DAV - Prüfung 24. Oktober 2009

Spezialwissen Pensionsversicherungsmathematik

Aufgabe 1

Wir betrachten einen Bestand von internen Anwärtern und wählen aus diesem Bestand einen internen Anwärter des Alters x. Sei

K die Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Ausscheiden wegen Fluktuation (Zufallsgröße),

M die Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Eintritt der Invalidität (Zufallsgröße), und

N die Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Tod (Zufallsgröße).

1. Erläutern Sie die Erfüllungsbeträge

$$\begin{aligned} B &= v^{M+1}\, \mathrm{a}_{\overline{N-M|}}\, 1_{\{K \le M < N\}}, \\ B_1 &= v^{M+1}\, \mathrm{a}_{\overline{N-M|}}\, 1_{\{K > M, N > M\}}, \\ B_2 &= B + B_1 \end{aligned}$$

   Geben Sie B_2 explizit an.

2. Geben Sie die Realisierungen b_{kmn}, $k, m, n = 0, 1, ...$ von B an.

3. Geben Sie den Erwartungswert $\mathcal{E}B$ mit Hilfe der Realisierungen b_{kmn}, $k, m, n = 0, 1, ...$ an.

4. Geben Sie in versicherungsmathematischer Schreibweise die folgenden Wahrscheinlichkeiten für $k = 0, 1. \ldots, m$ an:

$$P\{K = k\},$$

$$P\{M = m \,|\, K = k\}$$

5. Zeigen Sie, dass f. bel. $k, m \le n$ gilt:

$$P\{N = n \,|\, M = m, K = k\} \quad = \quad {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+m+\frac{1}{2}}\ {}_{n-m-1}p^i_{x+m+1}\ q^i_{x+n}$$

6. Drücken Sie $\mathcal{E}B$ mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten

$$P\{K=k\},\ P\{M=m\,|\,K=k\} \quad \text{und}$$

$$P\{N=n\,|\,M=m, K=k\} \quad \text{aus.}$$

.

7. Stellen Sie die gemäß 6. gewonnene Formel mit Hilfe von 4. und 5. in versicherungsmathematischer Notation dar.

8. Zeigen Sie, dass für beliebige vorgegebene $m = 0, 1, ...$ gilt:

$$\sum_{n>m} {}_{n-m-1}p^{i}_{x+m+1} \quad q^{i}_{x+n} \quad \mathrm{a}_{\overline{n-m}|} = \mathrm{a}^{i}_{x+m+1}$$

9. Setzen Sie dieses Ergebnis in die Darstellung nach 7. ein und vereinfachen Sie entsprechend den Ausdruck nach 7.

10. Stellen Sie a^{ai}_{x+k+1} (vgl. beiliegende Formelsammlung) als Summenformel dar und ändern Sie den Summationsindex in der Weise, dass er mit $k+1$ beginnt.

11. Setzen Sie dieses Ergebnis in die Darstellung nach 9. ein und vereinfachen Sie entsprechend den Ausdruck nach 9.

Aufgabe 2

Ein Unternehmer möchte seinen Mitarbeitern eine Versorgungszusage mit folgenden Leistungen erteilen:

Nach einer Wartezeit von einem Jahr werden bei vorzeitigen Versorgungsfällen bei Eintritt des Versorgungsfalls wegen Invalidität und/oder Tod die (fiktive) Jahresprämie, bei Erreichen des Pensionierungsalters z als Aktiver ein Betrag B_z verrentet. Der Unternehmer möchte nun am Beispiel eines Berechtigten mit Eintrittsalter x von Ihnen wissen, wie die steuerliche Rückstellung der zukünftigen Jahre aussieht und besonders, wie hoch die jährliche Prämie ausfällt.

Hieraus ergeben sich folgende Aufgaben:

1. Berechnen Sie mit Hilfe der versicherungsmathematischen Bilanzgleichungen die Jahresprämie P_x und die Rückstellungen ${}_1V_x$, ${}_2V_x$..., ${}_nV_x$ der Zusage $(n = z - x)$.

2. Geben Sie für diese Zusage das Bilanzgleichungssystem in der Form

$$PV = L^{'} + FV$$

   an. Stellen Sie $L^{'}$ und F explizit dar[1].

3. Berechnen Sie V als analytisch darstellbare Lösung dieses Bilanzgleichungssystems.

4. Geben Sie einen Versicherungsvertrag mit übereinstimmenden ${}_1V_x, ..., {}_nV_x$ an. Wie lauten dann für diesen Vertrag die Prämien ${}_k\hat{P}_x$, $k = 0, 1, ..., n - 1$?

