

Aufgabe 1 (45 Punkte)

1. Stellen Sie für das im Repetitorium vorgestellte erweiterte Modell mit drei Ausscheideursachen die Hauptgesamtheit, sowie die Nebengesamtheiten graphisch dar und benennen Sie die zugehörigen Ausscheide- und Übergangswahrscheinlichkeiten (unter Berücksichtigung des Aktivenbestandes und des Gesamtbestandes, jedoch ohne Berücksichtigung von Witwen).
2. Im Rahmen des erweiterten Modells werden drei reellwertige stetige Zufallsgrößen X_1, X_2, X_3 im Zusammenhang mit den drei vorzeitigen Ausscheideursachen aus der Hauptgesamtheit definiert.
 - (a) Geben Sie die Bedeutung dieser drei Zufallsgrößen an.
 - (b) Beschreiben Sie mit diesen Zufallsgrößen die folgenden Gesamtheiten:
 - Gesamtheit der Personen, die im Alter x zum Aktivenbestand gehören
 - Gesamtheit der Personen, die im Alter x zum Gesamtbestand gehören
 - Gesamtheit der Personen, die im Alter x zu der Hauptgesamtheit gehören und innerhalb eines Jahres aufgrund der Ursache 2 ausscheiden
3. Wir betrachten die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
 - q_x^1 : Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x , innerhalb eines Jahres zu sterben
 - q_x^2 : Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x , innerhalb eines Jahres durch Tod als interner Anwärter aus der Gesamtheit der internen Anwärter auszuschneiden
 - q_x^3 : Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x , innerhalb eines Jahres durch Fluktuation auszuschneiden und noch im gleichen Jahr als externer Anwärter zu sterben
 - q_x^4 : Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x , innerhalb eines Jahres durch Invalidität auszuschneiden und noch im gleichen Jahr als Invaliden zu sterben
 - q_x^5 : Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x , innerhalb eines Jahres durch Fluktuation auszuschneiden und im gleichen Jahr sowohl noch invalide zu werden als auch als Invaliden zu sterben
 - (a) Stellen Sie mittels der Zufallsgrößen X_1, X_2, X_3 die 5 Wahrscheinlichkeiten q_x^1, \dots, q_x^5 dar und zeigen Sie mit Hilfe dieser Darstellung $q_x^1 = q_x^2 + q_x^3 + q_x^4 + q_x^5$. (Hinweis: Zeigen Sie zuerst $q_x^2 + q_x^3 = P\{X_3 < X_2, X_3 \leq x + 1 | X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}$. Betrachten Sie dann $q_x^4 + q_x^5$.)
 - (b) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeiten q_x^4 und q_x^5 in der üblichen Darstellung der Richttafeln dar und interpretieren Sie die in dieser Darstellung vorkommenden Wahrscheinlichkeiten. Erläutern Sie, welche zusätzliche Annahme die Richttafeln somit zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten treffen.

Aufgabe 2 (15 Punkte)

1. Im Rahmen der Bewertung von Pensionsverpflichtungen nach IAS 19 gilt bekanntlich die folgende Bilanzgleichung:

$$DBO + SC + IC - EBP = EDBO$$

Erläutern Sie die Bedeutung der Größen DBO, SC, IC, EBP und EDBO.

2. Für die Bewertung von Pensionsverpflichtungen gemäß IAS 19 ist die Projected Unit Credit Methode vorgeschrieben. Die Reserve wird in diesem Finanzierungsverfahren üblicherweise wie folgt ermittelt:

$${}_m V_x = \sum_{k=0}^{n-m} v^k {}_k p_{x+m}^a \frac{m}{m+k} {}_{m+k} \hat{L}_x \quad m = 0, 1, \dots, n$$

- (a) Zeigen Sie mittels der versicherungsmathematischen Bilanzgleichungen, dass sich die Prämie in der Projected Unit Credit Methode wie folgt darstellen lässt:

$${}_m \hat{P}_x = \sum_{k=1}^{n-m} v^k {}_k p_{x+m}^a \frac{1}{m+k} {}_{m+k} \hat{L}_x \quad m = 0, 1, \dots, n-1$$

- (b) Zeigen Sie für eine Pensionszusage, die neben einer lebenslänglich laufenden Altersrente keine weiteren Leistungen vorsieht, dass in der Projected Unit Credit Methode ein steigender Prämienverlauf angesetzt wird, d.h. es gilt:

$${}_m \hat{P}_x \leq {}_{m+1} \hat{P}_x, \quad m = 0, 1, \dots, n-2$$

Prüfungsbereiche:

- Die Kapitaldeckung von Pensionsverpflichtungen
- Das Risikomanagement einer Versorgungseinrichtung
- Angemessene Kapitalausstattung

