

Aufgabe 1 (40 Punkte)

Wir betrachten das im Repetitorium mit „Modell der Richttafeln“ bezeichnete Bevölkerungsmodell mit der Hauptgesamtheit „Aktive“ und den beiden Ausscheidursachen Invalidität und Tod. Seien für eine x -jährige Person auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ die bekannten reellwertigen stetigen Zufallsvariablen definiert:

X_1 : Alter bei Eintritt des Ereignisses Invalidität

X_2 : Alter bei Eintritt des Ereignisses Tod

a) Wir betrachten die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

- q_x^a : Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x innerhalb eines Jahres zu sterben
- q_x^g : Wahrscheinlichkeit einer Person des Gesamtbestandes des Alters x innerhalb eines Jahres zu sterben
- q_x^i : Wahrscheinlichkeit eines Invaliden des Alters x innerhalb eines Jahres zu sterben
- l_x^a : Wahrscheinlichkeit einer Person des Alters x zum Aktivenbestand zu gehören
- l_x^g : Wahrscheinlichkeit einer Person des Alters x zum Gesamtbestand zu gehören

i. Drücken Sie diese Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Zufallsvariablen X_1 und X_2 aus.

ii. Zeigen Sie mit Hilfe der Darstellung aus i) die erste Konsistenzgleichung:

$$q_x^g = \frac{l_x^a}{l_x^g} \cdot q_x^a + \frac{l_x^g - l_x^a}{l_x^g} \cdot q_x^i$$

iii. Zeigen Sie, dass sich die erste Konsistenzgleichung in der üblichen Darstellung der Richttafeln auch wie folgt formulieren lässt:

$$q_x^g = q_x^i - \frac{l_x^a}{l_x^g} \cdot (q_x^i - q_x^{aa} - i_x \frac{1}{2} q_{x+\frac{1}{2}}^i)$$

Erläutern Sie kurz, welche Auswirkung die 1. Konsistenzgleichung auf das Vorgehen bei der Modifikation von Ausscheidewahrscheinlichkeiten in den Richttafeln hat.

- b) Wir betrachten nun eine x -jährige Person des Gesamtbestandes. Weiter seien für diese Person die folgenden Zufallsvariablen definiert:

$N :=$ Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Tod und

$B := v^m \cdot a_{\overline{N-m+1}|} \cdot 1_{\{N \geq m\}}$ für ein vorgegebenes $m \in \mathbb{N}_0$

- i. Drücken Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(N \geq m)$ und $\mathbb{P}(N = m)$ mit Hilfe der Zufallsvariablen X_1 und X_2 aus und leiten Sie hieraus die übliche Notation der Richttafeln für diese Wahrscheinlichkeiten ab.
- ii. B stellt den Erfüllungsbetrag einer ungewissen Verpflichtung dar. Charakterisieren Sie, um welche Verpflichtung es sich handelt.
- iii. Berechnen Sie den Erwartungswert von B und stellen Sie diesen in der üblichen versicherungsmathematischen Notation dar.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Wir betrachten weiterhin das im Repetitorium mit „Modell der Richttafeln“ bezeichnete Bevölkerungsmodell mit der Hauptgesamtheit „Aktive“ und den beiden Ausscheideursachen Invalidität und Tod.

Für einen x -jährigen männlichen Aktiven bestehe folgende Verpflichtung ($m = 0, \dots, n-1$):

- Bei Invalidität in $]x+m, x+m+1]$ wird die Reserve zum Ende des Wirtschaftsjahres ${}_{m+1}V_x$ am Ende des Wirtschaftsjahres geleistet
 - Bei Tod als Aktiver in $]x+m, x+m+1]$ wird an die im Zeitpunkt des Todes mit dem Berechtigten verheiratete Ehefrau die Reserve zum Ende des Wirtschaftsjahres ${}_{m+1}V_x$ am Ende des Wirtschaftsjahres geleistet („kollektive Witwenrentenzusage“)
 - Bei Erreichen der Altersgrenze $z=x+n$ wird eine lebenslänglich laufende monatlich vorschüssig zahlbare Altersrente des Jahresbetrages 1 geleistet.
- a) Im Repetitorium wurde mit ${}_m\hat{L}_x$ der Erwartungswert der gesamten Leistung bezeichnet, die durch Erreichen des Altersintervalls $]x+m, x+m+1]$ ausgelöst werden kann, diskontiert auf den Beginn dieses Jahres.