5. Berechnen Sie die Sparprämien ${}_kP_x^S$ und Risikoprämien ${}_kP_x^R$ der Zusage $(k = 0, 1, ..., n - 1)$[2].

6. Unterstellen Sie, dass der Berechtigte zum Alter $x+m$ mit $\frac{m}{n}$ -Anspruch ausscheidet. Geben Sie die Rückstellungswerte des Ausgeschiedenen für die Alter $x + m$, $x + m + 1, ..., x + n$ an.

[1]Hinweis: Kapitel 2, Abschnitt 4.2 - 4.3 des Ihnen vorliegenden Buches „Mathematik und Technik betrieblicher Pensionszusagen“ behandelt dieses Thema.

[2]Vgl. Abchnitt 4.4 des Ihnen vorliegenden Buches „Mathematik und Technik betrieblicher Pensionszusagen“.

1.

B : Anwartschaft eines internen Anwärters auf eine lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbare Invalidenrente, unter der Bedingung, dass er vor Eintritt der Invalidität durch Fluktuation ausscheidet, zahlbar zum ersten Mal zum Beginn des Jahres nach Eintritt der Invalidität, zum letzten Mal zum Beginn des Jahres des Eintritts des Todes.

B_1 : Anwartschaft eines internen Anwärters auf eine lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbare Invalidenrente, falls er durch Invalidität aus dem Bestand der internen Anwärter ausscheidet, zahlbar zum ersten Mal zum Beginn des Jahres nach Eintritt der Invalidität, zum letzten Mal zum Beginn des Jahres des Eintritts des Todes.

B_2 : Anwartschaft eines internen Anwärters (auch: externen Anwärters, also aktive)auf eine lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbare Invalidenrente, gleichgültig, ob er zuvor durch Fluktuation oder durch Invalidität aus dem Bestand der internen Anwärter ausscheidet, zahlbar zum ersten Mal zum Beginn des Jahres nach Eintritt der Invalidität, zum letzten Mal zum Beginn des Jahres des Eintritts des Todes.

$$B_2 = v^{M+1} \, \mathrm{a}_{\overline{N-M|}} \, 1_{\{N>M\}}$$

2.

$$\begin{aligned} b_{kmn} &= v^{m+1} \, \mathrm{a}_{\overline{n-m|}} \quad \text{f.} \quad 0 \leq k \leq m < n \\ &= 0 \quad \text{sonst} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}B &= \sum_{k\geq 0} \sum_{m\geq 0} \sum_{n\geq 0} b_{kmn} \, P\{B = b_{kmn}\} \\ &= \sum_{k\geq 0} \sum_{m\geq k} \sum_{n>m} v^{m+1} \, \mathrm{a}_{\overline{n-m|}} \, P\{K = k, M = m, N = n\} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} P\{K = k\} &= P\{K < k+1, K \geq k\} \\ &= P\{K < k+1 \,|\, K \geq k\} \, P\{K \geq k\} \\ &= s_{x+k} \, {}_k\hat{p}_x^a \quad \text{f.} \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P\{M=m\,|\,K=k\} &= {}_{\frac{1}{2}}i_{x+k+\frac{1}{2}} \quad \text{f.} \quad m=k \\
&= P\{M<m+1|M\geq m, M>k, K=k\}\,P\{M\geq m|M>k, K=k\} \\
&\ P\{M>k|K=k\} \\
&= i_{x+m}\ {}_{m-k-1}p^{a}_{x+k+1}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{a}_{x+k+\frac{1}{2}} \quad \text{f.} \quad m>k
\end{aligned}
$$

5.

$$
\begin{aligned}
P\{N=n\,|\,M=m,K=k\} &= {}_{\frac{1}{2}}q^{i}_{x+n+\frac{1}{2}} \quad \text{f.} \quad n=m \\
&= P\{N<n+1, N\geq n,\ N>m\,|\,M=m, K=k\} \\
&= P\{N<n+1, |N\geq n,\ N>m, M=m, K=k\} \\
&\ P\{N\geq n|N>m, M=m, K=k\}\,P\{N>m|M=m, K=k\} \\
&= q^{i}_{x+n}\ {}_{n-m-1}p^{i}_{x+m+1}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+m+\frac{1}{2}} \quad \text{f.} \quad n>m
\end{aligned}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}B &= \sum_{k\geq 0} P\{K=k\} \sum_{m\geq 0} P\{M=m|K=k\} \sum_{m\geq 0} P\{N=n|M=m, K=k\}\, b_{kmn} \\
&= \sum_{k\geq 0} P\{K=k\} \sum_{m\geq k} P\{M=m|K=k\}\, v^{m+1} \sum_{n>m} P\{N=n|M=m, K=k\}\, \mathrm{a}_{\overline{n-m}|}
\end{aligned}
$$

