

Aufgabe 1 (40 Punkte)

Wir betrachten das im Repetitorium vorgestellte erweiterte Modell mit den drei Ausscheideursachen Fluktuation, Invalidität und Tod. Seien für einen x -jährigen Mann auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ die bekannten reellwertigen stetigen Zufallsvariablen definiert:

X_1 : Alter bei Eintritt des Ereignisses Fluktuation

X_2 : Alter bei Eintritt des Ereignisses Invalidität

X_3 : Alter bei Eintritt des Ereignisses Tod

1. Drücken Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Zufallsvariablen X_1 , X_2 und X_3 aus:

- q_x^1 : Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x innerhalb eines Jahres aus dem Bestand der internen Anwärter durch Invalidität auszuscheiden
- q_x^2 : Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x innerhalb eines Jahres aus dem Bestand der internen Anwärter durch Fluktuation auszuscheiden und noch im gleichen Jahr invalide zu werden
- q_x^3 : Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x innerhalb eines Jahres invalide zu werden
- q_x^4 : Wahrscheinlichkeit eines externen Anwärters des Alters x innerhalb eines Jahres invalide zu werden
- q_x^5 : Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x innerhalb eines Jahres invalide zu werden

2. Zeigen Sie, dass für beliebige Ereignisse $A, B, C \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\mathbb{P}(A|B \cap C) = \mathbb{P}(A|C) \implies \mathbb{P}(A|\bar{B} \cap C) = \mathbb{P}(A|C)$$

3. Bekanntlich wird im erweiterten Modell vorausgesetzt: $q_x^4 = q_x^5$. Zeigen Sie, dass unter dieser Voraussetzung folgt:

$$q_x^5 = q_x^1 + q_x^2$$

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus 2.

4. Stellen Sie q_x^2 in der üblichen Darstellung der Richttafeln so dar, dass nur noch 1-jährige Ausscheidewahrscheinlichkeiten bezogen auf $x \in \mathbb{N}_0$ in der Darstellung verwendet werden. Ermitteln Sie mit Hilfe dieser Darstellung ein $c_x \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$q_x^1 = q_x^5 \cdot c_x$$

Aufgabe 2 (20 Punkte):

1. Geben Sie die im Repetitorium vorgestellten Definitionen der prospektiven Reserve ${}_mV_x^{pro}$ und der retrospektiven Reserve ${}_mV_x^{retro}$ an und zeigen Sie:

$${}_mV_x^{pro} - {}_mV_x^{retro} = \frac{r^m}{m p_x} ({}_0V_x^{pro} - {}_0V_x^{retro})$$

Was bedeuten die Größen ${}_0V_x^{pro}$ und ${}_0V_x^{retro}$?

2. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der prospektiven Reserve, dass folgender Zusammenhang gilt:

$${}_mV_x^{pro} + {}_m\hat{P}_x = {}_m\hat{L}_x + v p_{x+m} {}_{m+1}V_x^{pro}$$

Erläutern Sie die Bedeutung der Größen ${}_m\hat{P}_x$ und ${}_m\hat{L}_x$.

Aufgabe 1 (40 Punkte)

Nr. 1:

Mit $X := \min_{1 \leq i \leq 3} \{X_i\}$ gilt:

$$q_x^1 = P [X_2 \leq x + 1, X_2 < X_1, X_2 \leq X_3 | X > x]$$

$$q_x^2 = P [X_1 \leq X_2 \leq X_3, X_2 \leq x + 1 | X > x]$$

$$q_x^3 = P [X_2 \leq \min\{x + 1, X_3\} | X > x]$$

$$q_x^4 = P [X_2 \leq \min\{x + 1, X_3\} | X_1 \leq x, X_2 > x, X_3 > x]$$

$$q_x^5 = P [X_2 \leq \min\{x + 1, X_3\} | X_2 > x, X_3 > x]$$

Nr. 2:

Anmerkung: Aufgrund der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit $P[A | \bar{B} \cap C]$ gilt $P[\bar{B} \cap C] \neq 0$ und damit auch $P[\bar{B} | C] \neq 0$.