Geben Sie die ${}_m\hat{L}_x$, $m = 0, \dots, n$, für die beschriebene Verpflichtung an und zeigen Sie mit Hilfe der versicherungsmathematischen Bilanzgleichungen, dass sich die Prämie in diesem Fall wie folgt darstellen lässt (für $m = 0, \dots, n-1$):

$${}_m\hat{P}_x = v \cdot {}_{m+1}V_x \cdot (1 - q_{x+m}^{aa} \cdot (1 - h_{x+m})) - {}_mV_x$$

- b) Bekanntlich lässt sich die Prämie ${}_m\hat{P}_x$ in eine Sparprämie ${}_mP_x^S$ und eine Risikoprämie ${}_mP_x^R$ aufteilen.
- i. Geben Sie die Definition der Sparprämie an und bestimmen Sie mit Hilfe von a) die Risikoprämie. Interpretieren Sie das Ergebnis.
(Gehen Sie dabei insbesondere darauf ein, wie sich die Risikoprämie auf die Ausscheideursachen Invalidität und Tod als Aktiver aufteilt und erläutern Sie das Vorzeichen der Risikoprämien der beiden Ausscheideursachen).
 - ii. Wie ändert sich die Risikoprämie, wenn nun bei Tod als Aktiver in jedem Fall (also unabhängig vom Vorhandensein einer Witwe) die Reserve zum Ende des Wirtschaftsjahres ${}_{m+1}V_x$ am Ende des Wirtschaftsjahres geleistet wird? Interpretieren Sie das Ergebnis.

AUFGABE 1

X_1 := Alter bei Eintritt des Ereignisses Invalidität

X_2 := Alter bei Eintritt des Ereignisses Tod

Teil a)

i)

$$q_x^a = \mathbb{P} [X_2 \leq x + 1 | X_1 > x, X_2 > x]$$

$$q_x^g = \mathbb{P} [X_2 \leq x + 1 | X_2 > x]$$

$$q_x^i = \mathbb{P} [X_2 \leq x + 1 | X_1 \leq x, X_2 > x]$$

$$l_x^a = \mathbb{P} [X_1 > x, X_2 > x]$$

$$l_x^g = \mathbb{P} [X_2 > x]$$

ii)

$$\begin{aligned} q_x^g &= \mathbb{P} [X_2 \leq x + 1 | X_2 > x] \\ &= \mathbb{P} [X_2 \leq x + 1, X_1 > x | X_2 > x] + \mathbb{P} [X_2 \leq x + 1, X_1 \leq x | X_2 > x] \\ &= \mathbb{P} [X_2 \leq x + 1 | X_1 > x, X_2 > x] \cdot \mathbb{P} [X_1 > x | X_2 > x] \\ &\quad + \mathbb{P} [X_2 \leq x + 1 | X_1 \leq x, X_2 > x] \cdot \mathbb{P} [X_1 \leq x | X_2 > x] \\ &= q_x^a \cdot \frac{\mathbb{P} [X_1 > x, X_2 > x]}{\mathbb{P} [X_2 > x]} + q_x^i \cdot \frac{\mathbb{P} [X_1 \leq x, X_2 > x]}{\mathbb{P} [X_2 > x]} \\ &= q_x^a \cdot \frac{l_x^a}{l_x^g} + q_x^i \cdot \frac{l_x^g - l_x^a}{l_x^g} \end{aligned}$$

iii)

Mit $q_x^a = q_x^{aa} + i_x \cdot \frac{1}{2} q_{x+\frac{1}{2}}^i$ folgt

$$\begin{aligned} q_x^g &= q_x^a \cdot \frac{l_x^a}{l_x^g} + q_x^i \cdot \frac{l_x^g - l_x^a}{l_x^g} \\ &= \frac{l_x^a}{l_x^g} \cdot (q_x^{aa} + i_x \cdot \frac{1}{2} q_{x+\frac{1}{2}}^i) + \frac{l_x^g - l_x^a}{l_x^g} \cdot q_x^i \\ &= q_x^i - \frac{l_x^a}{l_x^g} \cdot (q_x^i - q_x^{aa} - i_x \cdot \frac{1}{2} q_{x+\frac{1}{2}}^i) \end{aligned}$$