7.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}B &= \sum_{k\geq 0} {}_{k}\hat{p}^{a}_{x}\ s_{x+k}\ {}_{\frac{1}{2}}i_{x+k+\frac{1}{2}}\ v^{k+1} \sum_{n>k} {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+k+\frac{1}{2}}\ {}_{n-k-1}p^{i}_{x+k+1}\ q^{i}_{x+n}\ \mathrm{a}_{\overline{n-k}|} \\
&+ \sum_{k\geq 0} {}_{k}\hat{p}^{a}_{x}\, s_{x+k} \sum_{m\geq k+1} {}_{\frac{1}{2}}p^{a}_{x+k+\frac{1}{2}}\ {}_{m-k-1}p^{a}_{x+k+1}\ i_{x+m}\ v^{m+1} \sum_{n>m} {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+m+\frac{1}{2}}\ {}_{n-m-1}p^{i}_{x+m+1}\ q^{i}_{x+n}\ \mathrm{a}_{\overline{n-m}|}
\end{aligned}
$$

8.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n>m} {}_{n-m-1}p^{i}_{x+m+1}\ q^{i}_{x+n}\ \mathrm{a}_{\overline{n-m}|} &= \sum_{n>m} {}_{n-m-1}p^{i}_{x+m+1}\ (1-p^{i}_{x+n})\ \mathrm{a}_{\overline{n-m}|} \\
&= \sum_{n>m} {}_{n-m-1}p^{i}_{x+m+1}\ \mathrm{a}_{\overline{n-m}|} - \sum_{n>m} {}_{n-m-1}p^{i}_{x+m+1}\ p^{i}_{x+n}\ \mathrm{a}_{\overline{n-m}|} \\
&= \sum_{n\geq m} {}_{n-m}p^{i}_{x+m+1}\ \mathrm{a}_{\overline{n+1-m}|} - \sum_{n>m} {}_{n-m}p^{i}_{x+m+1}\ \mathrm{a}_{\overline{n-m}|} \\
&= \mathrm{a}_{\overline{1}|} + \sum_{n>m} {}_{n-m}p^{i}_{x+m+1}\ \underbrace{(\mathrm{a}_{\overline{n+1-m}|} - \mathrm{a}_{\overline{n-m}|})}_{\underbrace{\sum_{k=0}^{n-m} v^{k} - \sum_{k=0}^{n-m-1} v^{k}}_{v^{n-m}}} \\
&= 1 + \sum_{n>m} v^{n-m}\ {}_{n-m}p^{i}_{x+m+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n\geq m} v^{n-m}\ {}_{n-m}p^{i}_{x+m+1} \\
&= \sum_{n\geq 0} v^{k}\ {}_{k}p^{i}_{x+m+1} \\
&= \mathrm{a}^{i}_{x+m+1}
\end{aligned}
$$

9.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}B &= \sum_{k\geq 0} v^{k+1}\ {}_{k}\hat{p}^{a}_{x}\ s_{x+k}\ {}_{\frac{1}{2}}i_{x+k+\frac{1}{2}}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+k+\frac{1}{2}}\ \mathrm{a}^{i}_{x+k+1} \\
&+ \sum_{k\geq 0} {}_{k}\hat{p}_{x}\ s_{x+k}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{a}_{x+k+\frac{1}{2}} \sum_{m\geq k+1} v^{m+1}\ {}_{m-k-1}p^{a}_{x+k+1}\ i_{x+m}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+m+\frac{1}{2}}\ \mathrm{a}^{i}_{x+m+1}
\end{aligned}
$$

10.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{a}^{ai}_{x+k+1} &= \sum_{m\geq 0} v^{m+1}\ {}_{m}p^{a}_{x+k+1}\ i_{x+k+m+1}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+k+1+m+\frac{1}{2}}\ \mathrm{a}^{i}_{x+k+1+m+1} \quad \text{gem.Formelsammlung} \\
&= \sum_{m\geq k+1} v^{m-k}\ {}_{m-k-1}p^{a}_{x+k+1}\ i_{x+m}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+m+\frac{1}{2}}\ \mathrm{a}^{i}_{x+m+1}
\end{aligned}
$$

