

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen)

Klausur vom 24.10.2015

Die Klausur besteht aus 4 Aufgaben, die mit insgesamt 180 Punkten bewertet werden. Um diese maximale Punktzahl erreichen zu können, müssen alle Aufgaben bearbeitet werden. Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 72 Punkte erforderlich.

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Zugelassenes Hilfsmittel: Taschenrechner

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 Besteuerung (16 Punkte)

Ulrich Häniss (50 Jahre alt) schließt ein fondsgebundenes aufgeschobenes Rentenversicherungsprodukt gegen laufende Beiträge in der dritten Schicht ab. Die Laufzeit des Produktes beträgt 15 Jahre. Herr Häniss bezahlt jährlich einen Beitrag von 10.000 EUR.

- a) Bis zum Alter 65 ist das Guthaben in seiner Rentenversicherungspolice auf 250.000 EUR angestiegen. Als Steuersparfuchs entscheidet sich Herr Häniss für die Leistung in Form einer monatlichen Rente. Wie hoch ist die monatliche Rente vor Steuern, wenn der Rentenfaktor für eine monatliche Rente 50 €pro 10.000 €Guthaben beträgt? Wie hoch ist die monatliche Rente nach Steuern, wenn der Ertragsanteil 18% beträgt und der Grenzsteuersatz von Herrn Häniss 40% beträgt?
(6 Punkte)
- b) Der Zwillingsbruder von Ulrich Häniss, Dieter Häniss, hat zeitgleich das gleiche Produkt abgeschlossen. Wieviel Steuern muss Dieter Häniss bezahlen und wie hoch ist die Ablaufleistung nach Steuern, wenn Dieter Häniss im Alter 65 aus diesem Produkt eine Einmalleistung in Anspruch nimmt (also nicht verrentet) und sein Grenzsteuersatz ebenfalls 40% beträgt?
(5 Punkte)
- c) Wie sähen die Ergebnisse aus Aufgabe a) aus, wenn Ulrich Häniss in der Ansparphase auf einen Fondssparplan (mit identischen Kosten und identischem Vertragsverlauf) gesetzt hätte und im Alter 65 das vorhandene Guthaben verrenten würde? Alle sonstigen Annahmen bleiben unverändert, d.h. der Rentenfaktor für eine monatliche Rente beträgt 50 €pro 10.000 €Guthaben, für die Verrentung fallen keine zusätzlichen Kosten an, der Ertragsanteil beträgt 18%, und der Grenzsteuersatz von Herrn Häniss beträgt 40%?
(5 Punkte)

Aufgabe 2 Produktentwicklung eines kapitalmarktorientierten Produktes (44 Punkte)

Sie sind Produktentwickler bei einem deutschen Lebensversicherer und sollen zwei alternative Produktkonzepte hinsichtlich ihrer Vor- und Nachteile bewerten. Die zur Auswahl stehenden Produktkonzepte sind

- i. ein klassisches Produkt mit Überschussbeteiligung in Fonds und
 - ii. ein Produkt mit Wahlrecht auf Indexbeteiligung (auch Select-Produkt genannt).
- a) Erläutern Sie **kurz** (ggf. unterstützend durch eine Grafik) die grundsätzliche Funktionsweise dieser beiden Produkte. Gehen Sie dabei getrennt auf die beiden Fragen ein,
- woran die Beiträge bzw. das Guthaben des Kunden in beiden Produkten partizipieren (Funktionsweise aus Kundensicht) und
 - wie die Beiträge bzw. das Guthaben des Kunden investiert bzw. angelegt werden (Funktionsweise aus Versicherersicht).

Sie brauchen dabei nicht auf die konkrete Ausgestaltung einer Indexbeteiligung oder Fondsbeteiligung einzugehen.

(12 Punkte)

b) Ausgestaltung der Indexbeteiligung

Bei dem Produkt mit Wahlrecht auf Indexbeteiligung sollen Sie sich ferner mit der Frage beschäftigen, wie die Indexbeteiligung ausgestaltet werden soll. Sie haben dafür bereits Gespräche mit einem potenziellen Bankpartner geführt und eine prozentuale Beteiligung an einem Index, dargestellt über eine Call-Option mit einer Laufzeit von einem Jahr und einem Ausübungspreis in Höhe des Kurses zu Beginn des Indexjahres, ausgesucht. Dabei wird die Beteiligungsquote jedes Jahr neu festgelegt.

Für die Festlegung der Beteiligungsquote hat Ihnen die Bank folgende approximative Preisformel gegeben. Der Preis einer Call-Option bezogen auf 1 Euro Kundenguthaben ist in Abhängigkeit von der Volatilität v des ausgewählten Index näherungsweise gegeben durch

$$P(v) = 0,002 + 0,4 \cdot v.$$

Sonstige Parameter haben keinen Einfluss auf den Preis. Wie hoch ist die aktuelle Beteiligungsquote, wenn die aktuelle Überschussbeteiligung des Versicherers (nach Abzug aller Kosten) 3,5% beträgt und die Volatilität des Index aktuell 24,5% beträgt ($v = 0,245$)?

(6 Punkte)

- c) Ihr Vertriebsvorstand möchte mit hohen Aktienquoten bzw. Beteiligungsquoten werben. Erklären Sie ihm, bei welchem der beiden Produkte eine hohe Aktienquote bzw. Beteiligungsquote möglich ist und welche Einflussfaktoren die Aktienquote bzw. Beteiligungsquote des Produktes bestimmen.

(6 Punkte)

- d) Welche Möglichkeit sehen Sie, beim Produkt mit Wahlrecht auf Indexbeteiligung eine Beteiligungsquote an einem Index von mind. 30% zu garantieren, solange Ihre Überschussbeteiligung nicht unter 2% (nach Abzug aller Kosten) sinkt?

(6 Punkte)

e) Fortschreibung einer Vertragsentwicklung für das Produkt mit Wahlrecht auf Indexbeteiligung

Sie haben sich nun dafür entschieden, das Produkt mit Wahlrecht auf Indexbeteiligung an den Markt zu bringen. Herr Daxler schließt das Produkt gegen einen jährlichen Beitrag von 1.000 EUR und mit einer Laufzeit von 20 Jahren ab. In das Produkt sind folgende Kosten einkalkuliert

- Abschlusskosten in Höhe von 2,5% der vereinbarten Beitragssumme, die gleichmäßig von den Beiträgen der ersten fünf Jahre entnommen werden,
- Verwaltungskosten in Höhe von 6% jedes Beitrags, die direkt dem Beitrag entnommen werden,
- laufende Verwaltungskosten in Höhe von 0,3% des Guthabens, die jährlich vor Kauf einer Indexbeteiligung von der Überschussbeteiligung abgezogen werden.

Die Todesfalleistung des Produktes ist gleich dem Kundenguthaben, sodass keine Risikoprämien anfallen.

Nach Ablauf von vier Versicherungsjahren ist das Guthaben von Herrn Daxler angewachsen auf 5.000 EUR (vor Zahlung des fünften Jahresbeitrags). Wie entwickelt sich das Guthaben von Herrn Daxler im 5. und im 6. Versicherungsjahr, wenn folgende Kurse bzw. Volatilitäten des DAX zu den jeweiligen Jahrestichtagen zu beobachten sind, Herr Daxler weiterhin Beiträge zahlt und er sich in beiden Jahren für die Indexbeteiligung entschließt?