Erläuterung: Durch die 1. Konsistenzgleichung besteht ein Zusammenhang zwischen q_x^{aa} , q_x^i , q_x^g und i_x . Eine isolierte Modifikation einer dieser Wahrscheinlichkeiten ist daher im Richttafelmodell nicht sinnvoll, es muss mindestens eine weitere Wahrscheinlichkeit modifiziert werden, so dass die Konsistenzgleichung erfüllt bleibt.

Teil b)

i)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[N \geq m] &= \mathbb{P}[X_2 \geq x + m | X_2 > x] \\ &= \mathbb{P}[X_2 > x + m | X_2 > x] = {}_m p_x^g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[N = m] &= \mathbb{P}[x + m \leq X_2 < x + m + 1 | X_2 > x] \\ &= \frac{\mathbb{P}[X_2 > x + m, X_2 \leq x + m + 1, X_2 > x]}{\mathbb{P}[X_2 > x]} \\ &= \frac{\mathbb{P}[X_2 > x + m, X_2 \leq x + m + 1]}{\mathbb{P}[X_2 > x + m]} \cdot \frac{\mathbb{P}[X_2 > x + m]}{\mathbb{P}[X_2 > x]} \\ &= \mathbb{P}[X_2 \leq x + m + 1 | X_2 > x + m] \cdot \mathbb{P}[X_2 > x + m | X_2 > x] \\ &= q_{x+m}^g \cdot {}_m p_x^g \end{aligned}$$

ii)

B stellt den Erfüllungsbetrag der Anwartschaft einer x-jährigen Person des Gesamtbestandes auf eine im Alter $x + m$ beginnende, jährlich vorschüssig zahlbare, lebenslänglich laufende Rente des Jahresbetrags 1 dar.

iii)

$$\begin{aligned} B &= v^m \cdot \overline{a_{\overline{N-m+1}|}} \cdot \mathbf{1}_{\{N \geq m\}} \\ &= v^m \cdot \sum_{k=0}^{N-m} v^k \cdot \mathbf{1}_{\{N \geq m\}} \\ &= v^m \cdot \sum_{k \geq 0} v^k \cdot \mathbf{1}_{\{N-m \geq k\}} \cdot \mathbf{1}_{\{N \geq m\}} \\ &= v^m \cdot \sum_{k \geq 0} v^k \cdot \mathbf{1}_{\{N \geq m+k\}} \cdot \mathbf{1}_{\{N \geq m\}} \\ &= v^m \cdot \sum_{k \geq 0} v^k \cdot \mathbf{1}_{\{N \geq m+k\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{E}[B] &= v^m \cdot \sum_{k \geq 0} v^k \cdot \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{N \geq m+k\}}] \\ &= v^m \cdot \sum_{k \geq 0} v^k \cdot \mathbb{P}[N \geq m+k] \\ &= v^m \cdot \sum_{k \geq 0} v^k \cdot {}_{m+k}p_x^g \\ &= v^m \cdot {}_m p_x^g \cdot \sum_{k \geq 0} v^k \cdot {}_k p_{x+m}^g \\ &= v^m \cdot {}_m p_x^g \cdot a_{x+m}^g \end{aligned}$$

AUFGABE 2

Teil a)

Für $m < n$ gilt: ${}_m\hat{L}_x = v \cdot i_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x + v \cdot q_{x+m}^{aa} \cdot h_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x$