11.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}B &= \sum_{k\geq 0} v^{k+1}\ {}_{k}\hat{p}^{a}_{x}\ s_{x+k}\ {}_{\frac{1}{2}}i_{x+k+\frac{1}{2}}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+k+\frac{1}{2}}\ \mathrm{a}^{i}_{x+k+1} \\
&+ \sum_{k\geq 0} v^{k+1}\ {}_{k}\hat{p}_{x}\ s_{x+k}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{a}_{x+k+\frac{1}{2}} \underbrace{\sum_{m\geq k+1} v^{m-k}\ {}_{m-k-1}p^{a}_{x+k+1}\ i_{x+m}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+k+1+m+\frac{1}{2}}\ \mathrm{a}^{i}_{x+k+1+m+1}}_{\mathrm{a}^{ai}_{x+k+1}} \\
&= \sum_{k\geq 0} v^{k+1}\ {}_{k}\hat{p}^{a}_{x}\ s_{x+k}\ {}_{\frac{1}{2}}i_{x+k+\frac{1}{2}}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+k+\frac{1}{2}}\ \mathrm{a}^{i}_{x+k+1} \\
&+ \sum_{k\geq 0} v^{k+1}\ {}_{k}\hat{p}_{x}\ s_{x+k}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{a}_{x+k+\frac{1}{2}}\ \mathrm{a}^{ai}_{x+k+1} \\
&= \mathrm{a}^{asi}_{x}
\end{aligned}
$$

1.

$$
\begin{gathered}
{}_kV_x + P_x = {}_kL_x + vp^a_{x+k}\ {}_{k+1}V_x \\
k = 0 \Rightarrow {}_0L_x = 0,\ {}_0V_x = 0 \\
\Rightarrow P_x = vp^a_x\,{}_1V_x \Leftrightarrow {}_1V_x = \frac{P_x}{vp^a_x}
\end{gathered}
$$

$n > k \geq 1 :\ {}_kL_x = q_{x+k}\,P_x$ mit $q_x = 1 - i_x - q^{aa}_x = 1 - p^a_x$

$$
{}_nL_x = B_z
$$

$\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
{}_kV_x + P_x &= q_{x+k}\,P_x + vp^a_{x+k}\ {}_{k+1}V_x \\
{}_kV_x &= p^a_{x+k}\,(v\,{}_{k+1}V_x - P_x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{n-1}V_x &= p^a_{x+n-1}\,(v\,{}_nV_x - P_x) \ = \ p^a_{x+n-1}\,(v\,B_z - P_x) \\
{}_{n-2}V_x &= p^a_{x+n-2}\,[v\,p^a_{x+n-1}\,(v\,B_z - P_x) - P_x] \\
&= p^a_{x+n-2}\,[v^2\,p^a_{x+n-1}\ B_z - v\,p^a_{x+n-1}\,P_x - P_x] \\
&= v^2\,{}_2p^a_{x+n-2}\,B_z - v\,{}_2p^a_{x+n-2}\ P_x - p^a_{x+n-2}\,P_x \\
&= v^2\,{}_2p^a_{x+n-2}\,B_z - r(\overbrace{v\,p^a_{x+n-2} + v^2\,{}_2p^a_{x+n-2}}^{=a'_{x+n-2}})P_x
\end{aligned}
$$

mit

$$
a'_{x+k} \ := \ \sum_{j=1}^{n-k} v^j\,{}_jp^a_{x+k}
$$

Für bel. k:

$$ {}_kV_x = v^{n-k}\,{}_{n-k}p^a_{x+k}\,B_z - rP_x\,a'_{x+k}, \quad k = 1, 2, ..., n-1 $$

Bem.: Strenger Beweis durch vollständige Induktion!

$\Longrightarrow$

$$ {}_1V_x = v^{n-1}\,{}_{n-1}p^a_{x+1}B_z - rP_x\,a'_{x+1} $$

Hieraus P_x gemäß

$$ P_x = vp^a_x\,{}_1V_x = v^n\,{}_np^a_x\,B_z - P_x\,p^a_x\,a'_{x+1} $$

$\Longrightarrow$

$$ v^n\,{}_np^a_x\,B_z = P_x(1 + p^a_x\,a'_{x+1}) = P_x(q_x + ra'_x) $$

$\Longrightarrow$

$$ P_x = \frac{v^n\,{}_np^a_x\,B_z}{q_x + ra'_x} $$

2. Bekanntlich gilt:

$$ P = \begin{pmatrix} 1 & -vp^a_x & & & & & \\ 1 & 1 & \ddots & & & & \\ . & & \ddots & \ddots & & & 0 \\ . & & & \ddots & & & \\ . & & & & \ddots & & \\ . & 0 & & & \ddots & \ddots & \\ 1 & & & & & \ddots & -vp^a_{x+n-1} \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} $$