$$\begin{aligned} P[A|C] &= P[A \cap B | C] + P[A \cap \bar{B} | C] \\ &= \underbrace{P[A | B \cap C] \cdot P[B | C]}_{\text{Voraussetzung}} + P[A | \bar{B} \cap C] \cdot P[\bar{B} | C] \\ &= P[A | C] \cdot P[B | C] + P[A | \bar{B} \cap C] \cdot P[\bar{B} | C] \end{aligned}$$

$$\implies P[A | C] \cdot (1 - P[B | C]) = P[A | \bar{B} \cap C] \cdot P[\bar{B} | C]$$

$$\implies P[A | C] \cdot P[\bar{B} | C] = P[A | \bar{B} \cap C] \cdot P[\bar{B} | C]$$

$$\implies P[A | C] = P[A | \bar{B} \cap C]$$

Nr. 3:

Sei $q_x^5 = q_x^4$, dann gilt nach Aufgabe 1 Nr. 1:

$$P \left[\underbrace{X_2 \leq x + 1, X_2 \leq X_3}_{:=A} \mid \underbrace{X_2 > x, X_3 > x}_{:=C} \right] =$$

$$P \left[X_2 \leq x + 1, X_2 \leq X_3 \mid \underbrace{X_1 \leq x}_{:=B}, X_2 > x, X_3 > x \right]$$

Mit Aufgabe 1 Nr. 2 folgt

$$\begin{aligned}q_x^5 &= P[A|C] = P[A|\overline{B} \cap C] \\&= P[X_2 \leq x+1, X_2 \leq X_3 | X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x] \\&= P[X_2 \leq \min\{x+1, X_3\} | X > x] \\&= q_x^3\end{aligned}$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned}q_x^1 + q_x^2 &= P[X_2 \leq x+1, X_2 < X_1, X_2 \leq X_3 | X > x] \\&\quad + P[X_2 \leq x+1, X_2 \geq X_1, X_2 \leq X_3 | X > x] \\&= P[X_2 \leq x+1, X_2 \leq X_3 | X > x] \\&= q_x^3\end{aligned}$$

$$\text{Also } q_x^1 + q_x^2 = q_x^3 = q_x^5.$$

Nr. 4

Die übliche Darstellung der Richttafeln für q_x^2 lautet:

$$q_x^2 = s_x \cdot \frac{1}{2} i_{x+\frac{1}{2}}$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned}i_x &= \frac{1}{2} i_x + \frac{1}{2} p_x^a \cdot \frac{1}{2} i_{x+\frac{1}{2}} \\ \implies \frac{1}{2} i_{x+\frac{1}{2}} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot i_x}{\frac{1}{2} p_x^a} = \frac{\frac{1}{2} \cdot i_x}{1 - \frac{1}{2}(i_x + q_x^{aa})}\end{aligned}$$

Nach Nr. 3 gilt

$$q_x^5 = q_x^1 + q_x^2$$

wobei die übliche Notation der Richttafeln lautet:

$$\begin{aligned}q_x^1 &= \hat{i}_x \\q_x^5 &= i_x\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}i_x &= \hat{i}_x + s_x \cdot \frac{1}{2} i_{x+\frac{1}{2}} \\ \implies \hat{i}_x &= i_x - s_x \cdot \frac{1}{2} i_{x+\frac{1}{2}} \\ &= i_x - s_x \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot i_x}{1 - \frac{1}{2}(i_x + q_x^{aa})} \\ &= i_x \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\frac{1}{2} \cdot s_x}{1 - \frac{1}{2}(i_x + q_x^{aa})}\right)}_{:=c_x}\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Nr. 1

Prospektive Reserve zum Alter $x + m$:

$${}_m V_x^{pro} = \sum_{k \geq 0} v^k {}_k p_{x+m} ({}_{m+k} \hat{L}_x - {}_{m+k} \hat{P}_x) \quad \text{für } m = 0, 1, \dots$$