Für $m = n$ gilt: ${}_m\hat{L}_x = {}^{(12)}a_z^r$

Aus den versicherungsmathematischen Bilanzgleichungen folgt für $m = 0, \dots, n - 1$:

$$\begin{aligned}
 {}_mV_x + {}_m\hat{P}_x &= {}_m\hat{L}_x + v \cdot p_{x+m}^a \cdot {}_{m+1}V_x \\
 \implies {}_m\hat{P}_x &= {}_m\hat{L}_x + v \cdot p_{x+m}^a \cdot {}_{m+1}V_x - {}_mV_x \\
 \implies {}_m\hat{P}_x &= v \cdot i_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x + v \cdot q_{x+m}^{aa} \cdot h_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x \\
 &\quad + v \cdot p_{x+m}^a \cdot {}_{m+1}V_x - {}_mV_x \\
 &= v \cdot i_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x + v \cdot q_{x+m}^{aa} \cdot h_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x + v \cdot {}_{m+1}V_x \\
 &\quad - v \cdot i_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x - v \cdot q_{x+m}^{aa} \cdot {}_{m+1}V_x - {}_mV_x \\
 &= v \cdot {}_{m+1}V_x \cdot (1 - q_{x+m}^{aa}(1 - h_{x+m})) - {}_mV_x
 \end{aligned}$$

Teil b)

i)

$$\begin{aligned}
 {}_m\hat{P}_x &= {}_mP_x^S + {}_mP_x^R \\
 {}_mP_x^S &= v \cdot {}_{m+1}V_x - {}_mV_x \\
 \implies {}_mP_x^R &= {}_m\hat{P}_x - {}_mP_x^S \\
 &= v \cdot {}_{m+1}V_x \cdot (1 - q_{x+m}^{aa}(1 - h_{x+m})) - {}_mV_x - v \cdot {}_{m+1}V_x + {}_mV_x \\
 &= -v \cdot q_{x+m}^{aa}(1 - h_{x+m}) \cdot {}_{m+1}V_x
 \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\text{Risikoprämie bei Tod als Aktiver: } {}_mP_x^{Raa} = -v \cdot q_{x+m}^{aa} (1 - h_{x+m}) \cdot {}_{m+1}V_x$$

Die Risikoprämie bei Tod als Aktiver ist also negativ, d.h. die Gemeinschaft erbt bei Tod ohne Hinterlassung einer Witwe die Reserve zum Ende des Jahres ${}_{m+1}V_x$.

$$\text{Risikoprämie bei Invalidität: } {}_mP_x^{Ri} = 0$$

Die Risikoprämie bei Invalidität ist also gleich Null, d.h. der Eintritt der Invalidität ist für die Gemeinschaft ohne Auswirkung.

ii)

Es gilt also $h_{x+m} = 1$ und damit ${}_mP_x^R = 0$ für $m = 0, \dots, n - 1$

Die gesamte Risikoprämie ist somit gleich Null, d.h. die Prämie entspricht der Sparprämie. Es handelt es sich daher um einen reinen Sparprozess.

Lösung für die Klausur „Spezialwissen Pensionsversicherungsmathematik“ (Oktober 2013) zu Aufgabe 3

Teil a) (7 Punkte)

Kommentieren Sie kurz folgende Aussage:

„Nun gilt der einfache und klare Satz, dass aller Sozialaufwand immer aus dem Volkseinkommen der laufenden Periode gedeckt werden muss.“ (Mackenroth 1952)

Lässt sich hieraus schließen, dass eine kapitalgedeckte Altersvorsorge gesamtwirtschaftlich nicht möglich bzw. nicht sinnvoll ist?

Dies ist die sogenannte Mackenrothsche These. In Bezug auf die Altersversorgung wird hier festgestellt, dass der Bedarf an Gütern und Dienstleistungen der Rentnergeneration aus dem jeweiligen Sozialprodukt (Nettosozialprodukt zu Faktor-kosten = Volkseinkommen) gedeckt werden muss. Ein durch ein kapitalgedecktes Alterssicherungssystem aufgebauter Kapitalstock stellt als solcher nicht sicher, dass auch die entsprechenden Güter und Dienstleistungen zur Verfügung stehen („Geld kann man nicht essen!“). Allerdings sind zwei Aspekte zu beachten: Zum einen kann in einer offenen Volkswirtschaft der im Inland aufgebaute Kapitalstock genutzt werden, um im Ausland Güter und Dienstleistungen zu erwerben. Die Mackenrothsche These ist uneingeschränkt nur für eine geschlossene Volkswirtschaft gültig. Zum anderen soll ein kapitalgedecktes Alterssicherungssystem dazu beitragen, dass über eine erhöhte Sparquote die volkswirtschaftlichen Investitionen angeregt werden, die dann die Produktivität der nächsten Generation steigert. So kann eine erhöhte Investitionstätigkeit die negativen Folgen der demografischen Entwicklung abmildern.