(Koeffizientenmatrix des versicherungsmathematischen Bilanzgleichungssystems),

$$ V = \begin{pmatrix} P_x \\ {}_1V_x \\ \vdots \\ \vdots \\ {}_nV_x \end{pmatrix} $$

(Reservevektor)

$$L = L^{'} + FV = \begin{pmatrix} & 0 \\ q_{x+1} & P_x \\ \vdots & \vdots \\ q_{x+n-1} & P_x \\ & B_z \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$L^{'} = \begin{pmatrix} {}_0L_x^{'} \\ {}_1L_x^{'} \\ \vdots \\ {}_nL_x^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$FV = \begin{pmatrix} & 0 \\ q_{x+1} & P_x \\ \vdots & \vdots \\ q_{x+n-1} & P_x \\ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \\ q_{x+1} & \\ \vdots & \text{\Large 0} \\ q_{x+n-1} & \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ {}_1V_x \\ \vdots \\ \vdots \\ {}_nV_x \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \\ q_{x+1} & \\ \vdots & \text{\Large 0} \\ q_{x+n-1} & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

3. Gemäß Teilaufgabe 2 ist das Gleichungssystem

$$P^{'}V = L^{'}$$

mit $P^{'} = P - F$ zu lösen. Dabei gilt:

$$P^{'} = P - F = \begin{pmatrix} {}_0f_x^{'} & -vp_x^a & & & & & \\ {}_1f_x^{'} & 1 & -vp_{x+1}^a & & & & \text{\Large 0} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \text{\Large 0} & & & & \ddots & -vp_{x+n-1}^a \\ {}_nf_x^{'} & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -vp_x^a & & & & & \\ p_{x+1}^a & 1 & \ddots & & & & \text{\Large 0} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \\ p_{x+n-1}^a & \text{\Large 0} & & & & \ddots & -vp_{x+n-1}^a \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} {}_0f_x^{'} &= 1 \\ {}_jf_x^{'} &= p_{x+j}^a \ , \ 1 \leq j < n \\ {}_nf_x^{'} &= 0 \end{aligned}$$

Bei diesem System handelt es sich um ein versicherungsmathematisches Bilanzgleichungsystem der allgemeinen Form $PV = L$, dessen Lösung in Abschnitt 4.2 von „Mathematik und Technik betrieblicher Pensionszusagen“, das in der Klausur zur Verfügung stand, angegeben ist.

Hiernach gilt:

$$
\begin{aligned}
P_x &= \frac{{}_0B_x^{'}}{{}_0\mathrm{a}_x^{'}} \\
{}_kV_x &= {}_kB_x^{'} - P_x\ {}_k\mathrm{a}_x^{'} && \text{k=0,1,\ldots,n} && \text{(S. 85 unten)} \\
{}_kB_x^{'} &= \sum_{j=0}^{n-k} v^j\ {}_jp_{x+k}^a\ {}_{j+k}L_x^{'} && && \text{(Gl. 4.2.8 in Abschnitt 4.2)} \\
&= v^{n-k}\ {}_{n-k}p_{x+k}^a\, B_z && \text{k=0,1,\ldots,n}
\end{aligned}
$$

Für $k \geq 1$ gilt (vgl. S.85 untere Hälfte):

$$
\begin{aligned}
{}_k\mathrm{a}_x^{'} &= \sum_{j=0}^{n-k} v^j\ {}_jp_{x+k}^a\ {}_{j+k}f_x^{'} \\
&= \sum_{j=0}^{n-k-1} v^j\ {}_jp_{x+k}^a\ p_{x+k+j}^a \\
&= \sum_{j=0}^{n-k-1} v^j\ {}_{j+1}p_{x+k}^a \\
&= r \sum_{j=0}^{n-k-1} v^{j+1}\ {}_{j+1}p_{x+k}^a \\
&= r\, a_{x+k}^{'}
\end{aligned}
$$

$k = 0$:

$$
\begin{aligned}
{}_0a_x^{'} &= \sum_{j=0}^{n} v^j\ {}_jp_x^a\ \ {}_jf_x^{'} \\
&= q_x + \sum_{j=0}^{n-1} v^j\ {}_jp_x^a\ p_{x+j}^a && , \text{da } q_x + p_x^a = 1 \\
&= q_x + r\, a_x^{'}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
P_x &= \frac{{}_0B_x^{'}}{{}_0\mathrm{a}_x^{'}} = \frac{v^n\ {}_np_x^a\, B_z}{q_x + r\, a_x^{'}} \\
{}_kV_x &= v^{n-k}\ {}_{n-k}p_{x+k}^a\, B_z - r\, P_x\, a_{x+k}^{'}
\end{aligned}
$$

in Übereinstimmung mit Teilaufgabe 1.