Retrospektive Reserve zum Alter $x + m$:

$${}_m V_x^{retro} = \frac{r^m}{m p_x} \left[{}_0 V_x^{retro} + \sum_{k=0}^{m-1} v^k {}_k p_x ({}_k \hat{P}_x - {}_k \hat{L}_x) \right] \quad \text{für } m = 0, 1, \dots \text{ und } m p_x \neq 0$$

${}_0 V_x^{retro}$: eingesetztes (tatsächliches) Anfangskapital

${}_0 V_x^{pro}$ stellt den Betrag dar, der zum Beginn des Vertrags vorhanden sein muss, um die zukünftigen Leistungen unter Berücksichtigung der zukünftigen Prämien rechnerungsmäßig leisten zu können (${}_0 V_x^{pro} = {}_0 B_x - {}_0 B_x^P$)

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 v^m {}_m p_x {}_m V_x^{retro} &= {}_0 V_x^{retro} + \sum_{k=0}^{m-1} v^k {}_k p_x ({}_k \hat{P}_x - {}_k \hat{L}_x) \\
 &= {}_0 V_x^{retro} + \underbrace{\sum_{k \geq 0} v^k {}_k p_x ({}_k \hat{P}_x - {}_k \hat{L}_x)}_{-{}_0 V_x^{pro}} - \sum_{k \geq m} v^k {}_k p_x ({}_k \hat{P}_x - {}_k \hat{L}_x) \\
 &= {}_0 V_x^{retro} - {}_0 V_x^{pro} + v^m {}_m p_x \underbrace{\sum_{k \geq 0} v^k {}_k p_{x+m} ({}_{m+k} \hat{L}_x - {}_{m+k} \hat{P}_x)}_{{}_m V_x^{pro}}
 \end{aligned}$$

Also mit $v^m = \frac{1}{r^m}$:

$${}_m V_x^{pro} - {}_m V_x^{retro} = \frac{1}{v^m {}_m p_x} ({}_0 V_x^{pro} - {}_0 V_x^{retro}) = \frac{r^m}{{}_m p_x} ({}_0 V_x^{pro} - {}_0 V_x^{retro})$$

Nr. 2

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 {}_m V_x^{pro} &= \sum_{k \geq 0} v^k {}_k p_{x+m} ({}_{m+k} \hat{L}_x - {}_{m+k} \hat{P}_x) \\
 &= {}_m \hat{L}_x - {}_m \hat{P}_x + \sum_{k \geq 1} v^k {}_k p_{x+m} ({}_{m+k} \hat{L}_x - {}_{m+k} \hat{P}_x) \\
 &= {}_m \hat{L}_x - {}_m \hat{P}_x + v {}_p_{x+m} \sum_{k \geq 1} v^{k-1} {}_{k-1} p_{x+m+1} ({}_{m+k} \hat{L}_x - {}_{m+k} \hat{P}_x) \\
 &= {}_m \hat{L}_x - {}_m \hat{P}_x + v {}_p_{x+m} \sum_{k \geq 0} v^k {}_k p_{x+m+1} ({}_{m+1+k} \hat{L}_x - {}_{m+1+k} \hat{P}_x) \\
 &= {}_m \hat{L}_x - {}_m \hat{P}_x + v {}_p_{x+m} {}_{m+1} V_x^{pro}
 \end{aligned}$$

$$\implies {}_m V_x^{pro} + {}_m \hat{P}_x = {}_m \hat{L}_x + v {}_p_{x+m} {}_{m+1} V_x^{pro}$$

${}_m \hat{P}_x$: Erwartungswert der Prämienleistungen des Jahres $]m, m+1]$, die durch Erreichen des Alters $x+m$ in der Hauptgesamtheit verursacht werden, diskontiert auf den Beginn des Jahres ($m = 0, 1, \dots$)

${}_m \hat{L}_x$: Erwartungswert der gesamten Leistung, die durch Erreichen des Altersintervalls $]x+m, x+m+1]$ ausgelöst werden kann, diskontiert auf den Beginn dieses Jahres

Aufgabenvorschlag für die Klausur „Spezialwissen Pensionsversicherungsmathematik“ (Oktober 2012)

mit Lösungshinweisen

Prüfungsteil Goecke (umfasst 45 Punkte von den insgesamt 180 Punkten der Klausur)

Teil a) (7 Punkte)

Erläutern Sie allgemein die Ziele einer kapitalgedeckten Altersversorgung. Welche Risiken sehen Sie bei der kapitalgedeckten Altersversorgung im Vergleich zu einem umlagefinanzierten System wie dem der Gesetzlichen Rentenversicherung?