Teil b) (5 + 5 + 6 Punkte =16 Punkte)

Der § 54 Absatz 1 VAG hat folgenden Wortlaut:

„Die Bestände des Sicherungsvermögens (§ 66) und das sonstige gebundene Vermögen gemäß Absatz 5 (gebundenes Vermögen) sind unter Berücksichtigung der Art der betrieblichen Versicherungsgeschäfte sowie der Unternehmensstruktur so anzulegen, dass möglichst große Sicherheit und Rentabilität bei jederzeitiger Liquidität des Versicherungsunternehmens unter Wahrung angemessener Mischung und Streuung erreicht wird.“

b1) Erläutern Sie die besondere Bedeutung des Sicherungsvermögens für versicherungsgebundene Zusagen der betrieblichen Altersversorgung!

Das Sicherungsvermögen ist getrennt vom übrigen Vermögen zu verwahren (vgl. § 66 Abs. 5 VAG) und es ist sicherzustellen, dass nur mit Zustimmung des Sicherungstreuhanders (§ 70 VAG) darüber verfügt werden kann (vgl. § 72 Abs. 1 VAG). Dem Sicherungsvermögen sind laufend Mittel zuzuführen, so dass der Gesamtumfang des Sicherungsvermögens die „Kernverbindlichkeiten“ (vgl. § 66 Abs. 1 VAG) bedeckt. Die aufsichtsrechtlichen Vorschriften zum Sicherungsvermögen stellen somit ein zusätzliches Instrument zur Sicherstellung des Kapitalstocks dar.

- b2) Erläutern Sie beispielhaft die Relevanz der Formulierung „unter Berücksichtigung der Art der betriebenen Versicherungsgeschäfte sowie der Unternehmensstruktur“ für eine Pensionskasse.

Diese Formulierung in § 54 Abs. 1 VAG stellt klar, dass die Zusammensetzung der Kapitalanlagen sich an den Verpflichtungen zu orientieren hat. Eine Pensionskasse, die einen jungen Bestand hat mit vergleichsweise wenigen fälligen Rentenleistungen kann die Kapitalanlage langfristig auslegen. Hingegen muss bei einem reinen Rentenbestand vor allem darauf geachtet werden, dass zu jedem Zeitpunkt die entsprechenden liquiden Mittel zur Verfügung stehen. Des Weiteren verweist die Vorschrift auf den Umstand, dass auch die Unternehmensstruktur bei der Ausgestaltung der Kapitalanlagen eine Rolle spielen kann. Falls beispielsweise bei einer Pensionskasse das Trägerunternehmen verpflichtet ist, kurzfristig Nachschüsse zu leisten, so kann die Pensionskasse längerfristig anlegen und ggf. auch eine höhere Aktienquote anstreben.

- b3) Nennen Sie einige Maßnahmen, die eine Pensionskasse treffen kann, um die gesetzliche Vorgabe „... bei jederzeitiger Liquidität...“ zu erfüllen. Erläutern Sie hierzu zunächst, welche Liquiditätsrisiken für den Pensionskasse bestehen.

In einer Pensionskasse muss sichergestellt sein, dass alle fälligen Versorgungsleistungen (Rentenzahlungen, Kapitalabfindungen etc.) und sonstigen Aufwendungen (insb. Löhne und Gehälter, Gebühren, Honorare, etc.) jederzeit pünktlich gezahlt werden können. Dem Abfluss von liquiden Mitteln steht bei einer Pensionskasse in der Regel ein stetiger Zufluss von liquiden Mitteln gegenüber, z.B. Finanzierungsbeiträge des Arbeitgebers und der Versorgungsberechtigten, laufende Kapitalerträge (Zinsen, Dividenden, Mieten) sowie rückfließende Kapitalanlagen (fällige Anleihen, Schuldverschreibungen, Darlehen). Liquiditätsrisiken auf der Kapitalanlagenseite ergeben sich, wenn bestimmte Kapitalanlagen (unerwartet) nicht mehr fungibel sind. Liquiditätsrisiken auf der versicherungstechnischen Seite ergeben sich aus unerwartet hohe Leistungen (Invalidität, Vorruhestand) oder aus dem Storno (Liquiditätsabfluss bei Arbeitnehmerwechsel aufgrund der Portabilität).