4. Aus $P^{'}V = L^{'}$ ergibt sich: Ein Versicherungsvertrag gegen eine 1. Prämie von $P_x = \dfrac{v^n \,{}_n p_x^a \, B_z}{q_x + r\, a_x^{'}}$, Folgeprämien von $p_{x+k}^a P_x$, $k = 1, 2, ..., n-1$ und einer Leistung des Betrages B_z bei Erreichen der Altersgrenze als Aktiver hat mit der Zusage übereinstimmende P_x und ${}_kV_x$, $k = 1, 2, ..., n$.

5.

$$
\begin{aligned}
{}_kP_x^S &= v \,{}_{k+1}V_x - {}_kV_x \qquad \text{(vgl. S.91 obere Hälfte)} \\
\Rightarrow {}_0P_x^S &= v \,{}_1V_x = \frac{P_x}{p_x^a} = \frac{v^n \,{}_{n-1}p_{x+1}^a \, B_z}{q_x + r\mathrm{a}_x^{'}}
\end{aligned}
$$

$k > 0:$

$$
\begin{aligned}
{}_kP_x^S &= v \,{}_{k+1}V_x - {}_kV_x \\
&= v v^{n-k-1} \,{}_{n-k-1}p_{x+k+1}^a \, B_z - v P_x \, r a_{x+k+1}^{'} - v^{n-k} \,{}_{n-k}p_{x+k}^a \, B_z + P_x \, r a_{x+k}^{'} \\
&= v^{n-k} \left({}_{n-k-1}p_{x+k+1}^a - {}_{n-k}p_{x+k}^a\right) B_z - P_x \left(a_{x+k+1}^{'} - r a_{x+k}^{'}\right) \\
&= v^{n-k} \,{}_{n-k-1}p_{x+k+1}^a \, q_{x+k} \, B_z - P_x \left(a_{x+k+1}^{'} - r a_{x+k}^{'}\right) \\
&= q_{x+k} \, v^{n-k} \,{}_{n-k-1}p_{x+k+1}^a \, B_z + \left(p_{x+k}^a \, P_x - q_{x+k} \, a_{x+k+1}^{'}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_0P_x^R &= {}_0L_x - v q_x \,{}_1V_x \\
&= -v \, q_x \,{}_1V_x \\
&= -q_x \, \frac{P_x}{p_x^a} \\
k > 0: \; {}_kP_x^R &= {}_kL_x - v \, q_{x+k} \,{}_{k+1}V_x \\
&= q_{x+k} \, P_x - v \, q_{x+k} \, v^{n-k-1} \,{}_{n-k-1}p_{x+k+1}^a \, B_z + v \, q_{x+k} \, P_x \, r a_{x+k+1}^{'} \\
&= q_{x+k} \, P_x \left(a_{x+k+1}^{'} + 1\right) - q_{x+k} \, v^{n-k} \,{}_{n-k-1}p_{x+k+1}^a \, B_z
\end{aligned}
$$

6. Seien ${}_k\hat{V}_x$ die Rückstellungswerte des nach m Jahren mit unververfallbarem Anspruch Ausgeschiedenen, $k = m, m+1, ...n$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
{}_k\hat{V}_x &= \frac{m}{n}\ {}_kB_x\,, \quad k = m, m+1, ..., n \\
{}_kB_x &= {}_kV_x + P_x\ \mathrm{a}^a_{x+k} \\
&= v^{n-k}\ {}_{n-k}p^a_{x+k}\ B_z - r\,P_x\,a^{'}_{x+k} + P_x\,\mathrm{a}^a_{x+k} \\
&= v^{n-k}\ {}_{n-k}p^a_{x+k}\ B_z\ +\ P_x\left[\mathrm{a}^a_{x+k} - ra^{'}_{x+k}\right] \\
\Rightarrow {}_k\hat{V}_x &= \frac{m}{n}\left[v^{n-k}\ {}_{n-k}p^a_{x+k}\ B_z + P_x\left(\mathrm{a}^a_{x+k} - ra^{'}_{x+k}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 (40 Punkte)