Ziel der kapitalgedeckten Altersversorgung ist es, die Versorgungsleistungen aus einem Kapitalstock zu finanzieren. Die Bemessung des erforderlichen Kapitalstocks erfolgt mit Hilfe der Methoden der Versicherungsmathematik. Das Kapitaldeckungsverfahren ist getragen von der Vorstellung, dass die Bereitstellung eines Kapitalstock Investitionen in die Realwirtschaft ermöglicht. Die aus den Investitionen erwirtschafteten Erträge (Entlohnung des Produktionsfaktors Arbeit) fließen dann direkt oder indirekt in die Altersvorsorge. Ziel der kapitalgedeckten Altersversorgung ist es also, die (Altersvorsorge-) Sparer und auch die Leistungsempfänger fair am Produktionsfaktor Kapital zu beteiligen. Im Unterschied hierzu sichert die umlagefinanzierte Altersversorgung (wie beispielsweise die Gesetzliche Rentenversicherung) eine Teilhabe am Produktionsfaktor Arbeit, denn steigende Löhne führen c.p. auch zu steigenden Rentenansprüchen. Bei einem umlagefinanzierten System wirken demografische Veränderungen unmittelbar auf die Umlagen und/oder die Leistungen. Aber auch eine kapitalgedeckte Altersversorgung ist nicht immun gegen demografische Veränderungen.

Teil b) (8 Punkte)

Im Rundschreiben R 4/2011 (VA) – Hinweise zur Anlage des gebundenen Vermögens von Versicherungsunternehmen – werden die Vorschriften des § 54 VAG und der hierzu ergangenen Anlageverordnung erläutert und interpretiert. Insbesondere werden „wesentliche Risiken“ der Kapitalanlage benannt. Um welche Risiken handelt es sich dabei? Erläutern Sie in wenigen Stichworten die einzelnen Risiken!

Als Lösungsvorschlag wird im Folgenden aus dem o.g. Rundschreiben zitiert (vgl. Abschnitt B.2.1 Unterpunkt c). Es reichte natürlich eine sinngemäß richtige Darstellung!

„i) Marktrisiken (das Marktrisiko bezeichnet das Risiko, das sich direkt oder indirekt aus Schwankungen in der Höhe bzw. in der Volatilität der Marktpreise für die Vermögenswerte und Finanzinstrumente ergibt; das Marktrisiko schließt das Währungsrisiko und Zinsänderungsrisiko ein);

ii) Kreditrisiken (das Kreditrisiko bezeichnet das Risiko, das sich aufgrund eines Ausfalls oder aufgrund einer Veränderung der Bonität oder der Bewertung von Bonität (Credit Spread) von Wertpapieremittenten, Gegenparteien und anderen Schuldnern ergibt, gegenüber denen die Versicherungsunternehmen Forderungen haben);

iii) **Konzentrationsrisiken** (das **Konzentrationsrisiko** bezeichnet das **Risiko**, das sich dadurch ergibt, dass das **Versicherungsunternehmen** einzelne **Risiken** oder **stark korrelierte Risiken** eingeht, die ein **bedeutendes Schaden- oder Ausfallpotenzial** haben);

iv) **Liquiditätsrisiken** (das **Liquiditätsrisiko** bezeichnet das **Risiko**, dass **Versicherungsunternehmen** auf Grund **mangelnder Fungibilität** nicht in der Lage sind, ihren **finanziellen Verpflichtungen** bei **Fälligkeit** nachzukommen);

v) **Rechtsrisiken** (der **Anlage** **innewohnende rechtliche Risiken**, insbesondere **komplexe Vertragsbedingungen** und **ausländische Rechtsnormen**, sowie **externe Risiken**, die vor allem aus einer **veränderten Gesetzgebung** und **Rechtsprechung** resultieren können).“