Aufgabe 3

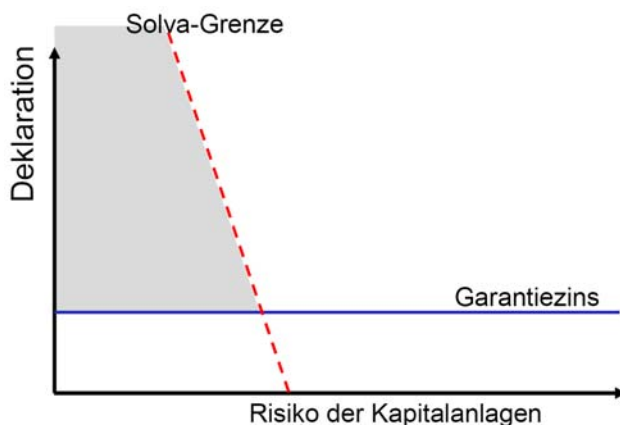
a) (15 Punkte)

Der § 54 Absatz 1 VAG hat folgenden Wortlaut:

„Die Bestände des Sicherungsvermögens (§ 66) und das sonstige gebundene Vermögen gemäß Absatz 5 (gebundenes Vermögen) sind unter Berücksichtigung der Art der betriebenen Versicherungsgeschäfte sowie der Unternehmensstruktur so anzulegen, dass möglichst große Sicherheit und Rentabilität bei jederzeitiger Liquidität des Versicherungsunternehmens unter Wahrung angemessener Mischung und Streuung erreicht wird.“

- Erläutern Sie die besondere Bedeutung des Sicherungsvermögens für versicherungsgebundene Zusagen der betrieblichen Altersversorgung
- Nennen Sie beispielhaft die Relevanz der Formulierung *„unter Berücksichtigung der Art der betriebenen Versicherungsgeschäfte sowie der Unternehmensstruktur“* für eine Pensionskasse.
- Erläutern Sie die Begriffe *Mischung* und *Streuung*.

b) (20 Punkte)



- Erläutern Sie die gegenseitigen Abhängigkeit des Asset- und des Liability-Managements anhand der obigen Abbildung.
Hinweis zur Abbildung: Unter *Deklaration* verstehen wir den Zinssatz d , mit dem die Versichertenguthaben im kommenden Jahr verzinst werden.

- Leiten Sie eine Darstellung für die oben skizzierte „Solva-Grenze“ unter folgenden einfachen Annahmen her:

Modellierung des Portfolios: Das Portfolio wird zusammengesetzt aus Bonds und Aktien. Mit Hilfe der Aktienquote $\alpha \in [0, 1]$ messen wir das Risiko der Kapitalanlagen. Abhängig von der Aktienquote bestimmt sich auch die *erwartete Rendite* des Portfolios r aus der Gleichung : $r = (1 - \alpha) \cdot r_B + \alpha \cdot r_A = (1 - \alpha) \cdot 0,025 + \alpha \cdot 0,075$

Bestimmung der Solvabilität: Es wird verlangt, dass auch bei einem (simultanen) Stress von $-s_A = -40\%$ für Aktien und $-s_B = -10\%$ für Bonds Eigenmittel in Höhe von $SQ = 4,4\%$ der Deckungsrückstellung (V) vorhanden sind.

Ausgangsbilanz:

P	R
	V

$$P = 100; \quad R = 100 \cdot \rho; \quad V = 100 \cdot (1 - \rho); \quad \rho = 20\% : \text{Reservequote.}$$

- Bestimmen Sie die Aktienquote $\alpha \in [0, 1]$ und die Deklaration d so, dass die Reservequote im *Erwartungswert* (also unter der Annahme, dass die erwartete Portfoliorendite realisiert wird) unverändert bleibt.

c) (10 Punkte)

Der § 53c Absatz 1 VAG hat folgenden Wortlaut:

„Versicherungsunternehmen sind verpflichtet, zur Sicherstellung der dauernden Erfüllbarkeit der Verträge stets über freie unbelastete Eigenmittel mindestens in Höhe der geforderten Solvabilitätsspanne zu verfügen, die sich nach dem gesamten Geschäftsumfang bemisst. Ein Drittel der geforderten Solvabilitätsspanne gilt als Garantiefonds.“

- Bekanntermaßen müssen Deckungsrückstellungen mit vorsichtigen Rechnungsgrundlagen kalkuliert werden (§ 65 VAG i.V.m DeckRV). Warum reicht dies aus Sicht des Gesetzgebers nicht aus, um die dauerhafte Erfüllbarkeit der Verträge sicherzustellen?
- Skizzieren Sie die derzeit gültigen Regeln zur Solvabilität von Pensionskassen. Kommentieren Sie dabei, inwieweit diese Regeln geeignet sind, die dauerhafte Erfüllbarkeit der Verträge sicherzustellen.

Aufgabe 4

a) (15 Punkte)

Geben Sie einen Überblick über den Inhalt eines Technischen Geschäftsplanes einer Pensionskasse. Stellen Sie beispielhaft Formeln für Beiträge und Deckungsrückstellung dar.

b) (20 Punkte)

Der Jahresabschluss einer Pensionskasse weist folgende Positionen auf:

Position	Tsd. Euro
Bruttobeiträge	500
Kapitalerträge	800
Leistungen davon Regulierung 3 Tsd. Euro	200
Aufwand für Versicherungsbetrieb	10
Zuführung zur Deckungsrückstellung	710
Aufwand für Kapitalanlage	100
Rohergebnis	280

Die Deckungsrückstellung zum Vorstichtag betrug 15.290 Tsd. Euro. Der Rechnungszins beträgt 3 %. Beiträge und Leistungen sind über das Jahr gleichmäßig verteilt. Als Inkassokosten sind 3 % der Bruttobeiträge kalkuliert, rechnermäßig steht 1 % der Leistungen für die Regulierung zur Verfügung.