Eine Versorgungseinrichtung möchte Leistungen im Falle von Invalidität, Alter und Tod ihrer Zugehörigen gewähren und ist frei in der Definition ihres Finanzierungsverfahrens. Diskutieren Sie den Einfluss der im Folgenden genannten Ereignisse auf das Ausgaben-Umlageverfahren (Erhebung von Umlagen in % der Entgeltsumme) einerseits und eine Finanzierung im Wege der individuellen Kapitaldeckung gegen laufenden Beitrag (in Euro) andererseits. In beiden Fällen sollen nach Eintritt des Versorgungsfalles feste Rentenbeträge zur Auszahlung kommen, die ggf. durch einen besonderen Beschluss erhöht werden.

1. Erhöhung aller Anwartschaften ab sofort um 10 %.
2. Einstellungsstopp für 10 Jahre und dann Stabilität des Bestandes auf dem erreichten niedrigeren Niveau.
3. Erhöhung der Entgelte um jährlich 2 %.
4. Anstieg des Rechnungszinses um 1 %.
5. Verlängerung der Lebenserwartung für 65-jährige um ein Drittel.
6. Anstieg des Marktzinses um 1 %
7. Anhebung der laufenden Renten entsprechend der Entwicklung des Preisindexes.

Hinweis: Gehen Sie jeweils von einer selbstständigen Versorgungseinrichtung aus. Vernachlässigen Sie aufsichtsrechtliche, steuerliche und insolvenzrechtliche Aspekte. Soweit möglich, schätzen Sie die Größenordnung der von Ihnen entdeckten Einflüsse.

Musterlösung:

Im reinen Ausgaben-Umlageverfahren gilt folgendes:

1. Eine Erhöhung aller Anwartschaften um 10 % führt bei künftigen Neurentenfällen zu entsprechend höheren Renten. Die Ausgabenlast erhöht sich mit jedem Neurentenfall sukzessive um letztlich 10 % nach etwa 40 Jahren.
2. Der Einstellungsstopp bewirkt eine Minderung der Basis für die Erhebung der Umlage. Die Umlagesätze steigen umgekehrt proportional. Durch den Einstellungsstopp kommt es zu geringerem Erwerb von neuen Anwartschaften, woraus eine sukzessive Entlastung auf der Ausgabenseite entsteht, die nach etwa 40 Jahren

voll ausgeprägt ist. In diesem Zeitpunkt erreicht der Umlagesatz (bei ansonsten unveränderten Rahmenbedingungen) wieder das ursprüngliche Niveau.
3. Eine Erhöhung der Entgelte um jährlich 2 % erhöht die Umlagebasis. Bei unveränderten Ausgaben ergibt sich damit einen Absenkung des Umlagesatzes um etwa 2 % pro Jahr.
4. Ein Anstieg des Rechnungszinses um 1 % wirkt sich mangels Kapitalbildung auf das Ausgabenumlageverfahren nicht aus.
5. Eine Verlängerung der Lebenserwartung für 65-jährige um ein Drittel führt zu einer sukzessiven Erhöhung der Rentenlast um ein Drittel nach etwa 30 Jahren. Entsprechend steigt der Umlagesatz in diesem Zeitraum an.
6. Ein Anstieg des Marktzinses tangiert das Ausgaben-Umlageverfahren nicht, da kein Vermögen gebildet wird.
7. Bei Anpassung der Renten an den Preisindex erhöht sich sukzessive die Rentenlast. Für je 1 % jährlicher Rentensteigerung beträgt die nach etwa 20 Jahren erreichte Erhöhung etwa 10 %.

Bei Kapitaldeckung gilt demgegenüber

1. Die Erhöhung aller Anwartschaften um 10 % erfordert eine Aufstockung des Deckungskapitals und/oder eine Anhebung der Beiträge.
2. Mit dem Einstellungsstopp entfallen die Beiträge für die nicht mehr eingestellten Arbeitskräfte. Das Deckungskapital wächst entsprechend langsamer.
3. Die Erhöhung der Entgelte hat keinen Einfluss auf die Höhe der Beiträge und des Deckungskapitals, weil die Leistungen vom Entgelt unabhängig sind. Lediglich die Relation aus Beiträgen und Entgelten verringert sich.
4. Ein Anstieg des Rechnungszinses reduziert Beiträge für neue Versicherungen und das Deckungskapital für den Bestand.
5. Eine Verlängerung der Lebenserwartung für 65-jährige um ein Drittel führt zu einer Erhöhung der erforderlichen Beiträge um etwa 12 %.
6. Ein Anstieg des Marktzinses führt zu entsprechenden Überschüssen.
7. Bei Anpassung der Renten an den Preisindex wären die Beiträge und im Verlauf das Deckungskapital zu erhöhen. Für je 1 % jährlicher Rentensteigerung beträgt die erforderliche Erhöhung jeweils etwa 10 %.