Teil c) (10 + 10 Punkte)

Die Bilanz einer Pensionskasse habe folgende Struktur:

$P = 100$	$R = 20$
	$V = 80$

Auf den Deckungsrückstellungen (V) lastet eine Garantieverzinsung von 3%, während auf dem Kapitalmarkt lediglich ein sicherer Zins von 2,5% erwirtschaftet werden kann. Für risikobehaftete Anlagen (Aktien) wird eine Zusatzrendite (Risikoprämie) von 5% erwartet.

Die (vereinfachten) Solvabilitätsvorschriften verlangen freie unbelastete Mittel in Höhe von 4,4% der Deckungsrückstellung. Ferner wird ein Stresstest verlangt, der fordert, dass auch bei einem simulanten Wertverlust von 10% auf Zinspapieren und von 30% auf Aktien noch hinreichend Eigenmittel vorhanden sind.

- c1) *Strategie1*: Das gesamte Portfolio wird sicher angelegt und es wird eine maximale Überschussbeteiligung gewährt. Kann die Pensionskasse über die Garantieverzinsung hinaus überhaupt eine Überschussbeteiligung gewähren? Wenn ja – in welcher Höhe maximal?
- c2) *Strategie2*: Es wird keine Überschussbeteiligung gewährt und eine höchstmögliche Aktienquote AQ_{max} gewählt. Was wäre die höchstmögliche Aktienquote AQ_{max} für das Anlageportfolio unter Beachtung der Solvabilitätsregeln?

Kommentieren Sie kurz beide Strategien!

Zu c1) **Wir bezeichnen mit x den Überzins, denn gilt für die Deckungsrückstellungen in einem Jahr:** $V' = (1,03 + x) \cdot 80 = 82,5 + 80x$ **und für den Sollbetrag der Solvabilität:** $Solva = 0,044 \cdot V' = 0,044 \cdot (82,5 + 80x) = 3,6256 + 3,52x$.

Für den Wert der Asset nach Stress (bei Aktienquote α):

$$P(\text{nachStress}) = 100(1 - \alpha)(1 - 0,1) + 100\alpha(1 - 0,3) = 90 - 20\alpha$$

Es muss gelten: $P(\text{nachStress}) \geq V' + Solva$

$$\Leftrightarrow 90 - 20\alpha \geq (82,5 + 80x) + (3,6256 + 3,52x)$$

$$\Leftrightarrow 86,0256 + 83,52x \leq 90 - 20\alpha$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{3,9744 - 20\alpha}{83,52} - \approx 0,0476 - 0,2395\alpha$$

Bei einer Aktienquote von $\alpha = 0$ beträgt die maximale Überschussbeteiligung beträgt also rund 4,76%; die Gesamtverzinsung der Versicherungsguthaben ist dann 7,76%.

Es ist offensichtlich, dass dies keine akzeptable Strategie ist, denn hierdurch würden binnen eines Jahres *mit Sicherheit* alle Reserven aufgezehrt.

Zu c2): Wir bezeichnen mit α_{\max} die maximal mögliche Aktienquote. Bei einer Deklaration von $x=0$ ergibt sich somit aus der obigen Ungleichung:

$$0 = 0,0476 - 0,2395\alpha_{\max}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{\max} = \frac{0,0476}{0,2395} = 0,1987$$

Die maximale Aktienquote bei einer Überschussbeteiligung von 0 beträgt also rund 20%. Im Vergleich zur Strategie in Teil c1) wäre diese Strategie akzeptabel, denn bei Strategie c2) werden nur im (relativen) *worst case* alle Reserven aufgezehrt.

Die dargestellte Situation der Pensionskasse muss als kritisch bewertet werden, da durch eine sichere Kapitalanlage die Garantieverzinsung nicht erwirtschaftet werden kann. Eine sichere Kapitalanlage (Aktienquote = 0) führt also langfristig zu einem vollständigen Verzehr der Reserven und schließlich zur Überschuldung.