Zerlegen Sie das Rohergebnis buchhalterisch nach Ergebnisquellen (Kapitalanlage, Risiko und Verwaltungskosten). .

Aufgabe 5

Einer Ihrer Mandanten möchte eine betriebswirtschaftliche Analyse seiner betrieblichen Altersversorgung vornehmen, ohne zu wissen, was das eigentlich genau ist.

a) (10 Punkte)

Klären Sie den Mandanten über die Möglichkeiten auf, mit Hilfe des Modells zur nachsteuerlichen Analyse von Pensionszusagen Entscheidungen zur betrieblichen Altersversorgung zu begründen..

b) (5 Punkte)

Welche unmittelbaren und mittelbaren Wirkungen der betrieblichen Altersversorgung werden in dem Modell gemessen?

c) (5 Punkte)

Erläutern Sie den Begriff der „Spur“ der betrieblichen Altersversorgung.

d) (10 Punkte)

Diskutieren Sie die Prämissen für die Ermittlung der Spur.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

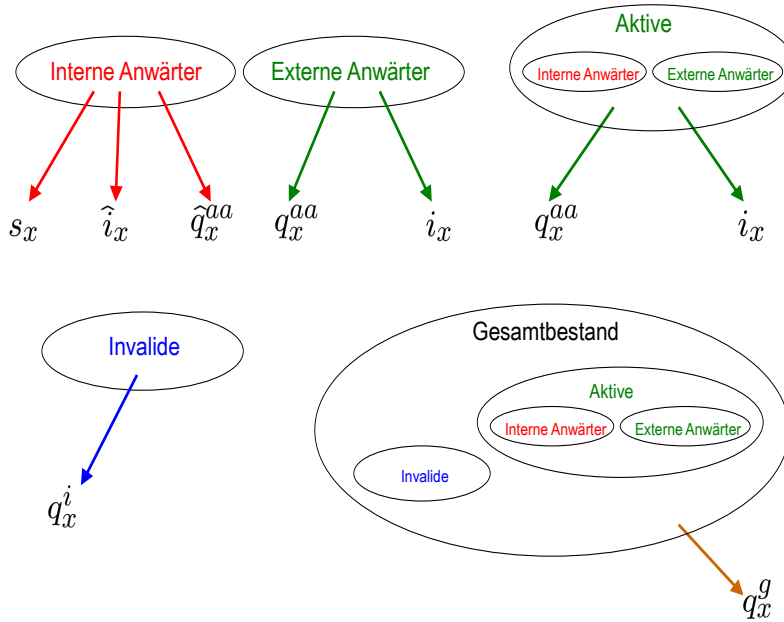
Als Aktuar haben Sie eine hohe Verantwortung dafür, dass Sie die Wünsche des Mandanten richtig erfassen und die Ergebnisse dem Mandanten in angemessener Weise übermitteln.

Wie gehen Sie vor im Vorfeld der Auftragserteilung, bei der schriftlichen Darstellung der Ergebnisse im Rahmen eines Gutachtens und bei einer (zusätzlichen) mündlichen Präsentation Ihrer Arbeit?

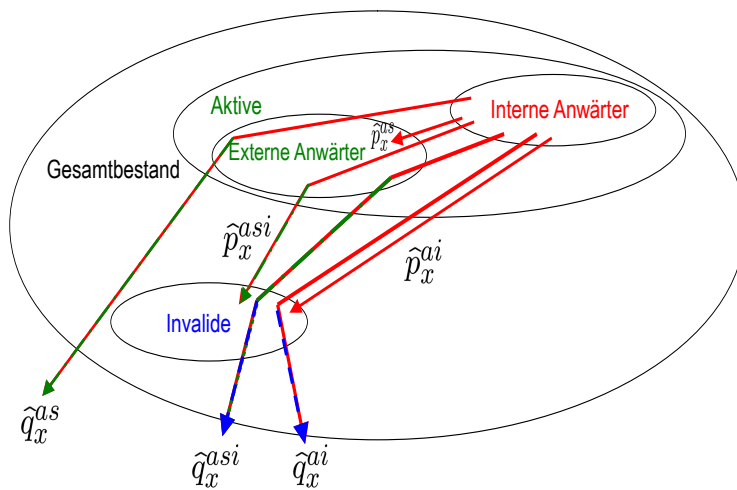
Aufgabe 1 (45 Punkte)

Nr. 1:

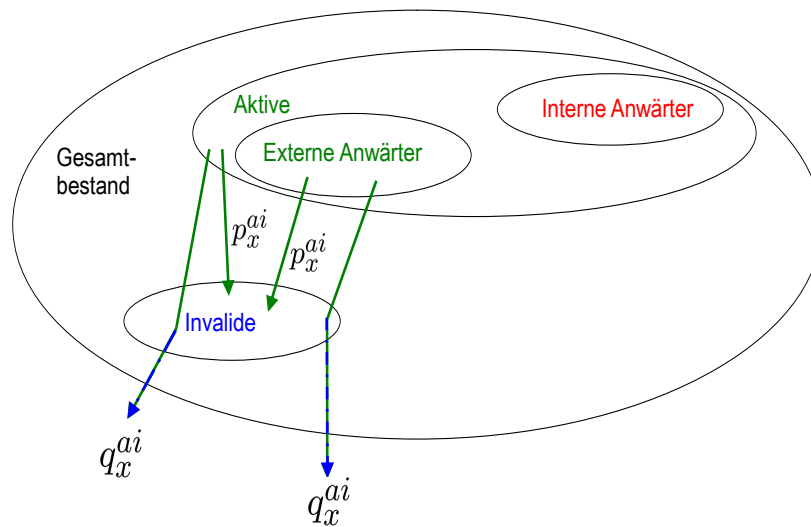
Ausscheidewahrscheinlichkeiten:



Übergangswahrscheinlichkeiten vom Bestand der internen Anwärter:



übrige Übergangswahrscheinlichkeiten:



Nr. 2

a) Im Rahmen des erweiterten Modells haben die Zufallsgrößen die folgende Bedeutung:

X_1 : Alter bei Eintritt der Fluktation;

X_2 : Alter bei Eintritt der Invalidität;

X_3 : Alter bei Eintritt des Todes.

b) Es gilt:

- $G_1 := \{X_2 > x, X_3 > x\}$ entspricht der Gesamtheit der Personen, die im Alter x zum Aktivenbestand gehören
- $G_2 := \{X_3 > x\}$ entspricht der Gesamtheit der Personen, die im Alter x zum Gesamtbestand gehören
- $G_3 := \{X_2 < X_1, X_2 \leq X_3, X_2 \leq x + 1, X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}$ entspricht der Gesamtheit der Personen, die im Alter x zu der Hauptgesamtheit gehören und innerhalb eines Jahres aufgrund der Ursache 2 ausscheiden

Nr. 3

a) Es gilt:

- $q_x^1 = P[X_3 \leq x + 1 \mid X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x]$
- $q_x^2 = P[X_3 \leq x + 1, X_1 > X_3, X_2 > X_3 \mid X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x]$
- $q_x^3 = P[X_3 \leq x + 1, X_1 \leq X_3, X_2 > X_3 \mid X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x]$
- $q_x^4 = P[X_3 \leq x + 1, X_1 > X_2, X_2 \leq X_3 \mid X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x]$
- $q_x^5 = P[X_3 \leq x + 1, X_1 \leq X_2, X_2 \leq X_3 \mid X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x]$

Um $q_x^1 = q_x^2 + q_x^3 + q_x^4 + q_x^5$ zu zeigen, berechne zuerst:

$$\begin{aligned} q_x^2 + q_x^3 &= P[X_3 \leq x + 1, X_2 > X_3, \underbrace{(X_1 > X_3 \cup X_1 \leq X_3)}_{\text{disjunkt}} \mid X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x] \\ &= P[X_3 \leq x + 1, X_2 > X_3 \mid X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x] \end{aligned}$$

Und dann:

$$\begin{aligned} q_x^4 + q_x^5 &= P[X_3 \leq x + 1, X_2 \leq X_3, \underbrace{(X_1 > X_2 \cup X_1 \leq X_2)}_{\text{disjunkt}} \mid X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x] \\ &= P[X_3 \leq x + 1, X_2 \leq X_3 \mid X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x]. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} q_x^2 + q_x^3 + q_x^4 + q_x^5 &= P[X_3 \leq x + 1, \underbrace{(X_2 > X_3 \cup X_2 \leq X_3)}_{\text{disjunkt}} \mid X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x] \\ &= P[X_3 \leq x + 1 \mid X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x] \\ &= q_x^1 \end{aligned}$$

b) Es gilt:

- $q_x^4 = \hat{q}_x^{ai} = \hat{i}_x \frac{1}{2} q_{x+\frac{1}{2}}^i$
- $q_x^5 = \hat{q}_x^{asi} = s_x \frac{1}{2} i_{x+\frac{1}{2}} \frac{1}{2} q_{x+\frac{1}{2}}^i$

mit:

\hat{i}_x : Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x , innerhalb eines Jahres wegen Invalidität aus dem Bestand der internen Anwärter auszuschneiden.

s_x : Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x , innerhalb eines Jahres wegen Fluktation aus dem Bestand der internen Anwärter auszuschneiden.

$\frac{1}{2}i_{x+\frac{1}{2}}$: Wahrscheinlichkeit eines $x + \frac{1}{2}$ -jährigen externen Anwärters innerhalb eines halben Jahres invalide zu werden.

$\frac{1}{2}q_{x+\frac{1}{2}}^i$: Wahrscheinlichkeit eines $x + \frac{1}{2}$ -jährigen Invaliden innerhalb eines halben Jahres zu sterben.

Die Richttafeln gehen zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten somit davon aus, dass der Übergang rechnermäßig, d.h. zur Mitte des Jahres stattfindet.