Aufgabe 4 (30 Punkte)

Füllen Sie den unbestimmten Rechtsbegriff des „Dotierungsrahmens“ mit aktuariellem Inhalt. Behandeln Sie dabei die Anwendungsfelder

1. Einführung der Alterversorgung (Arbeitgeber legt den Dotierungsrahmen fest),
2. Umstrukturierung der Altersversorgung in einem Unternehmen (der Dotierungsrahmen ist zu wahren) und
3. Verschlechterung einer Pensionszusage (Dotierungsrahmen als Geschäftsgrundlage)

Hinweis: Schlagen Sie für die jeweiligen Sachverhalte geeignete versicherungsmathematische Ansätze für die Beschreibung des und die Argumentation mit dem Dotierungsrahmen vor und begründen Sie Ihren Vorschlag.

Musterlösung:

Der Dotierungsrahmen einer Versorgungszusage beschreibt deren wirtschaftliche Folgen auf das zusagende Unternehmen. Zur Darstellung eignen sich einerseits Zeitreihen, die bestimmte Kenngrößen in ihrer voraussichtlichen Entwicklung beschreiben, wie zum Beispiel Zahlungsbelastung, Bilanzrückstellung, Kosten und Eigenkapitalwirkung, und andererseits versicherungsmathematische Größen wie Prämien, Barwerte oder das Deckungskapital. Soweit die zu betrachtenden Versorgungszusagen unterschiedliche Risiken enthalten oder unterschiedliche steuerliche Wirkungen entfalten, kann dies durch entsprechend variierte Prämissen in den Herleitungen der Zeitreihen bzw. der versicherungsmathematischen Größen dargestellt werden. Die vorstehend genannten Größen führen zu einer sehr umfangreichen komplexen Darstellung der wirtschaftlichen Folgen einer Versorgungszusage und sind grundsätzlich für alle der genannten Szenarien verwendbar. Speziell auf die angeführten Situationen abgestellte Verfahren sind folgende:

zu 1. Bei der Einführung der betrieblichen Altersversorgung eignet sich insbesondere eine Kostengröße, die versicherungsmathematische Bruttoprämie mit den für die

Kostenrechnung geeigneten Prämissen. Durch Variation der Prämissen ergibt sich eine gewisse Bandbreite für den Dotierungsrahmen. Neben den Kosten kann die Auswirkung der betrieblichen Altersversorgung auf die Liquidität und die Bilanz eine wichtige Kenngröße sein, die deshalb ebenfalls bei der Beschreibung des Dotierungsrahmens dokumentiert werden sollte. Etwaige Vorschläge der Sozialpartner zu alternativer Leistungsgestaltung müssen sich den vorgegebenen Dotierungsrahmen wahren. Eine möglichst vollständige Beschreibung der für das zusagende Unternehmen wichtigen Kenngrößen ist daher zu empfehlen.

zu 2. Eine Umstrukturierung der betrieblichen Altersversorgung muss den Dotierungsrahmen wahren. Durch Ermittlung der Rückstellung oder des Barwertes vor und nach Umstrukturierung kann der Nachweis geführt werden, dass der Wert der Zusagen insgesamt durch die Umstrukturierung nicht sinkt.

zu 3. Der bei Einführung der Versorgungszusage festgestellte Dotierungsrahmen gestattet die Einordnung der wirtschaftlichen Auswirkungen der Versorgungszusage in die wirtschaftliche Gesamtsituation des Unternehmens. So lässt sich beispielsweise die Relation aus den Kosten der Versorgungszusage zum Umsatz oder zum Überschuss des Unternehmens darstellen. Wenn sich diese Relation im Zeitablauf unvorhersehbar verschlechtert hat, kann dieser Sachverhalt als Argument für eine Verschlechterung der Versorgungszusage herangezogen werden. Entsprechendes gilt für eine nicht vorhersehbare Verschiebung der Relation der Pensionsrückstellung zum Eigenkapital.