Ist also ein Anstieg der Zinsen nicht abzusehen, muss die Pensionskasse bereit sein, Kapitalmarktrisiken einzugehen. Um im *Erwartungswert* den Garantiezins von 3% erwirtschaften zu können ist eine Mindestaktienquote von 10% erforderlich (folgt aus dem Ansatz $3\% = 2,5\% + \alpha \cdot 5\%$). Da die Pensionskasse ins Risiko gehen muss, um die Verpflichtungen dauerhaft erfüllen zu können, ist es naheliegend, dass die Pensionskasse versuchen sollte, die Reservesituation zu stärken. Dies spricht dafür, die Überschussbeteiligung auf Null zu setzen.

Eine Stärkung der Reserve ist also nur zu erwarten, wenn die Pensionskasse eine Aktienquote von mindestens 10% wählt. Bei einer Aktienquote von 20% beträgt die erwartete Rendite 3,5%. Die erwartete Reservequote läge dann bei

$$RQ(\text{erwartet}) = \frac{100 \cdot 1,035 - 80 \cdot 1,03}{100 \cdot 1,035} = 20,39\% .$$

Man sieht, dass der Aufbau der Reservequote ein mühsamer Prozess ist.

Teil d) (10 Punkte)

Skizzieren Sie die derzeit gültigen Regeln zur Solvabilität von Pensionskassen. Kommentieren Sie dabei, inwieweit diese Regeln geeignet sind, die dauerhafte Erfüllbarkeit der Verträge sicherzustellen. Wo sehen Sie die wesentlichen Stärken und Schwächen der derzeit gültigen Regeln?

Die derzeitigen Regeln zur Solvabilität sehen eine sehr einfache Formel zur Berechnung der Solvabilitätsspanne vor:

$$\text{SolvaSpann} = 0,04 \cdot (\text{DeckRSt} + \text{NettoBeitragsÜberträge}) \cdot \text{RVQuote} \\ + 0,003 \cdot \text{RisikoKapital} \cdot \text{RVQuote}$$

Hinweis: Die obige Formel ist gegenüber der Vorschriften der KapAusstV geringfügig vereinfacht.

Die Solvabilitätsspanne ist die Summe aus einem Solva-Betrag für das Kapitalanlagerisiko (Erstes Ergebnis) und einem Solva-Betrag für das versicherungstechnische Risiko (Zweites Ergebnis)

Für das Anlagerisiko wird sehr pauschal eine Eigenmittelunterlegung von 4% der Deckungsrückstellung verlangt. Insbesondere fließt in die Berechnung nicht die konkrete Anlagestruktur ein. Diese sehr pauschale Berechnung ist nur im Kontext mit den detaillierten Vorschriften zur Anlage des gebundenen Vermögens und der HGB-Bewertung der Kapitalanlagen zu rechtfertigen. Implizit geht das derzeitige Solvabilitätsmodell davon aus, dass die gesetzlichen Anlagegrenze bereits sicherstellen, dass die Kapitalanlagen insgesamt hinlänglich sicher sind.

Die pauschale Bewertung des Kapitalanlagerisikos führt jedoch zu paradoxen Ergebnissen, wenn beispielsweise eine Pensionskasse für die Bewertung der Verpflichtungen einen besonders vorsichtigen (niedrigen) Rechnungszins wählt. Damit steigen die Deckungsrückstellungen und zugleich steigt der Bedarf an Eigenmitteln, obwohl die Sicherheit gestiegen ist.

Auch das versicherungstechnische Risiko wird im derzeitigen System nur unzulänglich erfasst; das Langlebigkeitsrisiko wird derzeit von der Standardformel gar nicht erfasst.

**Klausur Spezialwissen Pensionsversicherungsmathematik
Oktober 2012**

Aufgabe 4

a) (15 Punkte)

Geben Sie einen Überblick über den Inhalt eines Versicherungsmathematischen Gutachtens, das den IVS-Grundsätzen entspricht, und erläutern Sie die einzelnen Positionen kurz.