Zeitpunkt	Kurs des DAX	Volatilität des DAX	Überschussbeteiligung
Beginn des 5. Jahres	10.000	34,5%	3,8%
Beginn des 6. Jahres	11.000	24,5%	3,3%
Beginn des 7. Jahres	12.500	37,0%	3,0%

(14 Punkte)

Aufgabe 3 Governance – Struktur unter Solvency II (60 Punkte)

Im Rahmen des Solvency II - Umsetzungsprojekts in der Germania-Accurata Versicherungsgruppe haben Sie als Projektleiter die neue Governance - Struktur in den Lenkungsausschuss gegeben.

Die vorbereitete Unterlage beschreibt zunächst die vier Schlüsselfunktionen, die in der SII-Rahmenrichtlinie genannt sind, und geht auch auf das Three-Lines-of-Defense-Konzept unter Solvency II ein. Zur Illustration haben Sie das nachfolgende Organigramm verwendet.

Bitte gehen Sie in Ihren Antworten nur auf die Fragestellungen im Segment der Lebensversicherung ein. Eine Detaillierung der Funktionen auf z.B. Gruppe, Holding etc. ist nicht zwingend erforderlich.

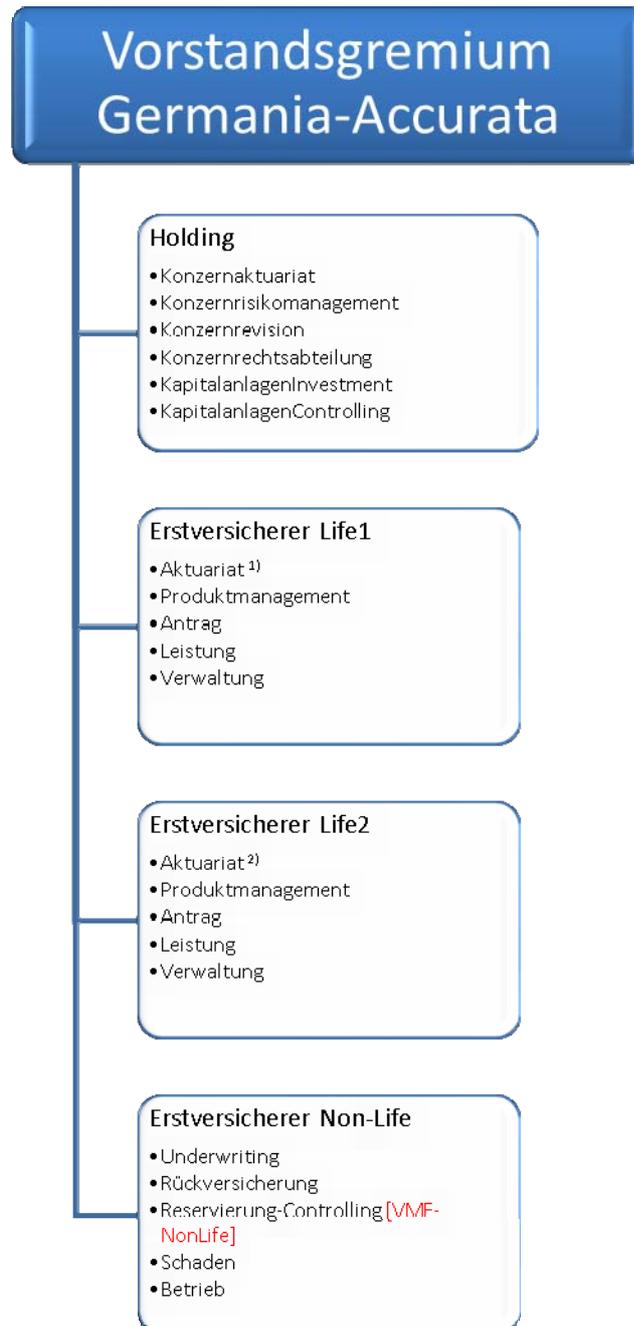
- a) Benennen Sie die vier Schlüsselfunktionen und ordnen Sie die Funktionen einer der im Organigramm gekennzeichneten Bereichsleitungen zu. Begründen Sie Ihre Wahl unter Beachtung des Three-Lines-of-Defense-Konzepts und ordnen Sie alle angegebenen Funktionsbereiche den Verteidigungslinien zu.

Welche Rolle spielt der Verantwortliche Aktuar? (25 Punkte)

Während der Lenkungsausschusssitzung werden Ihnen zu der Unterlage folgende Fragen gestellt, die Sie bitte beantworten mögen:

- b) Die Erstversicherer sind bzgl. der Themen Pricing und Reservierung unterschiedlich aufgestellt. Gibt es eine generelle Reorganisationsempfehlung unter Solvency II - Aspekten? (10 Punkte)
- c) Ihnen wird vertraulich mitgeteilt, dass das Konzernaktuarat aufgelöst wird und die Bereichsmitglieder auf entsprechende Positionen in den Erstversicherungsunternehmen aufgeteilt werden sollen. Wo positionieren Sie nun die VMF? Welche potentiellen Konflikte sehen Sie und wie lösen Sie diese auf? (25 Punkte)

Organigramm zu Aufgabe 3



1) Abteilungen Aktuariat Life1
 Controlling
 Rechnungslegung
 Produktentwicklung / Tarifierung

Abteilungen Produktmanagement Life1
 Marketing
 Vertriebsunterstützung

2) Abteilungen Aktuariat Life2
 Controlling
 Rechnungslegung

Abteilungen Produktmanagement Life2
 Marketing
 Vertriebsunterstützung
 Produktentwicklung / Tarifierung

Aufgabe 4 Analyse der Zinssensitivität von Lebensversicherungen (60 Punkte)

Sie leiten das Aktuariat eines deutschen Lebensversicherers. Im Verlauf des Jahres 2015 haben Sie die Entscheidung der Europäischen Zentralbank (EZB) zur Durchführung eines Ankaufprogramms von Staatsanleihen und die öffentliche Diskussion hierüber mit Interesse verfolgt. Dabei hat sich Ihre Meinung verfestigt, dass das aktuelle Niedrigzinsumfeld noch länger andauern wird. Als die EZB jetzt Anfang September explizit von einer möglichen Verlängerung des Programms spricht, nehmen Sie diese Nachricht zum Anlass, eine schon länger erwogene detailliertere Analyse Ihres Bestands an Lebensversicherungen im Hinblick auf die Sensitivität verschiedener Produkte und Vertragstypen gegenüber Veränderungen des Rechnungszinses jetzt durchzuführen. Angeregt durch entsprechende Diskussionen mit einer Kollegin beschließen Sie, hierzu auch Durationskennzahlen zu verwenden.

Seien nachfolgend ω das Schlussalter der verwendeten biometrischen Rechnungsgrundlagen und

$L = (L_t)$ mit $L_t \geq 0$ und $0 \leq t \leq \omega$ der Cash Flow der Leistungen,

$B = (B_t)$ mit $B_t \geq 0$ und $0 \leq t \leq \omega$ der Cash Flow der laufenden Beiträge und

$V = (V_t)$ mit $0 \leq t \leq \omega$ der „Cash Flow“ der zugehörigen Deckungskapitale.