Um die jederzeitige Liquidität sicherzustellen, muss die Pensionskasse einen Liquiditätsplan aufstellen, bei dem alle zu erwartenden liquiden Zu- und Abflüsse berücksichtigt werden. Es muss eine (Liquiditäts-)Risikoanalyse durchgeführt werden, es muss also analysiert werden, welche Planabweichungen möglich sind (Stressszenarien). Zur Sicherstellung der Liquidität muss die Kapitalanlage so organisiert sein, dass in Stressszenarien auf hinlänglich fungible Kapitalanlagen zurückgegriffen werden kann.

Teil c) (5 Punkte)

Die Verantwortliche Aktuarin einer Pensionskasse empfiehlt aufgrund neuerer Entwicklungen, die Deckungsrückstellungen für den Bestand auf aktuellere Rechnungsgrundlagen umzustellen. Dies würde zu einer deutlichen Erhöhung der Deckungsrückstellung führen. Der Vorstand der Pensionskasse kommentiert den Vorschlag der Aktuarin mit den Worten:

„Die Erhöhung der Deckungsrückstellung ist natürlich schmerzlich, aber auf der anderen Seite müssen wir dann natürlich weniger Sicherheitmittel (Solvaspanne) vorhalten!“

Kommentieren Sie diese Aussage!

Der Aussage des Vorstandes kann nicht zugestimmt werden. Nach den derzeit gültigen Solvabilitätsvorschriften setzt sich die Solvaspanne zusammen aus einem Betrag für das Kapitalanlagerisiko („Erstes Ergebnis“) und aus einem Betrag für das versicherungstechnische Risiko („Zweites Ergebnis“). Das Erste Ergebnis beträgt 4% der Deckungsrückstellung (zzgl. Beitragsüberträgen etc. und unter Berücksichtigung der Rückversicherungsquote). Bei einer Stärkung der Deckungsrückstellung erhöht sich also das Erste Ergebnis. Das Zweite Ergebnis orientiert sich am riskierten Kapital, also der Differenz aus Risikosumme und Deckungskapital. Bei unveränderter Risikosumme ergibt sich somit ein nach Stärkung des Deckungskapitals eine Minderung des Zweiten Ergebnisses. Der Effekt auf das Zweite Ergebnis ist jedoch deutlich schwächer als auf das Erste Ergebnis!

Es ist also davon auszugehen, dass eine die Verstärkung Deckungsrückstellung zusätzlich auch noch zu einem Anstieg der Solvaspanne führt.

Teil d) (2 + 8 + 7 =17 Punkte)

Die Bilanz einer Pensionskasse habe folgende Struktur (siehe rechts):

$P = 100$	$R = 20$
	$V = 80$

Auf den Deckungsrückstellungen (V) lastet eine Garantieverzinsung von 2,5%, während auf dem Kapitalmarkt lediglich ein sicherer Zins von 2,0% erwirtschaftet werden kann.

Die Pensionskasse geht von folgendem vereinfachten Zusammenhang zwischen dem *Value-at-Risk* (x) als Risikomaß und der erwarteten Rendite (r) aus:

$$r(x) = 0,01 + 0,1x \text{ für } 0,1 \leq x \leq 0,4.$$

Die (vereinfachten) Solvabilitätsvorschriften verlangen freie unbelastete Mittel in Höhe von 5% der Deckungsrückstellung. Dies bedeutet, dass auch bei Wertverlust bei den Aktiva entsprechend dem *Value-at-Risk* eine 5%-ige Überdeckung der Deckungsrückstellung gegeben sein muss.

- d1) Wir erklärt sich, dass man auch bei einer „sicheren“ Anlage (z.B. Bundesanleihen) einen *Value-at-Risk* (hier im Beispiel 10%) unterstellen sollte?

Auch sichere festverzinsliche Wertpapiere wie beispielsweise Bundesanleihen unterliegen dem Zinsänderungsrisiko. Ein Zinsanstieg von 1,5% führt bei einer Duration von 7 zu einem (Kurswert-)Verlust von rund 10%! Ein Value at Risk von 10% für eine sichere Anlage ist also durchaus plausibel.