Lösung:

Ein versicherungsmathematisches Gutachten, das IVS-Grundsätzen entspricht, soll folgende Positionen umfassen:

1. Beschreibung des Auftrages
2. Darstellung der bewerteten Versorgungsverpflichtungen
 - 2.1. Rechtsgrundlagen
 - 2.2. Begünstigte Personenkreise
 - 2.3. Leistungsbestimmende Elemente der Versorgungsverpflichtungen
3. Erfassung bzw. Übertragung des Datenbestandes
4. Angabe der verwendeten Rechnungsgrundlagen
5. Darstellung der versicherungsmathematischen Formeln und Bewertungsverfahren
 - 5.1 Rechtsgrundlagen für die Rückstellungsbildung
 - 5.2 Versicherungsmathematische Formeln
 - 5.3 Ausübung von Wahlrechten
 - 5.4 Versicherungsmathematische Näherungsverfahren
 - 5.5 Festlegung aus Betriebsprüfungen
6. Darstellung der Ergebnisse
 - 6.1 Einzelergebnisse
 - 6.2 Zusammenfassung der Einzelergebnisse
 - 6.3 Darstellung der Gesamtergebnisse
7. Testat des Gutachters

b) (15 Punkte)

Stellen Sie die Passagen des Technischen Geschäftsplanes einer Pensionskasse dar, in denen

i) die Verrentungsfaktoren für einen Tarif mit laufenden Einmalbeiträgen hergeleitet werden und

ii) die Bruttoprämien für einen Tarif mit laufenden Prämien dargestellt werden.
Berücksichtigen Sie dabei die Möglichkeit dauerhafter oder einmaliger Prämienveränderungen aufgrund der Anknüpfung der Prämien an die Gehaltsentwicklung.

Lösung:

- i) Seien
- x das Alter des Versicherten im Zeitpunkt der Beitragsentrichtung
 - A_x der Barwert der Leistungen im Alter x
 - B der Einmalbeitrag
 - β Verwaltungskosten in % des Beitrages

γ_1 Verwaltungskosten in % der versicherten Anwartschaft je Jahr in der Aufschubzeit

γ_2 Verwaltungskostensatz in der Auszahlungsphase

Dann lautet die Formel für die Verrentungsfaktoren F_x für einen Einmalbeitrag B im Alter x

$$F_x = \frac{(1 - \beta) \cdot B}{(1 + \gamma_2) \cdot A_x + \gamma_1 \cdot a_{\overline{x-z}|}^a}$$

ii) Mit den Bezeichnungen gemäß i) gilt für die Bruttoprämie B_x im Alter x

$$B_x = \frac{(1 + \gamma_2) \cdot A_x}{(1 - \beta) \cdot a_{\overline{x-z}|}^a}$$

Bei einer einmaligen Prämienreduktion im Alter $x+m$ wird die Prämienreduktion als negativer Einmalbeitrag im Alter $x+m$ aufgefasst. Bei einer dauerhaften Reduktion der Prämie ab Alter $x+m$ wird die Leistungsreduktion so bestimmt, dass sie einer laufenden Prämie in Höhe der Prämienreduktion entspricht.

Aufgabe 5

Einer Ihrer Mandanten, der Geschäftsführer (nicht Gesellschafter) einer GmbH, trägt sich mit dem Gedanken, eine arbeitgeberfinanzierte betriebliche Altersversorgung einzuführen.

a) (10 Punkte)

Unterstützen Sie den Mandanten dabei, sein Vorhaben vor den Gesellschaftern der GmbH zu begründen. Stellen Sie das Effizienzkriterium in den Vordergrund und diskutieren Sie Kriterien für die Höhe des der betrAV äquivalenten Lohnzuschlages.