Die Cash Flows von Beiträgen und Leistungen werden üblicherweise so normiert, dass $B_1 = 1$ gilt und – je nach produktabhängiger Ausgestaltung des Leistungsspektrums – auch $L_s = 1$ für ein geeignetes s gilt. Der Einfachheit halber sei hier stets $s = 1$ gewählt. Diese Normierung dient nur dazu, dass in der Praxis in einem abschließenden Schritt aus dem anfänglichen Beitragssatz „für 1 €Beitrag“ und dem anfänglichen Leistungssatz „für 1 €Leistung“ dann durch Multiplikation mit einem anfänglichen Beitrag B und einer anfänglichen „Versicherungssumme“ VL die konkreten Vertragswerte in €gewonnen werden können.

Mit P werde die Bildung des Barwertes eines Cash Flows zum Rechnungszins i bezeichnet; wie üblich sei $v = v(i) = \frac{1}{1+i}$ der zugehörige Diskontfaktor. Je nach Kontext werden zur Betonung der gerade im Fokus stehenden funktionalen Abhängigkeiten die Bezeichnungen

$$P = P(L) = P(i) = P(i, L)$$

mit dem Cash Flow L und dem Rechnungszins i synonym verwendet. Der Einfachheit halber sollen alle verwendeten Funktionen zweifach stetig differenzierbar von i abhängen; die Bildung der Ableitung werde entsprechend synonym bezeichnet mit

$$P' = P'(i) = P'(i, L) = \frac{\partial P}{\partial i} = \frac{\partial P}{\partial i}(i) = \frac{\partial P}{\partial i}(i, L).$$

a) Definieren Sie jeweils kurz

- die absolute Duration $D_A(L)$ (auch Dollar- oder Euro- Duration genannt),

- die modifizierte Duration $D_{\text{mod}}(L)$ und

- die Macauly-Duration $D_{\text{Mac}}(L)$

am Beispiel des Leistungs - Cash Flows L . (9 Punkte)

- b) Um diese Durationsbegriffe auch zahlenmäßig zu untersuchen, haben Sie sie in einer Tabellenkalkulation hinterlegt. Um diese Berechnungen zu testen, leiten Sie für einige Standardbarwerte deren Durationsen in einer Darstellung mittels klassischer Kommutationswerte her. Sei hierzu

$$\begin{aligned}
 l_x & \text{ Anzahl der Lebenden des erreichten Alters } x \text{ der Sterbetafel,} \\
 q_x & \text{ Wahrscheinlichkeit des } x\text{-Jährigen, zwischen } x \text{ und } x+1 \text{ zu sterben,} \\
 {}_n p_x & = \frac{l_{x+n}}{l_x} \text{ Wahrscheinlichkeit des } x\text{-Jährigen, nach } n \text{ Jahren noch zu leben} \\
 d_x & = l_x - l_{x+1} = q_x \cdot l_x \text{ Anzahl der Toten zwischen den Altern } x \text{ und } x+1, \\
 D_x = D_x(i) & = l_x \cdot v^x = l_x \cdot v(i)^x \\
 C_x = C_x(i) & = d_x \cdot v^{x+1} = d_x \cdot v(i)^{x+1} \\
 M_x = M_x(i) & = \sum_{k=1}^{\omega-x+1} C_{x+k-1} \\
 R_x = R_x(i) & = \sum_{k=1}^{\omega-x+1} M_{x+k-1} \\
 A_x = A_x(i) & = \sum_{k=1}^{\omega-x+1} {}_{k-1} p_x \cdot q_{x+k-1} \cdot v^k = \sum_{k=1}^{\omega-x+1} \frac{C_{x+k-1}}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}
 \end{aligned}$$

der Barwert der lebenslänglichen Todesfallversicherung mit Todesfallleistung von 1 €

$$(IA)_x = (IA)_x(i) = \sum_{k=1}^{\omega-x+1} k \cdot {}_{k-1} p_x \cdot q_{x+k-1} \cdot v^k = \sum_{k=1}^{\omega-x+1} \frac{M_{x+k-1}}{D_x} = \frac{R_x}{D_x}$$

der Barwert der lebenslänglichen Todesfallversicherung mit jährlich um 1 € steigender Todesfallleistung von anfänglich 1 € dann 2 € 3 € usw.

Zeigen Sie für die lebenslange Todesfallversicherung:

$$D_A(A_x) = v \cdot \frac{R_x}{D_x}, \quad D_{\text{mod}}(A_x) = v \cdot \frac{R_x}{M_x}, \quad D_{\text{Mac}}(A_x) = \frac{R_x}{M_x}. \quad (9 \text{ Punkte})$$

- c) Sie beginnen danach mit der Analyse der Abhängigkeit von Beitrag und Leistung vom Rechnungszins. Mit $NB = NB(i)$ seien der anfängliche (ungezillmerte) Nettobeitrag für 1 € anfängliche Versicherungsleistung und mit $VL = VL(i)$ die anfängliche Versicherungsleistung gegen 1 € anfänglichen Nettobeitrag bezeichnet.

Dann ist $NB = \frac{P(L)}{P(B)}$ und $VL = \frac{P(B)}{P(L)}$. Leiten Sie die folgenden Formeln für die Ableitung

nach dem Zins her (6 Punkte):

$$NB' = -NB \cdot (D_{\text{mod}}(L) - D_{\text{mod}}(B))$$

$$VL' = VL \cdot (D_{\text{mod}}(L) - D_{\text{mod}}(B))$$

Geben Sie jeweils eine Formel für die näherungsweise Änderung von anfänglichem Nettobeitrag und anfänglicher Versicherungsleistung mit dem Rechnungszins an (4 Punkte).

- d) Begründen Sie mit dem geometrischen Zugang zum Durationsbegriff, dass im Regelfall $D_{Mac}(B) \leq D_{Mac}(L)$ gilt (3 Punkte).

Hinweis: Erläutern Sie hierzu anschaulich, warum $D_{Mac}(L) < D_{Mac}(B)$ zu einem ökonomisch unerwünschten (warum?) Versicherungsvertrag führen würde, der gerade deshalb im Neugeschäft nicht angeboten wird.

Folgern Sie hieraus $D_{mod}(L) - D_{mod}(B) \geq 0$. (1 Punkt)

- e) Geben Sie nachfolgend jeweils kurz an, bei welchem Vertrag sich Beitrag und Leistung bei ansonsten gleichen Verhältnissen stärker mit dem Rechnungszins ändern, und begründen Sie dies kurz mit Hilfe der Formeln aus Teil c):

- Einmalbeitrag vs. laufender Beitrag (4 Punkte)

- aufgeschobene Leibrente vs. sofort beginnende Leibrente (4 Punkte)

- aufgeschobene Leibrente vs. Erlebensfallversicherung mit Kapitalabfindung (4 Punkte)

- f) Sie analysieren jetzt die Abhängigkeit des Deckungskapitals $V = P(L) - P(B)$ einer Versicherung gegen laufenden Beitrag vom Rechnungszins, wobei die biometrischen Rechnungsgrundlagen für Beitrag, Leistung und Deckungskapital übereinstimmen.