- d2) Bestimmen Sie die maximale Deklaration $d_{max}(x)$ als Funktion des Value at Risk x . Die erwartete Rendite der Assets soll dabei mit berücksichtigt werden.

Die Solvagrenzen sind erfüllt, der Wert der Aktiva (nach Stress) den Betrag der Verpflichtungen unter Berücksichtigung der Solva-Quote überdeckt. Es muss also gelten:

$$100(1 + r(x))(1 - x) \geq 80(1 + d)(1 + 0,05) \Leftrightarrow d \leq \frac{100}{84}(1 - x)(1 + r(x)) - 1.$$

Hieraus ergibt sich folgende Darstellung der Funktion $d_{max}(x)$:

$$d_{max}(x) := \frac{100}{84}(1 - x)(1 + r(x)) - 1 = \frac{1}{84}(17 - 91x - 10x^2).$$

- d3) Bestimmen Sie die (zulässige) *ALM*-Strategie mit der höchsten zu erwarteten Rendite!

Die Funktion $dmax(x)$ ist streng monoton fallend in x . In der obigen Darstellung für $dmax$ ist also x so zu wählen, dass $dmax(x) = 2,5\%$. Es ergibt sich

$$\frac{1}{84}(17 - 91x - 10x^2) = 0,025 = \frac{1}{40}$$
$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{8877} - 91}{20} = 0,160892$$

Bei einem Value at Risk von $x = 16\%$ ergibt sich eine zu erwartende Rendite von $2,6\%$, also nur knapp mehr als die Mindestverzinsung.

Aufgabe 4 (35 Punkte)

Das Jahresergebnis einer Pensionskasse kann buchhalterisch auf die Teilergebnisse aus der Kapitalanlage, aus den Verwaltungskosten, aus dem Risiko und aus sonstigen Quellen zerlegt werden.

i) Wie werden die einzelnen Teilergebnisse aus der Gewinn- und Verlustrechnung und ergänzenden internen Informationen festgestellt?

<i>Kapitalanlagen</i>	<i>Erträge aus Kapitalanlagen</i>
	<i>./. Aufwendungen für Kapitalanlagen</i>
	<i>./. rechnungsmäßige Verzinsung auf die „mittlere“ Deckungsrückstellung</i>
	= Ergebnis aus Kapitalanlagen
<i>Verwaltungskosten</i>	<i>Rechnungsmäßige Verwaltungskosten aus Beiträgen, beitragsfreien Anwartschaften und laufenden Leistungen</i>
	<i>./. Aufwendungen für Abschlusskosten</i>
	<i>./. Aufwendungen für den Versicherungsbetrieb</i>
	<i>./. Regulierungsaufwendungen</i>
	<i>./. sonstige Verwaltungsaufwendungen</i>
	= Ergebnis aus Verwaltungskosten
<i>Risiko</i>	<i>Vereinnahmte Nettobeiträge</i>
	<i>+ rechnungsmäßige Verzinsung auf die „mittlere“ Deckungsrückstellung</i>
	<i>./. gezahlte Leistungen ohne Regulierungsaufwand</i>
	<i>+ Veränderung der Deckungsrückstellung</i>
	= Risikoergebnis
<i>Sonstiges</i>	<i>Sonstige Erträge</i>
	<i>./. sonstige Aufwendungen, soweit sie nicht dem Verwaltungsaufwand zuzuordnen sind</i>
	<i>./. Steuern</i>
	= Ergebnis aus Verwaltungskosten

ii) Nehmen Sie Stellung zu folgenden Beobachtungen:

a) Warum wirkt sich eine Übersterblichkeit der Rentner in der Regel positiv auf das Risikoergebnis aus?

Bei Übersterblichkeit wird mehr Deckungsrückstellung frei als erwartet. Die Deckungsrückstellung fällt niedriger aus, die geringere Veränderung der Deckungsrückstellung bewirkt ein erhöhtes Risikoergebnis.

b) Die von der Pensionskasse festgestellte Kapitalverzinsung liegt leicht unter dem Rechnungszins. Gleichwohl ist das mittels der buchhalterischen Methode ermittelte Zinsergebnis positiv. Wie kann das sein?