Aufgabe 2 (15 Punkte):

Nr. 1:

DBO : Defined Benefit Obligation: Rückstellung zum Stichtag nach der Projected Unit Credit (PUC) Methode

IC : Interest Cost: Zinsaufwand des nächsten Wirtschaftsjahres

SC : Service Cost (Laufender Dienstzeitaufwand): Der Barwert des im nächsten Wirtschaftsjahr nach der PUC-Methode zu erdienenden Pensionsanspruchs des Berechtigten (Wertstellung zum Ende des nächsten Wirtschaftsjahres)

EBP : Expected Benefit Payments: die im nächsten Wirtschaftsjahr erwarteten Rentenzahlungen

EDBO : Expected DBO: Erwartete DBO zum nächsten Bilanzstichtag (Wertstellung zum Ende des nächsten Wirtschaftsjahres)

Nr. 2:

a) Aus der versicherungsmathematischen Bilanzgleichung

$${}_mV_x + {}_m\hat{P}_x = {}_m\hat{L}_x + v p_{x+m}^a {}_{m+1}V_x$$

folgt:

$${}_m\hat{P}_x = {}_m\hat{L}_x + v p_{x+m}^a \sum_{k=0}^{n-m-1} v^k {}_k p_{x+m+1}^a \frac{m+1}{m+1+k} {}_{m+1+k}\hat{L}_x - \sum_{k=0}^{n-m} v^k {}_k p_{x+m}^a \frac{m}{m+k} {}_{m+k}\hat{L}_x$$

$$\begin{aligned}
&= {}_m\hat{L}_x + \sum_{k=0}^{n-m-1} v^{k+1} {}_{k+1}p_{x+m}^a \frac{m+1}{m+k+1} {}_{m+k+1}\hat{L}_x - \sum_{k=0}^{n-m} v^k {}_k p_{x+m}^a \frac{m}{m+k} {}_{m+k}\hat{L}_x \\
&= {}_m\hat{L}_x + \sum_{k=1}^{n-m} v^k {}_k p_{x+m}^a \frac{m+1}{m+k} {}_{m+k}\hat{L}_x - \sum_{k=0}^{n-m} v^k {}_k p_{x+m}^a \frac{m}{m+k} {}_{m+k}\hat{L}_x \\
&= {}_m\hat{L}_x + \sum_{k=1}^{n-m} v^k {}_k p_{x+m}^a \frac{1}{m+k} {}_{m+k}\hat{L}_x - {}_m\hat{L}_x \\
&= \sum_{k=1}^{n-m} v^k {}_k p_{x+m}^a \frac{1}{m+k} {}_{m+k}\hat{L}_x
\end{aligned}$$

b) Da nur eine reine Altersrente gewährt wird, gilt:

- ${}_m\hat{L}_x = 0$ für $m < n$ und
- ${}_m\hat{L}_x = a_z^r$ für $m = n$.

Zusammen mit Teilaufgabe a) folgt somit:

$${}_m\hat{P}_x = \sum_{k=0}^{n-m} v^k {}_k p_{x+m}^a \frac{1}{m+k} {}_{m+k}\hat{L}_x = v^{n-m} {}_{n-m}p_{x+m}^a \frac{1}{n} {}_n\hat{L}_x = v^{n-m} {}_{n-m}p_{x+m}^a \frac{1}{n} a_z^r$$

Für $m = 0, 1, \dots, n-2$ gilt somit:

$$\begin{aligned}
{}_m\hat{P}_x &= v^{n-m} {}_{n-m}p_{x+m}^a \frac{1}{n} a_z^r = v \cdot v^{n-m-1} p_{x+m}^a \cdot {}_{n-m-1}p_{x+m+1}^a \frac{1}{n} a_z^r = \\
&= v \cdot p_{x+m}^a \cdot {}_{m+1}\hat{P}_x \leq {}_{m+1}\hat{P}_x
\end{aligned}$$

Teil a) (15 Punkte)

Der § 54 Absatz 1 VAG hat folgenden Wortlaut:

„Die Bestände des Sicherungsvermögens (§ 66) und das sonstige gebundene Vermögen gemäß Absatz 5 (gebundenes Vermögen) sind unter Berücksichtigung der Art der betriebenen Versicherungsgeschäfte sowie der Unternehmensstruktur so anzulegen, dass möglichst große Sicherheit und Rentabilität bei jederzeitiger Liquidität des Versicherungsunternehmens unter Wahrung angemessener Mischung und Streuung erreicht wird.“

- Erläutern Sie die besondere Bedeutung des Sicherungsvermögens für versicherungsgebundene Zusagen der betrieblichen Altersversorgung

Das Sicherungsvermögen nach § 66 VAG ist der Teil des gebundenen Vermögens eines Versicherers, über das der Versicherer nur mit Zustimmung des Deckungsstocktreuhänders verfügen kann. Das Sicherungsvermögen ist somit in besonderer Weise vor einem unberechtigten Zugriff gesichert. Das Sicherungsvermögen muss mindestens dem Umfang nach die Deckungsrückstellung, die Beitragsüberträge, die Rückstellungen für noch nicht abgewickelte Versicherungsverfälle sowie Teile der RfB (und weitere in § 66 Abs. 1a VAG genannten Mittel) umfassen.

