittlung der Kapitalverzinsung das gesamte Anlagevermögen ist, während in das buchhalterische Teilergebnis nur die Sollverzinsung der Deckungsrückstellung eingeht.*
- c) *Die anzahlmäßige Beurteilung berücksichtigt nicht die Gewichtung mit der Rentenhöhe. Wenn beispielsweise überwiegend Bezieher von niedrigen Renten versterben, ergibt sich trotz auskömmlicher Anzahl von Todesfällen ein Risikoverlust.*

Aufgabe 5 (25 Punkte)

Die Firma „Kürbis GmbH“, eine überregional tätiges Kürbisanbauunternehmen für Speise- und Zierkürbisse der Premiumklasse, möchte zur Verbesserung der Motivation ihrer Arbeitnehmer in den Bereichen Anbau, Ernte, Weiterverarbeitung, Verpackung und Versand eine unmittelbare Pensionszusage für ihre 200 Arbeitnehmer (Jahreslohnsumme 4,0 Mio. €) einführen. Geplant ist ein dienstzeitabhängiger Leistungsplan, der bei Erwerbsminderung und Alter Rentenleistungen in Höhe von 0,3 % des Lohnes pro Dienstjahr vorsieht. Die Hinterbliebenen erhalten 60 % der Rente des Arbeitnehmers. Das Unternehmen hat hohen Investitionsbedarf hinsichtlich klimatisierter Gewächshäuser und Lagerhallen. Der betriebswirtschaftliche Leiter des Unternehmens (Ehegatte der jüngsten Enkelin des Firmengründers) belästigt Sie mit folgenden Fragestellungen:

- i) Welche Methode und welche Prämissen empfehlen Sie uns für den Ausweis der Pensionsverpflichtungen in unserer Handelsbilanz?
- ii) Wie sollten wir methodisch unsere Pensionszusage bei der Kalkulation unserer Preisangebote für Kürbisse in Ansatz bringen?
- iii) Wie entwickelt sich planmäßig die Höhe der Pensionsrückstellung von Jahr zu Jahr?
- iv) Unter welchen Bedingungen lohnt sich überhaupt die Erteilung einer unmittelbaren Pensionszusage?

Lösung:

zu i): Es kommt darauf an, den durch die Pensionszusagen verursachten Aufwand verursachungsgerecht auf die Zeiträume zu verteilen, in denen die Gegenleistung durch den begünstigten Arbeitnehmer erbracht wird.

Bei der hier vorgesehenen Leistungszusage erfüllen das modifizierte Teilwertverfahren, das eine Gleichverteilung des Aufwandes aus der Pensionszusage über die aktive Dienstzeit bewirkt, oder das PUC-Verfahren die handelsrechtlichen Anforderungen. Das PUC-Verfahren führt in der Regel zu etwas geringeren Bilanzansätzen als das modifizierte Teilwertverfahren.

Die Prämissen umfassen die biometrischen Rechnungsgrundlagen einschließlich Altersgrenze und Fluktuationsannahmen, die Annahmen über die künftige dynamische Entwicklung der Anwartschaften und Renten, der Rechnungszins und ggf. die Berücksichtigung zwingend anfallender Nebenkosten.

Hinsichtlich der biometrischen Rechnungsgrundlagen kann auf allgemein anerkannte Rechnungsgrundlagen wie die RICHTTAFELN 2005 G von Klaus Heubeck zurückgegriffen werden. Sofern ausnahmsweise spezifische Kenntnisse über das Risikoverhalten des zu bewertenden Bestandes vorliegen, kommt ggf. eine Modifikation der Tafeln in Betracht; dies wird bei einer neu erteilten Pensionszusage und der geringen Bestandsgröße eher nicht der Fall sein. Die Altersgrenze kann mit Blick auf die in der gesetzlichen Rentenversicherung in Frage kommenden Altersgrenzen festgesetzt werden.

Soweit das Unternehmen sich bestimmten Anpassungsverpflichtungen nicht entziehen kann, sind diese mit einem angemessen vorsichtigen Schätzwert in Ansatz zu bringen. Für den Rechnungszins existieren einschlägige Vorschriften im Handelsgesetzbuch (Durchschnittszins der letzten sieben Jahre) Sachgerecht wäre im Übrigen die Einbeziehung der zumindest in der Rentenlaufzeit anfallenden Kosten für Administration und Insolvenzsicherung.

zu ii): Entsprechend der für die Kostenrechnung geforderten Korrespondenz zwischen Leistung (Arbeitsleistung des Berechtigten) und Gegenleistung (Lohn und Versorgungsleistung des Unternehmens) bietet sich eine mit realistischen Prämissen ermittelte versicherungstechnische Bruttoprämie als Methode zur Ermittlung der Kosten der Pensionszusage an.

zu iii): Die Rückstellung steigt um die jährliche Verteilungsrate (Prämie oder Barwert des hinzuverdienten Leistungsteiles) und den Zins auf die vorhandene Rückstellung. Je nach Zusage und Verpflichtungsverlauf kommt ein positiver oder negativer Risikobeitrag hinzu. Des Weiteren haben Verpflichtungsänderungen Einfluss auf die Rückstellung.