Leiten Sie für die Ableitung $V' = \frac{\partial V}{\partial i}$ die folgende Formel her:

$$V' = -(V \cdot D_{mod}(L) + P(B) \cdot (D_{mod}(L) - D_{mod}(B))) \quad (6 \text{ Punkte})$$

- g) Wächst oder fällt die Zinsabhängigkeit des Deckungskapitals, wenn der Versicherungsnehmer einen Vertrag gegen laufenden Beitrag zukünftig beitragsfrei stellt? (5 Punkte)

Für welchen Vertrag ist bei ansonsten gleichen Verhältnissen mehr Zinszusatzreserve (ZZR) zu stellen, einen Vertrag gegen Einmalbeitrag oder einen Vertrag gegen laufenden Beitrag? (5 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie Teil f). Bei der zweiten Frage dürfen Sie ohne weitere Begründung unterstellen, dass das Deckungskapital der handelsrechtlichen Deckungsrückstellung entspricht, also keine nachträglichen Maximierungen o.ä. vorgenommen werden, und dass die Begrenzung der ZZR auf die ersten 15 Jahre nichts ändert gegenüber einer Betrachtung der vollen Vertragslaufzeit.

Lösungen

Lösung Aufgabe 1 Besteuerung

Ulrich Häniss (50 Jahre alt) schließt ein fondsgebundenes aufgeschobenes Rentenversicherungsprodukt gegen laufende Beiträge in der dritten Schicht ab. Die Laufzeit des Produktes beträgt 15 Jahre. Herr Häniss bezahlt jährlich einen Beitrag von 10.000 EUR.

- a) Bis zum Alter 65 ist das Guthaben in seiner Rentenversicherungspolice auf 250.000 EUR angestiegen. Als Steuersparfuchs entscheidet sich Herr Häniss für die Leistung in Form einer monatlichen Rente. Wie hoch ist die monatliche Rente vor Steuern, wenn der Rentenfaktor für eine monatliche Rente 50 €pro 10.000 €Guthaben beträgt? Wie hoch ist die monatliche Rente nach Steuern, wenn der Ertragsanteil 18% beträgt und der Grenzsteuersatz von Herrn Häniss 40% beträgt? (6 Punkte)

Ablaufleistung vor Steuern	250.000 EUR	
Steuern Ansparphase	-	1 Punkt
Verrenteter Betrag	250.000 EUR	
Rente vor Steuern	1250 EUR	1 Punkt
Ertragsanteil (zu versteuern)	225 EUR	2 Punkte
Steuern Rentenphase	90 EUR	1 Punkt
Rente nach Steuern	1160 EUR	1 Punkt

- b) Der Zwilling Bruder von Ulrich Häniss, Dieter Häniss, hat zeitgleich das gleiche Produkt abgeschlossen. Wie viel Steuern muss Dieter Häniss bezahlen und wie hoch ist die Ablaufleistung nach Steuern, wenn Dieter Häniss im Alter 65 aus diesem Produkt eine Einmalleistung in Anspruch nimmt (also nicht verrentet) und sein Grenzsteuersatz ebenfalls 40% beträgt? (5 Punkte)

Ablaufleistung vor Steuern	250.000 EUR	
Beitragssumme	150.000 EUR	
Unterschiedsbetrag zu versteuernder Betrag	100.000 EUR	1 Punkt
Steuern	50.000 EUR	2 Punkte
Ablaufleistung nach Steuern	20.000 EUR	1 Punkt
	230.000 EUR	1 Punkt

- c) Wie sähen die Ergebnisse aus Aufgabe a) aus, wenn Ulrich Häniss in der Ansparphase auf einen Fondssparplan (mit identischen Kosten und identischem Vertragsverlauf) gesetzt hätte und im Alter 65 das vorhandene Guthaben verrenten würde? Alle sonstigen Annahmen bleiben unverändert, d.h. der Rentenfaktor für eine monatliche Rente beträgt 50 €pro 10.000 €Guthaben, für die Verrentung fallen keine zusätzlichen Kosten an, der Ertragsanteil beträgt 18% und der Grenzsteuersatz von Herrn Häniss beträgt 40%? (5 Punkte)

Ablaufleistung vor Steuern	250.000 EUR	
Beitragssumme	150.000 EUR	
Unterschiedsbetrag	100.000 EUR	
zu versteuernder Betrag	100.000 EUR	1 Punkt
Steuern	25.000 EUR	1 Punkt
Ablaufleistung nach Steuern / verreiteter Betrag	225.000 EUR	1 Punkt
Rente vor Steuern	1125 EUR	
Ertragsanteil (zu versteuern)	202,50 EUR	1 Punkt
Steuern Rentenphase	81 EUR	
Rente nach Steuern	1044 EUR	1 Punkt

Lösung Aufgabe 2 Produktentwicklung eines kapitalmarktorientierten Produktes (44 Punkte)

Sie sind Produktentwickler bei einem deutschen Lebensversicherer und sollen zwei alternative Produktkonzepte hinsichtlich ihrer Vor- und Nachteile bewerten. Die zur Auswahl stehenden Produktkonzepte sind

- i. ein klassisches Produkt mit Überschussbeteiligung in Fonds und
 - ii. ein Produkt mit Wahlrecht auf Indexbeteiligung (auch Select-Produkt genannt).
- a) Erläutern Sie **kurz** (ggf. unterstützend durch eine Grafik) die grundsätzliche Funktionsweise dieser beiden Produkte. Gehen Sie dabei getrennt auf die beiden Fragen ein,
- woran die Beiträge bzw. das Guthaben des Kunden in beiden Produkten partizipieren (Funktionsweise aus Kundensicht) und
 - wie die Beiträge bzw. das Guthaben des Kunden investiert bzw. angelegt werden (Funktionsweise aus Versicherersicht).

Sie brauchen dabei nicht auf die konkrete Ausgestaltung einer Indexbeteiligung oder Fondsbeteiligung eingehen. (12 Punkte)

Klassisches Produkt mit Überschussbeteiligung in Fonds

- woran die Beiträge bzw. das Guthaben des Kunden in beiden Produkten partizipieren (Funktionsweise aus Kundensicht) und
 - Beiträge (bzw. das garantierte Deckungskapital) werden beteiligt an den Erträgen des konventionellen Sicherungsvermögens (2 Punkte)
 - Überschüsse aus dem konventionellen Teil fließen in die Fonds und stellen eine Fondsbeteiligung dar (1 Punkt)
- wie die Beiträge bzw. das Guthaben des Kunden investiert bzw. angelegt werden (Funktionsweise aus Versicherersicht).
 - Anlage genauso wie die Beteiligung des Kunden (1 Punkt)
 - Beiträge (bzw. das garantierte Deckungskapital) werden im konventionellen Sicherungsvermögens angelegt
 - Überschüsse aus dem konventionellen Teil werden in Fonds angelegt

Produkt mit Wahlrecht auf Indexbeteiligung (auch Select-Produkt genannt)

- woran die Beiträge bzw. das Guthaben des Kunden in beiden Produkten partizipieren (Funktionsweise aus Kundensicht)
 - Das **gesamte** Kundenguthaben (2 Punkte) partizipiert wahlweise an
 - einem Index (1 Punkt)
 - an der konventionellen Überschussbeteiligung des Versicherers (1 Punkt)
- wie die Beiträge bzw. das Guthaben des Kunden investiert bzw. angelegt werden (Funktionsweise aus Versicherersicht).
 - Das **gesamte** Guthaben wird im konventionellen Sicherungsvermögen des Versicherers angelegt. (2 Punkte)
 - Nur die Überschüsse werden verwendet, um eine Indexbeteiligung zu finanzieren. (2 Punkte)

b) Ausgestaltung der Indexbeteiligung

Bei dem Produkt mit Wahlrecht auf Indexbeteiligung sollen Sie sich ferner mit der Frage beschäftigen, wie die Indexbeteiligung ausgestaltet werden soll. Sie haben dafür bereits Gespräche mit einem potenziellen Bankpartner geführt und eine prozentuale Beteiligung an einem Index, dargestellt über eine Call-Option mit einer Laufzeit von einem Jahr und einem Ausübungspreis in Höhe des Kurses zu Beginn des Indexjahres, ausgesucht. Dabei wird die Beteiligungsquote jedes Jahr neu festgelegt.