- Nennen Sie beispielhaft die Relevanz der Formulierung *„unter Berücksichtigung der Art der betriebenen Versicherungsgeschäfte sowie der Unternehmensstruktur“* für eine Pensionskasse.

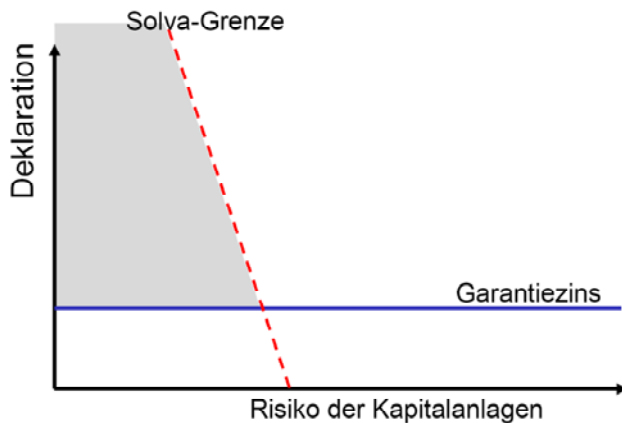
In dieser Formulierung kommt der Grundgedanke des Asset-Liability-Managements zum Ausdruck, denn die Art des betriebenen Versicherungsgeschäfts und die Unternehmensstruktur haben Rückwirkung auf die Kapitalanlagestrategie. Das Geschäftsmodell einer Pensionskasse besteht darin, den versorgungsberechtigten Arbeitnehmern eine Altersversorgung in Form einer Rente zu gewähren. Insofern kann eine Pensionskasse (im Unterschied zu einem Schadenversicherer) relativ gut den Liquiditätsbedarf der nächsten Jahre abschätzen. In aller Regel bedeutet dies, dass eine Pensionskasse sehr langfristig am Kapitalmarkt investieren kann. Umfasst jedoch der Personenbestand einer Pensionskasse beispielsweise überwiegend Rentner, so sollte die Kapitalanlage sich am erwarteten Liquiditätsbedarf der fälligen Renten orientieren. Hat sich beispielsweise das Trägerunternehmen der Pensionskasse (dies betrifft also die Unternehmensstruktur) verpflichtet bei Bedarf Nachschüsse zu gewähren oder Liquidität zur Verfügung zu stellen, so ist die Pensionskasse im Hinblick auf das Kapitalanlagemanagement freier in der Auswahl der Anlageformen und -fristigkeiten

- Erläutern Sie die Begriffe *Mischung* und *Streuung*.

Mischung bezeichnet die Begrenzung der diversen Anlagearten in einem Portefeuille. So müssen im gebundenen Vermögen die Anlageformen Aktien, Darlehen, festverzinsliche Wertpapiere und Immobilien gemischt werden. In der AnIV werden explizite Grenzen für die einzelnen Kapitalanlagearten genannt.

Streuung bezeichnet die Verteilung der Kapitalanlagen innerhalb einer Anlageart auf verschiedene Schuldner. So dürfen Aktien nicht ausschließlich auf eine Aktiengesellschaft konzentriert werden. Entsprechendes gilt für festverzinsliche Wertpapiere oder Darlehen.

Teil b) (20 Punkte)



- Erläutern Sie die gegenseitigen Abhängigkeit des Asset- und des Liability-Managements anhand der obigen Abbildung. Wir verstehen hier unter Deklaration den Zinssatz d , mit dem die Versicherungsguthaben im kommenden Jahr verzinst werden.

In der obigen Abbildung markieren die Punkte (σ, d) des grau unterlegten Feldes die zulässigen ALM-Positionen. Ein ALM-Position ist zulässig, wenn sowohl die Deklaration die Mindestverzinsung nicht unterschreitet ($d \geq \text{Garantiezins}$) also auch die Solvabilitätsgrenze nicht überschritten wird. Hierbei gibt die Solvabilitätsgrenze an, welche maximale Deklaration bei einer gegebenen Risikoposition möglich ist.

- Leiten Sie eine Darstellung für die oben skizzierte „Solva-Grenze“ unter folgenden einfachen Annahmen her:

Modellierung des Portfolios: Das Portfolio wird zusammengesetzt aus Bonds und Aktien. Mit Hilfe der Aktienquote $\alpha \in [0, 1]$ messen wir das Risiko der Kapitalanlagen. Abhängig von der Aktienquote bestimmt sich auch die erwartete Rendite des Portfolios r aus der Gleichung : $r = 0,025 + 0,05\alpha$

Bestimmung der Solvabilität: Es wird verlangt, dass auch bei einem (simultanen) Stress von $-s_A = -40\%$ für Aktien und $-s_B = -10\%$ für Bonds Eigenmittel in Höhe von $SQ = 4,4\%$ der Deckungsrückstellung (V) vorhanden sind.