Lösung:

Die Effizienz ergibt sich aus dem wirtschaftlichen Vergleich der betrieblichen Altersversorgung mit einer wertgleichen alternativen Leistung, etwa höherem Barlohn. Während der höhere Barlohn mit dem individuellen Grenzsteuersatz und ggf. Sozialabgaben belastet ist, wird die betriebliche Altersversorgung lohnsteuerlich gefördert. Wesentlich für die Einschätzung der wertgleichen alternativen Leistung ist der dabei verwendete Zinssatz. Die Effizienz ist besonders groß, wenn dieser Zins beim Arbeitnehmer niedriger als beim Arbeitgeber anzusetzen ist.

b) (10 Punkte)

Welche Rolle spielt der Dotierungsrahmen bei der Einführung der betrAV und wie begleiten Sie diese Rolle als versicherungsmathematischer Sachverständiger?

Lösung:

Der Dotierungsrahmen ist die Gesamtheit der wirtschaftlichen Folgen der betrAV. Der Arbeitgeber legt den Dotierungsrahmen fest. Alternative Leistungsgestaltungen, die im Rahmen der Mitbestimmungsrechte der Arbeitnehmer gefordert werden können, müssen den Dotierungsrahmen wahren. Der Dotierungsrahmen kann auch als wirtschaftliche Geschäftsgrundlage der betrAV dienen und die Angemessenheit späterer Änderungen begründen.

c) (10 Punkte)

Erläutern Sie Ihrem Mandaten die wirtschaftlichen Kriterien für die Wahl des Durchführungsweges.

Lösung:

Den mit Abstand größten Einfluss auf die wirtschaftlichen Folgen der BetrAV hat die Rendite der eingesetzten Mittel, die wiederum entscheidend davon abhängt, ob interner Investitionsbedarf für die Mittel besteht oder nicht. Für externe Durchführungswege ist die wirtschaftliche Beurteilung der betrieblichen Altersversorgung davon abhängig, ob die Obergrenzen für die lohnsteuerliche Anerkennung der Maßnahme eingehalten werden oder nicht. Bei kleinen Beständen sind zudem zufallsbedingte Risikoschwankungen zu beachten.

Aufgabe 6 (15 Punkte)

Wie erklären Sie einem versicherungsmathematischen Laien,

- i) dass der Barwert mit steigendem Zins fällt,
- ii) welche Relation zwischen den Leistungen und der Gehaltssumme eines Versorgungswerkes bei fehlender Kapitaldeckung in einem Bestand mit stabilem Neuzugang langfristig besteht und
- iii) wie sich ein Vermögensstock auf die Höhe des Aufwandes für Altersversorgung auswirkt.

Lösung:

i) Der Barwert einer Versorgungsleistung entspricht dem Kapitalbetrag, der zusammen mit dem Zinsertrag ausreicht, die Versorgungsleistung zu erbringen. Je größer der künftige Zinsertrag ist, desto geringer ist der am Beginn erforderliche Kapitalbetrag. Der Barwert ist also umso niedriger, je höher der Zins ist.

ii) In einem stabilen Bestand sind die einzelnen Alter so mit Anwärtern und Leistungsempfängern besetzt, wie es dem Verlauf einer Verpflichtung vom Eintritt in das Versorgungssystem bis zur Erfüllung der Verpflichtungen entspricht. Näherungsweise kann von etwa 24-27 Jahresrenten in der Leistungsphase und von 36 Finanzierungsjahren auszugehen. Gewichtet mit dem Versorgungsniveau NIV, ausgedrückt in Prozent des Gehaltes im Versorgungsfall, ergibt sich daraus für die Relation R aus Leistungen zu Gehältern

$$R = \frac{24}{36} \cdot NIV = \frac{2}{3} \cdot NIV \text{ bis } \frac{27}{36} \cdot NIV = \frac{3}{4} \cdot NIV$$

iii) Ohne Vermögen entspricht der Finanzierungsaufwand A der Höhe der jeweils fälligen Leistungen L. Bei Vorhandensein eines Vermögens V und einem Zins von p % reduziert sich der Finanzierungsaufwand auf $A = L - p \cdot V$. Hinzu kommt ggf. ein Aufwand für die Anpassung der Deckungsmittel.