Für die Festlegung der Beteiligungsquote hat Ihnen die Bank folgende approximative Preisformel gegeben. Der Preis einer Call-Option (für eine 100%ige Beteiligung) bezogen auf 1 Euro Kundenguthaben ist in Abhängigkeit von der Volatilität σ des ausgewählten Index näherungsweise gegeben durch

$$P(\sigma) = 0,002 + 0,4 \cdot \sigma.$$

Sonstige Parameter haben keinen Einfluss auf den Preis. Wie hoch ist die aktuelle Beteiligungsquote, wenn die aktuelle Überschussbeteiligung des Versicherers (nach Abzug aller Kosten) 3,5% beträgt und die Volatilität des Index aktuell 24,5% beträgt ($\sigma = 0,245$)? (5 Punkte)

Preis einer Call-Option bezogen auf 1 Euro Kundenguthaben

$$P(\sigma) = 0,002 + 0,4 \cdot \sigma = 0,002 + 0,4 \cdot 0,245 = 0,1 \quad (3 \text{ Punkte})$$

Berechnung der Beteiligungsquote BQ relativ

vorhandene Überschussbeteiligung = vorhandenes „Hedgebudget“ = 3.5% = 0,035

$$BQ = \frac{\text{Hedgebudget}}{\text{Preis}} = \frac{0,035}{0,1} = 0,35 = 35\%$$

Berechnung der Beteiligungsquote BQ mit absoluten Werten

Beispiel: Kundenguthaben = 100 Euro

Überschussbeteiligung = 3,50 Euro

Es können damit also 35 Call-Optionen (für je eine Beteiligung an 1 Euro) gekauft werden.

Damit können 35% des Kundenguthabens am Index beteiligt sein. (3 Punkte)

- c) Ihr Vertriebsvorstand möchte mit hohen Aktienquoten bzw. Beteiligungsquoten werben. Erklären Sie ihm, bei welchem der beiden Produkte eine hohe Aktienquote bzw. Beteiligungsquote möglich ist und welche Einflussfaktoren die Aktienquote bzw. Beteiligungsquote des Produktes bestimmen. (6 Punkte)

Klassisches Produkt mit Überschussbeteiligung in Fonds

- Einflussfaktoren
 - Höhe der Überschussbeteiligung und (1 Punkt)
 - Fondsperformance (für in Vergangenheit gutgeschriebene Überschüsse)
- Die Fondsbeteiligung ist auf die Höhe der Überschüsse beschränkt. (1 Punkt)
- Konsequenz: keine hohen Aktienquoten möglich (1 Punkt)

Produkt mit Wahlrecht auf Indexbeteiligung (auch Select-Produkt genannt)

- Einflussfaktoren
 - Höhe der Überschussbeteiligung (1 Punkt)
 - Preis der Call-Option (und damit Volatilität) (1 Punkt)
 - Bei geringer Volatilität ist eine hohe Beteiligungsquote möglich. (1 Punkt)
- d) Welche Möglichkeit sehen Sie, beim Produkt mit Wahlrecht auf Indexbeteiligung eine Beteiligungsquote an einem Index von mind. 30% zu garantieren, solange Ihre Überschussbeteiligung nicht unter 2% (nach Abzug aller Kosten) sinkt? (6 Punkte)
- Beschränkung der Volatilität (3 Punkte)
 - Berechnung der notwendigen Zielvolatilität (3 Punkte)

$$BQ = \frac{\text{Hedgebudget}}{\text{Preis}} = \frac{\text{Hedgebudget}}{0,002 + 0,4 \cdot v}$$

auflösen nach v

$$BQ \cdot (0,002 + 0,4 \cdot v) = \text{Hedgebudget}$$

$$BQ \cdot 0,4 \cdot v = \text{Hedgebudget} - 0,002 \cdot BQ$$

$$v = \frac{\text{Hedgebudget} - 0,002 \cdot BQ}{0,4 \cdot BQ}$$

Hedgebudget = 0,02 und **BQ = 0,3** einsetzen

$$v = \frac{0,02 - 0,002 \cdot 0,3}{0,4 \cdot 0,3} = 0,1617$$

- e) Fortschreibung einer Vertragsentwicklung für das Produkt mit Wahlrecht auf Indexbeteiligung

Annahmen

- jährlichen Beitrag von 1.000 EUR

- Laufzeit 20 Jahre
- Abschlusskosten in Höhe von 2,5% der vereinbarten Beitragssumme, die gleichmäßig von den Beiträgen der ersten fünf Jahre entnommen werden,
- Verwaltungskosten in Höhe von 6% jedes Beitrags, die direkt dem Beitrag entnommen werden,
- laufende Verwaltungskosten in Höhe von 0,3% des Guthabens, die jährlich vor Kauf einer Indexbeteiligung von der Überschussbeteiligung abgezogen werden.

Vertragsverlauf 5. Versicherungsjahr

- Guthaben vor Sparbeitrag 5.000
- Berechnungen der Abschlusskosten (2 Punkte)
 - vereinbarte Beitragssumme: $20 \cdot 1.000 = 20.000$
 - Abschlusskosten: $2,5\% \cdot 20.000 = 500$
 - Entnahme von den Beiträgen der ersten 5 Jahre (d.h. 100 Euro pro Beitrag)
- Sparbeitrag zu Beginn des 5. Versicherungsjahres = $1.000 - 160 = 840$ (1 Punkt)
- Guthaben nach Sparbeitrag = 5.840 (1 Punkt)
- Berechnung der Beteiligungsquote im 5. Jahr (1 Punkt)

$$BQ = \frac{\text{Hedgebudget}}{\text{Preis}} = \frac{\text{Hedgebudget}}{0,002 + 0,4 \cdot v} = \frac{0,038 - 0,003}{0,002 + 0,4 \cdot 0,345} = 0,25$$

- Berechnung des Guthabens zu Beginn des 6. Versicherungsjahres (vor dem 6. Sparbeitrag) (3 Punkte)

$$5.840 \cdot \left(1 + 0,25 \cdot \left(\frac{11.000}{10.000} - 1 \right) \right) = 5.986,00$$

Vertragsverlauf 6. Versicherungsjahr

- Guthaben vor Sparbeitrag 5.986,00
- Sparbeitrag zu Beginn des 6. Versicherungsjahres = $1.000 - 60 = 940$ (1 Punkt)
- Guthaben nach Sparbeitrag = 6.926 (1 Punkt)
- Berechnung der Beteiligungsquote im 6. Jahr (1 Punkt)

$$BQ = \frac{\text{Hedgebudget}}{\text{Preis}} = \frac{\text{Hedgebudget}}{0,002 + 0,4 \cdot v} = \frac{0,033 - 0,003}{0,002 + 0,4 \cdot 0,245} = 0,3$$