Ausgangsbilanz:

P	R
	V

$$P = 100; \quad R = 100 \cdot \rho; \quad V = 100 \cdot (1 - \rho); \quad \rho = 20\% : \text{Reservequote.}$$

Die Solvabilitätsbedingung lautet in dem vereinfachten Modell:

Wert der Kapitalanlagen nach Stress

\geq

versicherungstechnische Verpflichtungen unter Berücksichtigung der Deklaration

zuzüglich 4,4% der versicherungstechnische Verpflichtungen unter Berücksichtigung der Deklaration

Dies bedeutet:

$$\alpha \cdot 100 \cdot (1 - s_A) + (1 - \alpha) \cdot 100 \cdot (1 - s_B) \geq (1 + d) \cdot (1 - \rho) \cdot 100 \cdot (1 + SQ)$$

$$\Leftrightarrow 1 - s_B - (s_A - s_B) \alpha \geq (1 + d) (1 - \rho) (1 + SQ)$$

$$\Leftrightarrow (1 + d) \leq \frac{1 - s_B}{(1 - \rho) (1 + SQ)} - \frac{s_A - s_B}{(1 - \rho) (1 + SQ)} \alpha$$

$$\Leftrightarrow d \leq \frac{\rho - SQ - s_B + \rho \cdot SQ}{(1 - \rho) (1 + SQ)} - \frac{s_A - s_B}{(1 - \rho) (1 + SQ)} \alpha$$

Die Solva-Grenze hat also die Darstellung: $d = 0,077586 - 0,359195 \alpha$

- Bestimmen Sie die Aktienquote $\alpha \in [0, 1]$ und die Deklaration d so, dass die Reser-
vequote im *Erwartungswert* (also unter der Annahme, dass die erwartete
Portfoliorendite realisiert wird) unverändert bleibt.

**Reserveneutralität ist gegeben, falls die Deklaration der erwarteten Rendite
entspricht, d.h.**

$$d = 0,025 + 0,05 \cdot \alpha$$

Aus beiden Gleichungen zusammen erhält man:

$$\left. \begin{array}{l} d = 0,025 + 0,05 \cdot \alpha \\ d = 0,077586 - 0,359195 \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow 0,409195 \alpha - 0,052586 = 0$$

Somit folgt $\alpha = 0,128511$ und $d = 0,031426$.

Teil c) (10 Punkte)

Der § 53c Absatz 1 VAG hat folgenden Wortlaut:

„Versicherungsunternehmen sind verpflichtet, zur Sicherstellung der dauernden Erfüllbarkeit der Verträge stets über freie unbelastete Eigenmittel mindestens in Höhe der geforderten Solvabilitätsspanne zu verfügen, die sich nach dem gesamten Geschäftsumfang bemisst. Ein Drittel der geforderten Solvabilitätsspanne gilt als Garantiefonds.“

- Bekanntermaßen müssen Deckungsrückstellungen mit vorsichtigen Rechnungsgrundlagen kalkuliert werden (§ 65 VAG i.V.m DeckRV). Warum reicht dies aus Sicht des Gesetzgebers nicht aus, um die dauerhafte Erfüllbarkeit der Verträge sicherzustellen?

Die vorsichtige Kalkulation der Rechnungsgrundlagen soll sicherstellen, dass bei sich ändernden Rechnungsgrundlagen oder bei Schätzfehlern der verwendeten Grundlagen, die Erfüllbarkeit der Verträge gesichert ist. Die aufsichtsrechtlichen Vorschriften zur Berechnung der Deckungsrückstellung und der Prämienkalkulation sollen somit einer systematischen Änderung der Rechnungsgrundlagen aufgrund von zukünftigen Änderungen oder Fehleinschätzungen der Vergangenheit vorbeugen.

Die Vorschriften zur Solvabilität sollen sicherstellen, dass bei kurzfristigen (im weitesten Sinne zufälligen) Schwankungen der relevanten Risikofaktoren, genügend Mittel vorhanden sind. Implizit wird hierin ein Risikoausgleich in der Zeit unterstellt.

- Skizzieren Sie die derzeit gültigen Regeln zur Solvabilität Pensionskassen. Kommentieren Sie dabei, inwieweit diese Regeln geeignet sind, die dauerhafte Erfüllbarkeit der Verträge sicherzustellen.

Die derzeitigen Regeln zur Solvabilität sehen eine sehr einfache Formel zur Berechnung der Solvabilitätsspanne vor. Insbesondere wird für das Anlagerisiko sehr pauschal eine Eigenmittelunterlegung von 4% der Deckungsrückstellung verlangt. Insbesondere fließt in die Berechnung nicht die konkrete Anlagestruktur ein. Diese sehr pauschale Berechnung ist nur im Kontext mit den detaillierten Vorschriften zur Anlage des gebundenen Vermögens zu rechtfertigen. Implizit geht das derzeitige Solvabilitätsmodell davon aus, dass die gesetzlichen Anlagegrenze bereits sicherstellen, dass die Kapitalanlagen insgesamt hinlänglich sicher sind.

Die pauschale Bewertung des Kapitalanlagerisikos führt jedoch zu paradoxen Ergebnissen, wenn beispielsweise eine Pensionskasse für die Bewertung der Verpflichtungen einen besonders vorsichtigen (niedrigen) Rechnungszins wählt. Damit steigen die Deckungsrückstellungen und zugleich steigt der Bedarf an Eigenmitteln, obwohl die Sicherheit gestiegen ist.