In die durch die Pensionskasse festgestellte Kapitalverzinsung gehen sämtliche Kapitalanlagen der Pensionskasse ein. Die rechnungsmäßige Verzinsung wird aus der in der Regel kleineren mittleren Deckungsrückstellung hergeleitet. Hierauf kann der beobachtete Effekt resultieren.

c) die Anzahl der erwarteten Todes- und Invaliditätsfälle stimmt mit den biometrischen Rechnungsgrundlagen ebenso überein wie die Verheiratungshäufigkeit und das Alter der Ehegatten. Gleichwohl ergibt die Gewinnzerlegung einen Risikoverlust. Woran kann das liegen?

Das Risikoergebnis wird beeinflusst durch Veränderung der Deckungsrückstellung, in der der Wert der Verpflichtungen der Kasse abgebildet wird. Wenn die Anzahlen der Bestandsveränderungen nicht proportional zur Höhe der entsprechenden Verpflichtungen verlaufen, ergibt sich in der Tendenz ein ungünstigeres Risikoergebnis, z.B. wenn eher geringe Renten wegen Todes wegfallen oder eher hohe Renten durch Versorgungsfälle ausgelöst werden.

Aufgabe 5 (20 Punkte)

Ein an betrieblicher Altersversorgung interessierter Arbeitgeber erkundigt sich bei Ihnen nach deren Effizienz.

i) Nach welchem Kriterium lässt sich die Effizienz der betrieblichen Altersversorgung beurteilen?

Wenn die wirtschaftliche Auswirkung des Rentenversprechens geringer ist als die ihr entgegengebrachte Wertschätzung der Arbeitnehmer, erweist sich die Betriebsrente als effizient.

ii) Unter welchen Rahmenbedingungen erweist sich betriebliche Altersversorgung als effizient?

Betriebliche Altersversorgung kann als gestundeter Arbeitslohn interpretiert werden. Kann der Arbeitgeber den gestundeten Arbeitslohn im Unternehmen investieren, resultiert daraus eine Reduktion des Aufwandes im Vergleich zum Nutzen für den Arbeitgeber durch geringere Lohnkosten.

Die Nutzung des Risikoausgleichs im betrieblichen Kollektiv und eine günstige Rabattierung von Gruppenverträgen sind weitere positive Elemente der betrAV

Die lohnsteuerliche Förderung der betrieblichen Altersversorgung erhöht die Wirksamkeit der Investition in betrAV im Vergleich zur Auszahlung von zusätzlichem Barlohn um bis zu 100 % mit künftig abnehmender Tendenz.

Aufgabe 6 (20 Punkte)

Der Erfolg aktuarieller Beratung hängt wesentlich davon ab, dass die Fragen des Auftraggebers durch den Aktuar verstanden und mit angemessenen Methoden so beantwortet werden, dass der Auftraggeber die Antworten zu angemessenen Entscheidungen nutzen kann.

Welche Konsequenzen hat diese Erkenntnis auf die Abstimmung des Auftrags, die schriftliche Darstellung der Ergebnisse und deren Präsentation.

Es kommt zunächst darauf an, den Auftraggeber in seinem Argumentationsumfeld und bei seinem Problem „abzuholen“. Hierzu eignet sich ein Beratungsgespräch, bei dem das geschilderte Problem hinterfragt wird. Eine Skizze eines möglichen Untersuchungsergebnisses kann sich zur Probe, ob die Fragestellung durch den Aktuar richtig erfasst wurde, gut eignen.

Eine in hinreichend allgemein verständlicher Sprache aufgebaute Darstellung der Fragestellung, der Prämissen, der Methoden und der Ergebnisse in übersichtlicher Form erleichtert dem Leser das Verständnis für den Sachverhalt. Details werden im Anhang zu der Ausarbeitung dargestellt.

Eine Präsentation der Kernergebnisse in nachvollziehbarer Form mit Plausibilitätsüberlegungen und Anwendungsbeispielen rundet die actuarielle Beratung ab und erleichtert dem Auftraggeber das Verständnis und den Umgang mit den Ergebnis.