- Berechnung des Guthabens zu Beginn des 6. Versicherungsjahres (vor dem 7. Sparbeitrag) (3 Punkte)

$$6.926 \cdot \left(1 + 0,3 \cdot \left(\frac{12.500}{11.000} - 1 \right) \right) = 7.209,34$$

Übersicht Vertragsverlauf und Punkteverteilung

Zeitpunkt	Guthaben vor Beitrag	Sparbeitrag	Guthaben nach Sparbeitrag	Beteiligungsquote	Indexperformance
Beginn des 5. Jahres	5.000	840 (3 Punkte)	5.840 (1 Punkt)	25% (1 Punkt)	10% (1 Punkt)
Beginn des 6. Jahres	5.986 (2 Punkte)	940 (1 Punkt)	6.926 (1 Punkt)	30% (1 Punkt)	13,63% (1 Punkt)
Beginn des 7. Jahres	7.209,34 (2 Punkte)				

Lösung Aufgabe 3

(a)

Die vier Schlüsselfunktionen werden begründet in der Rahmenrichtlinie (Richtlinie 2009/138/EG, "ABSCHNITT 2 ALLGEMEINE GOVERNANCE-ANFORDERUNGEN"), in den Delegierte Verordnung der EU 2015/35 weiter ausgeführt (Artikel 269 bis 272) und im neuen VAG unmittelbar in die Versicherungsaufsicht integriert (§§26, 29, 30, 31). Sie lauten:

1. Risikomanagement-Funktion RMF
2. Compliance-Funktion CF
3. Interne Revision IR
4. Versicherungsmathematische Funktion. VMF

Beschreibung der Verteidigungslinien:

1. Operative Kontrolle
2. Steuerung und Kontrolle der operativen Kontrolle
3. Unabhängige Überwachung der Funktionalität und Effektivität der ersten 2 Verteidigungslinien

Zuordnung der Schlüsselfunktionen zu Verteidigungslinien:

Die Interne Revision überprüft die gesamte Geschäftsorganisation und insbesondere das interne Kontrollsystem auf deren Angemessenheit und Wirksamkeit. Sie muss objektiv und unabhängig von anderen operativen Tätigkeiten sein (vgl. § 30 VAG n.F.). Im Modell der „Three Lines of Defense“ bildet sie somit die dritte Verteidigungslinie, die anderen Schlüsselfunktionen gehören zur zweiten Verteidigungslinie.

Sie müssen unabhängig sein und es dürfen keine Konflikte zwischen ihnen und den übrigen Schlüsselfunktionen sowie keine zur ersten Verteidigungslinie bestehen. Soweit mit der Wesensart, dem Umfang und der Komplexität der mit der Geschäftstätigkeit des Unternehmens einhergehenden Risiken vereinbar (Proportionalität), können durch die gewählte Struktur bedingte mögliche Konflikte durch geeignete Maßnahmen entschärft werden.

Vorschlag zur Zuordnung der Schlüsselfunktionen auf Bereichsleitungen in der Linienstruktur:

Eine Holding eines Versicherungskonzerns muss nach derzeitiger Interpretation in jedem Fall die Schlüsselfunktionen RM, CF und IR benennen. Eine VMF muss nur benannt werden, soweit durch die Holding selbst Versicherungsgeschäft betrieben wird. In diesem Fall sei angenommen, die Holding betriebe Rückversicherungsgeschäft.

Holding

- Konzernaktuariat VMF für Gruppe, Holding und Life1 (ggf. auch Life2)
- Konzernrisikomanagement RM für Gruppe, Holding und alle Einzelgesellschaften
- Konzernrevision IR für Gruppe, Holding und alle Einzelgesellschaften
- Konzernrechtsabteilung IC für Gruppe, Holding und alle Einzelgesellschaften
- KapitalanlagenInvestment
- KapitalanlagenControlling

Erstversicherer Life1

- Aktuariat ¹⁾ VA Life1
- Produktmanagement
- Antrag
- Leistung
- Verwaltung

Erstversicherer Life2

- Aktuariat ²⁾ VA und VMF Life2 (falls nicht im Konzernaktuariat)
- Produktmanagement
- Antrag
- Leistung
- Verwaltung

Erstversicherer Non-Life

- Underwriting
- Rückversicherung
- Reservierung-Controlling VMF und VA (soweit erforderlich) Non-Life
- Schaden
- Betrieb

Begründung:

Eine konkrete Organisationsform ist für die Ausgestaltung der Schlüsselfunktionen regulatorisch nicht vorgeschrieben. Insbesondere können Schlüsselfunktionen in einem Konzern zentralisiert oder in den einzelnen Gesellschaften über die Linienorganisation dargestellt werden oder sogar ausgelagert werden. Es ist pro Einheit und Schlüsselfunktion der Aufsicht eine verantwortliche Person zu benennen.

Neben den regulatorischen Anforderungen nach Unabhängigkeit gegenüber Aufgaben der ersten Verteidigungslinie (Risikoprüfung) sowie gegenüber den übrigen Funktionen und der persönlichen und fachlichen Eignung können also unternehmerische Überlegungen den Ausschlag für eine konkrete Organisation geben. Im Folgenden werden Gründe für das skizzierte Beispiel gegeben.

Zentrale Ansiedlung von RM, IR, IC:

Die für diese Funktionen zuständigen Einheiten sind nur in der Holding angesiedelt. Damit ist davon auszugehen, dass die bisherigen entsprechenden Zuständigkeiten bereits derzeit über die Holding dargestellt werden.

VA:

Ein VA ist aufsichtsrechtlich für Lebensversicherer oder Versicherer die entsprechende Rückstellungen bilanzieren vorgeschrieben. Als VA ist häufig der Leiter des Aktuariates benannt. Es sind jedoch auch andere Zuordnungen zu finden, etwa beim Leben-Vorstand, einem direkt unterstellten Mitarbeiter oder bei einem Mitarbeiter des Aktuariates. Eine Unabhängigkeit von der Risikoaufnahme ist nicht gefordert. Insbesondere ist eine Zuständigkeit für die Tarifentwicklung, die man der ersten Verteidigungslinie zuordnen würde, nicht problematisch. Für den Erstversicherer Non-Life wird angenommen, dass ein Mitarbeiter entsprechender Kompetenz vorhanden ist. Man findet die Zuständigkeit des VA-Non-Life auch ausgelagert auf Aktuar einer Leben-Schwestergesellschaft oder der Holding.

VMF:

Die VMF muss über ein tiefes Verständnis des Geschäfts verfügen. Das betrifft die Produkte, Besonderheiten des Bestandes sowie best-estimate Rechnungsgrundlagen.

Der Ansiedlung der VMF-Life1 im Aktuarium von Life1 ist problematisch. Die Zuständigkeit des Aktuariates erstreckt sich über die Produkt/Tarifentwicklung auch auf Zuständigkeiten der ersten Verteidigungslinien. Hier wäre sogar denkbar, dass der Leiter und VA umsatzbezogene Zielvereinbarungen zu erfüllen hat. Die vorhandene Trennung von Aktuarium und Produktmanagement legt nahe, dass eine Beibehaltung der Zuständigkeiten des Aktuariates und eine Übernahme der VMF nicht mit Proportionalitätsargumenten begründet werden können. Die vorgeschlagene Ansiedlung im Konzernaktuarium würde den Konflikt bei nicht vorliegender Proportionalität lösen. Als unternehmerisch problematisch könnte ein damit verbundener Abfluss von Kompetenz aus Life1 angesehen werden oder ein Aufbau dieser Kompetenz in der Holding.