Auch das versicherungstechnische Risiko wird im derzeitigen System nur unzulänglich erfasst; das Langlebighkeitsrisiko wird derzeit von der Standardformel gar nicht erfasst.

**Klausur Spezialwissen Pensionsversicherungsmathematik
Oktober 2011**

**Musterlösung
zu 4a)**

Der Technische Geschäftsplan enthält eine Beschreibung der wesentlichen Leistungs- und Finanzierungsgrundsätze und deren Konkretisierung im Hinblick auf Formeln und Zahlenwerk zu

Zusammenhang zwischen Beitrag und Leistung
biometrische Rechnungsgrundlagen
Rechnungszins
Kostensätze
Formeln zur Ermittlung von Tariftabellen
Formeln für Abfindungen
Formeln für (Teil-)Kapitalisierung
Ermittlung von versicherungsmathematischen Ab- und Zuschlägen bei vorzeitigem bzw. hinausgeschobenem Altersrentenbeginn
Formeln zur Ermittlung der Deckungsrückstellung
Regelungen zum Versorgungsausgleich
Beteiligung an Bewertungsreserven
Überschussbeteiligung

Beispiel für eine laufende Prämie für eine Versicherung von Invaliden- Alters- und 60 % Witwenrente

Beispiel für die Formel für das Deckungskapital der Versicherung.

zu 4b)

Ergebnis aus Kapitalanlagen

+ Kapitalerträge	800
- Aufwand für Kapitalanlagen	100
- Rechnungszins $3\% (15.290+15.290+710)/2 =$	<u>469</u>
	231

Ergebnis aus Verwaltungskosten

+ rechnungsmäßige Kosten $3\% \times 500 =$	15
$1\% \times 200/1,01 =$	2
- Aufwand für Versicherungsbetrieb	10
- Aufwand für Regulierung	<u>3</u>
	4

Risikoergebnis

+ Nettobeiträge	485
+ Rechnungszins	469
- Nettoleistungen	197
- Aufwand Deckungsrückstellung	<u>710</u>
	45
Gesamtergebnis	280

Musterlösung

zu 5a)

Die nachsteuerlichen Wirkungen der betrAV werden messbar und für jeweils unterschiedliche Szenarien hinsichtlich der Leistungsgestaltung, des Durchfühungsweges, der Auswahl des Personenkreises vergleichbar. Damit sind Entscheidungen zu fundieren, ob betrAV sich lohnt, welcher Durchfühungsweg optimal ist und welcher begünstigte Personenkreis und Leistungsplan vorzuziehenswert ist. Auch die Frage, ob betrAV steuerlich begünstigt wird, kann mit dem Modell Geprüft werden.

zu 5b)

Die unmittelbaren Wirkungen betreffen die zahlungswirksamen Effekte aus Beiträgen, Versorgungsleistungen, Verwaltungskosten, PSV-Beiträgen und unbare Erfolgswirkungen wie die Rückstellungsveränderung.

Mittelbare Wirkungen sind steuerliche Effekte und die nachsteuerlichen Zinsen auf verdrängtes oder zusätzliches Fremdkapital.

zu 5c)

Unter der Spur der betrAV versteht man die kumulierte Liquidität nach Erfüllung aller Verpflichtungen gegenüber einer Zugangsgeneration von Berechtigten.

zu 5d)

Die Spur ist geprägt durch die Zusammensetzung der Zugangsgeneration und die biometrischen Annahmen einschließlich der Altersgrenzen für deren Entwicklung im Zeitablauf. Hinzu kommen die vorgesehenen Beiträge und Leistungen und die dynamischen Entwicklungen von Beiträgen, Anwartschaften und Leistungen. Die mittelbaren Wirkungen auf die Liquidität sind geprägt von Steuersätzen und dem kalkulatorischen Zinssatz.

Musterlösung zu A6

Im Vorfeld der Auftragserteilung kommt es darauf an, den Beratungsbedarf des Mandanten zu klären und die Beweggründe für seine Fragen zu verstehen. Aus diesem Verständnis heraus kann der Auftrag gemeinsam formuliert und konsentiert werden.

Bei der schriftlichen Darstellung der Arbeitsergebnisse kommt es auf eine für den Leser verständliche Sprache an und eine angemessene Auswahl von wesentlichen Ergebnissen an. Details können in Anlagen aufbereitet werden. Umfangreiche Zahlenwerke werden durch eine klare Struktur überschaubar. Relativzahlen z.B. in Relation zur Lohnsumme verhelfen dem Leser zu einer sachgerechten Einordnung der Ergebnisse, grafische Darstellungen erleichtern den Überblick obendrein.

Eine Präsentation sollte als eigenständige Darstellung der wesentlichen Ergebnisse gestaltet sein mit einer Beschreibung der Fragestellung, einer Plausibilisierung der Zusammenhänge und einer Einordnung der Ergebnisse in die Vorüberlegungen. Ausblicke betreffen die möglichen Konsequenzen aus den Ergebnissen.