Zu iv): Die Frage läuft darauf hinaus, ob die Erteilung einer Pensionszusage effizienter ist als die ansonsten notwendigen Leistungen an die Berechtigten, um eine identische Gegenleistung erwarten zu können. Für die Pensionszusage spricht deren lohnsteuerliche Förderung. Diese lohnsteuerliche Förderung macht die Versorgungszusage für den Berechtigten deutlich wertvoller als ein vergleichbarer Barlohnzuschlag. In eine ähnliche Richtung geht die Beobachtung, dass der über die betriebliche Altersversorgung dem Begünstigten gut gebrachte Zins in der Regel die Renditen von privaten Anlagen des Arbeitnehmers übersteigt, so dass für den vorsorgewilligen Arbeitnehmer die Versorgungszusage auch deshalb einem entsprechenden Lohnzuschlag überlegen ist. Ebenfalls für eine Pensionszusage spricht ein im Unternehmen ggf. dauerhaft zu unterstellender Kapitalbedarf. Hier könnten die für die Erfüllung der Pensionszusage erforderlichen Mittel in der Zeit vom Empfang der Gegenleistung des Arbeitnehmers bis zur Auszahlung der Rente im Unternehmen verbleiben und insoweit die Aufnahme von Fremdmitteln entbehrlich machen.

Aufgabe 6 (25 Punkte)

Der Personalleiter Neunmalklug der Firma Machwasdraus GmbH, trägt sich mit dem Gedanken, eine arbeitgeberfinanzierte betriebliche Altersversorgung als unmittelbare Pensionszusage einzuführen.

- i) Herr Neunmalklug fragt Sie, wie der Risikoausgleich im Anwärter- und Rentnerbestand funktioniert und ob er eine Rückdeckungsversicherung abschließen sollte.
- ii) Was sollte Herr Neunmalklug über den Dotierungsrahmen bei der Einführung der betrAV wissen?
- iii) Unterbreiten Sie Herrn Neunmalklug einen Vorschlag zu einer Leistungsformel, mit der möglichst flexibel auf die wirtschaftliche Lage seines Unternehmens reagiert werden kann.

Lösung:

zu i):

Kalkulatorisch ist in der Pensionsrückstellung für jeden Anwärter ein durchschnittlich erforderlicher Mittelbedarf für den Eintritt eines vorzeitigen Versorgungsfalles einkalkuliert. Im Bestand decken die nicht benötigten Beträge derjenigen Anwärter, die keine Versorgungsfall erlebt haben den Bedarf derjenigen, bei denen der Versorgungsfall eingetreten ist. Bei Rentnern ist kalkulatorisch unterstellt, dass mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit Mittel durch Tod freiwerden. Die in den tatsächlichen Todesfällen frei werdenden Deckungsmittel gestatten in der Summe die Auffüllung der Deckungsmittel für die Überlebenden. Eine Risikorückdeckungsversicherung kommt in Betracht, wenn der Bestand aufgrund seiner geringen Größe einen Risikoausgleich nicht erwarten lässt und soweit dies zu einer wirtschaftlichen Bedrohung des Unternehmens führen könnte.

zu ii):

Der Dotierungsrahmen beschreibt die materiellen Auswirkungen der Pensionszusage im Zeitablauf. Er kann durch die für das Unternehmen relevanten Kennzahlen, z.B. Prämien, Zahlungsverbindlichkeiten, Aufwandsgrößen durch Zeitreihen beschrieben werden. Im Rahmen der Mitbestimmung muss bei alternativen Leistungsregelungen der Dotierungsrahmen gewahrt werden. Oft wird der Dotierungsrahmen nicht explizit genannt, dann erklärt sich der zusagende Arbeitgeber stillschweigend mit den Folgen seiner angebotenen Pensionszusage einverstanden.

zu iii):

Besonders gut kalkulierbar und einfach zu handhaben ist eine sogenannte Festrentenzusage. Dabei sagt der Arbeitgeber einen festen Eurobetrag als Rente zu. Wenn es die wirtschaftliche Lage erlaubt, passt er die zugesagte Leistung im Rahmen seiner Möglichkeiten an.