Anders als bei Life1 besteht für Life2 kein Konflikt in der Ansiedlung beim Life2-Aktuarium. Dies könnte aufgrund der Überschneidungen in Kompetenzen und Zuständigkeiten mit anderen Aufgaben des Aktuariates unternehmerisch geboten sein. Soweit jedoch im Konzernaktuarium bereits SII-Leben-Prozesse für Life1 vorgesehen sind, könnten sich Synergien aus der zusätzlichen Übernahme der VMF für Life2 durch das Konzernaktuarium ergeben.

Für Non-Life war die Ansiedlung der VMF bereits in der Non-Life Einheit für die Einheit Reservierung-Controlling vorgegeben. Damit wäre wohl kein tieferes Non-Life Know-How in der Holding vertreten.

Da ein Konzernaktuarium besteht, ist die Übernahme der VMF der Gruppe und der Holding naheliegend.

(b)

Wie unter (a) beschrieben ist die Ansiedlung der VMF-Life1 im Aktuarium von Life1 problematisch aufgrund der Pricing-Zuständigkeiten, denn die dort behandelten Themen befinden sich auf der ersten Verteidigungslinie. Aus unternehmerischen Gründen erscheint die Übernahme der VMF nur einer von 2 Lebensgesellschaften durch das Konzernaktuarium nicht überzeugend. Hier scheint die Aufhebung des Konfliktes durch Übertragung des Pricings ins Produktmanagement geboten.

(c)

Nach der Umorganisation gemäß (b) wird die VMF Life1 konfliktfrei auf das Aktuarium Life1 übertragen. Die übrigbleibende Zuständigkeit VMF Gruppe und Holding kann dem Konzernrisikomanagement übertragen werden. Ein Konflikt besteht grundsätzlich in der gemeinsamen Zuständigkeit für VMF und RM in einer Einheit oder sogar in einer verantwortlichen Person.

Die VMF hat neben der Unterstützung der RM die Angemessenheit des Modells, der Methoden, der Annahmen und der Datengrundlage in der Berechnung der versicherungstechnischen Rückstellung zu bewerten. Der Konflikt könnte aufgehoben werden durch die Integration eines unabhängigen Komitees in die Berichtsprozesse. Dessen Aufgabe wäre der unabhängige Bericht zu Modellfragen, Methoden und Annahmen.

Lösung 4 Analyse der Zinssensitivität von Lebensversicherungen

- a) Definieren Sie jeweils kurz
- die absolute Duration $D_A(L)$ (auch Dollar- oder Euro- Duration genannt),
 - die modifizierte Duration $D_{\text{mod}}(L)$ und
 - die Macauly-Duration $D_{\text{Mac}}(L)$
- am Beispiel des Leistungs - Cash Flows L .

Lösung

Die absolute Duration des Leistungs – Cash Flows ist definiert als negative Ableitung des Leistungsbarwertes nach dem Zins (analytischer Zugang zur Duration):

$$D_A(L) = -\frac{\partial}{\partial i} P(i, L) = \frac{1}{1+i} \sum_{t=0}^{\omega} t \cdot L_t \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^t = v \cdot \sum_{t=1}^{\omega} t \cdot L_t \cdot v^t$$

Die modifizierte Duration ist die durch den Leistungsbarwert dividierte absolute Duration des Leistungs-Cash Flows:

$$D_{\text{mod}}(L) = \frac{D_A(L)}{P(L)} = \frac{-1}{P(L)} \cdot \frac{\partial}{\partial i} P(i, L) = v \cdot \frac{\sum_{t=1}^{\omega} t \cdot L_t \cdot v^t}{\sum_{t=0}^{\omega} L_t \cdot v^t}$$

Die Macauly Duration entspricht dem Verhältnis der Summe der mit dem Zeitpunkt ihrer Fälligkeit gewichteten diskontierten Leistungen zum Leistungsbarwert:

$$D_{\text{Mac}}(L) = \frac{\sum_{t=1}^{\omega} t \cdot L_t \cdot v^t}{\sum_{t=0}^{\omega} L_t \cdot v^t}$$

Ergänzend lässt sich dies interpretieren als ein mit dem jeweiligen Anteil der diskontierten Jahresleistung am gesamten Leistungsbarwert konvex gewichtetes Mittel der Leistungszeitpunkte:

$$D_{\text{Mac}}(L) = \sum_{t=0}^{\omega} t \cdot \frac{L_t \cdot v^t}{P(L)} = \sum_{t=0}^{\omega} \text{coeff}_t \cdot t \quad \text{mit} \quad 0 \leq \text{coeff}_t = \frac{L_t \cdot v^t}{P(L)} \quad \text{und} \quad \sum_{t=0}^{\omega} \text{coeff}_t = 1$$

In dieser Analogie beschreibt $D_{\text{Mac}}(L)$ den Schwerpunkt der Leistungszahlungen: Die Hebelwirkung des Gesamtbarwertes $D_{\text{Mac}}(L) \cdot P(L)$ entspricht der aggregierten Hebelwirkung der einzelnen diskontierten Leistungszahlungen $\sum_{t=1}^{\omega} t \cdot L_t \cdot v^t$ (geometrischer Zugang zur Duration).

- b) Um diese Durationsbegriffe auch zahlenmäßig zu untersuchen, haben Sie sie in einer Tabellenkalkulation hinterlegt. Um diese Berechnungen zu testen, leiten Sie für einige Standardbarwerte deren Durationsen in einer Darstellung mittels klassischer Kommutationswerte her. Zeigen Sie für die lebenslange Todesfallversicherung:

$$D_A(A_x) = v \cdot \frac{R_x}{D_x}, \quad D_{\text{mod}}(A_x) = v \cdot \frac{R_x}{M_x}, \quad D_{\text{Mac}}(A_x) = \frac{R_x}{M_x}.$$

Lösung

Am einfachsten ist die Lösung, wenn man direkt einsetzt in die definierende Gleichung: Hierzu setze man $L_k = {}_{k-1}p_x \cdot q_{x+k-1}$ in die Definition der absoluten Duration ein; es ergibt sich

$$D_A(A_x) = v \cdot \sum_{k=1}^{\omega-x+1} k \cdot L_k \cdot v^k = v \cdot \sum_{k=1}^{\omega-x+1} k \cdot {}_{k-1}p_x \cdot q_{x+k-1} \cdot v^k = v \cdot \frac{R_x}{D_x}.$$

Durch Ableiten nach dem Zins i erhält man alternativ durch direkte Rechnung

$$\begin{aligned} D_A(A_x) &= -\frac{\partial}{\partial i} A_x(i) = -\sum_{k=1}^{\omega-x+1} {}_{k-1}p_x \cdot q_{x+k-1} \cdot \frac{\partial}{\partial i} v^k = -\sum_{k=1}^{\omega-x+1} {}_{k-1}p_x \cdot q_{x+k-1} \cdot k \cdot v^{k-1} \cdot (-v^2) \\ &= v \cdot \sum_{k=1}^{\omega-x+1} k \cdot {}_{k-1}p_x \cdot q_{x+k-1} \cdot v^k = v \cdot (IA)_x = v \cdot \frac{R_x}{D_x} \end{aligned}$$

wobei man die Beziehung $\frac{\partial}{\partial i} v = -v^2$ aus dem Seminar erinnert oder vorher durch Ableiten von $v(i) = \frac{1}{1+i}$ erneut herleitet. Per definitionem folgt hieraus dann für die modifizierte Duration

$$D_{\text{mod}}(A_x) = \frac{D_A(A_x)}{A_x} = \frac{v \cdot \frac{R_x}{D_x}}{\frac{M_x}{D_x}} = v \cdot \frac{R_x}{M_x}.$$

Aus der Beziehung $D_{\text{mod}}(A_x) = v \cdot D_{\text{mod}}(A_x)$ folgt dann abschließend

$$D_{\text{Mac}}(A_x) = \frac{R_x}{M_x}$$

- c) Sie beginnen danach mit der Analyse der Abhängigkeit von Beitrag und Leistung vom Rechnungszins. Mit $NB = NB(i)$ seien der anfängliche (ungezillmerte) Nettobeitrag für 1 €anfängliche Versicherungsleistung und mit $VL = VL(i)$ die anfängliche Versicherungsleistung gegen 1 €anfänglichen Nettobeitrag bezeichnet. Dann ist $NB = \frac{P(L)}{P(B)}$ und

$VL = \frac{P(B)}{P(L)}$. Leiten Sie die folgenden Formeln für die Ableitung nach dem Zins her:

$$NB' = -NB \cdot (D_{\text{mod}}(L) - D_{\text{mod}}(B))$$

$$VL' = VL \cdot (D_{\text{mod}}(L) - D_{\text{mod}}(B))$$

Geben Sie jeweils eine Formel für die näherungsweise Änderung von anfänglichem Nettobeitrag und anfänglicher Versicherungsleistung mit dem Rechnungszins an.

Lösung

Aus $NB = \frac{P(L)}{P(B)}$ folgt durch Ableiten mit der Quotientenregel

$$NB' = \frac{P(L)'P(B) - P(L)P(B)'}{P(B)^2} = \frac{P(L)'}{P(B)} - \frac{P(L)}{P(B)} \cdot \frac{P(B)'}{P(B)} = -\frac{P(L)}{P(B)} \cdot \left(-\frac{P(L)'}{P(L)} - \left(-\frac{P(B)'}{P(B)} \right) \right)$$

und hieraus bereits die gesuchte Formel

$$NB' = -NB \cdot (D_{\text{mod}}(L) - D_{\text{mod}}(B)).$$

Auf dieselbe Art kann man offenbar auch für $VL = \frac{1}{NB}$ vorgehen:

$$VL' = \frac{P(B)'P(L) - P(B)P(L)'}{P(L)^2} = \frac{P(B)'}{P(L)} - \frac{P(B)}{P(L)} \cdot \frac{P(L)'}{P(L)} = \frac{P(B)}{P(L)} \cdot \left(\frac{P(B)'}{P(B)} - \frac{P(L)'}{P(L)} \right),$$

woraus auch hier bereits die gesuchte Formel folgt:

$$VL' = VL \cdot (D_{\text{mod}}(L) - D_{\text{mod}}(B))$$

Alternativ kann man zuerst die logarithmische Ableitung berechnen zu

$$\begin{aligned} \frac{VL'}{VL} &= (\ln VL)' = \left(\ln \frac{P(B)}{P(L)} \right)' = (\ln P(B) - \ln P(L))' = (\ln P(B))' - (\ln P(L))' \\ &= \frac{P(B)'}{P(B)} - \frac{P(L)'}{P(L)} = D_{\text{mod}}(L) - D_{\text{mod}}(B) \end{aligned}$$

und daraus dann durch Umformung die Beziehung $VL' = VL \cdot (D_{\text{mod}}(L) - D_{\text{mod}}(B))$ herleiten. Ein analoges Vorgehen funktioniert offenbar auch für NB .

Hieraus ergeben sich die gesuchten Näherungsformeln für den Übergang von i_0 nach i_1 :

$$NB(i_1) - NB(i_0) \approx NB'(i_0) \cdot (i_1 - i_0) = -(D_{\text{mod}}(L) - D_{\text{mod}}(B)) \cdot (i_1 - i_0) \cdot NB(i_0)$$

sowie

$$VL(i_1) - VL(i_0) \approx VL'(i_0) \cdot (i_1 - i_0) = (D_{\text{mod}}(L) - D_{\text{mod}}(B)) \cdot (i_1 - i_0) \cdot VL(i_0)$$

- d) Begründen Sie mit dem geometrischen Zugang zum Durationsbegriff, dass im Regelfall $D_{\text{Mac}}(B) \leq D_{\text{Mac}}(L)$ gilt.

Hinweis: Erläutern Sie hierzu anschaulich, warum $D_{\text{Mac}}(L) < D_{\text{Mac}}(B)$ zu einem ökonomisch unerwünschten (warum?) Versicherungsvertrag führen würde, der gerade deshalb im Neugeschäft nicht angeboten wird. Folgern Sie hieraus $D_{\text{mod}}(L) - D_{\text{mod}}(B) \geq 0$.

Lösung

Wäre $D_{\text{Mac}}(L) < D_{\text{Mac}}(B)$, so ergäbe sich aus dem geometrischen Zugang zur Macauly Duration, dass der Schwerpunkt $D_{\text{Mac}}(L)$ der Leistungszahlungen zeitlich vor dem Schwerpunkt der Beitragszahlungen $D_{\text{Mac}}(B)$ läge. Dies wäre ökonomisch ähnlich zu werten wie eine Zahlung des Barwertes der Leistungen vor Erhalt des Barwertes der Beiträge, wäre mithin ökonomisch also eher ein Darlehen als ein Ansparvorgang. Solche Verträge sind wegen des gesetzlichen Kündigungsrechts der Versicherungsnehmer ökonomisch unerwünscht aus Sicht des Lebensversicherers. Daher stellen die Vorgaben der Produktent-

wicklung sicher, dass sie im Neugeschäft nicht angeboten werden. Folglich kann man von $D_{Mac}(B) \leq D_{Mac}(L)$ ausgehen. Für die modifizierten Durationen folgt dann $D_{mod}(L) - D_{mod}(B) = v \cdot D_{Mac}(L) - v \cdot D_{Mac}(B) = v \cdot (D_{Mac}(L) - D_{Mac}(B)) \geq 0$.

Alternativ kann man zunächst die Ungleichung über die modifizierten Durationen beweisen, indem man argumentiert, dass die Produktgestaltung planmäßig dafür sorgt, dass der Nettobeitrag bei gleicher Versicherungsleistung mit dem Rechnungszins sinkt und die Versicherungsleistung bei gleichem Nettobeitrag mit dem Rechnungszins steigt, mithin $NB^l \leq 0$ und $VL^l \geq 0$ gelten müssen, woraus mit c) die Ungleichungen folgen. Implizit hat man zusammen mit Teil c) bewiesen:

Die Versicherungsleistung steigt bzw. fällt mit steigendem bzw. fallendem Rechnungszins

$$\Leftrightarrow VL^l \geq 0$$

$$\Leftrightarrow D_{Mac}(B) \leq D_{Mac}(L)$$

⇔ Der Schwerpunkt der Beitrags-Cash Flows liegt vor dem Schwerpunkt der Leistungs-Cash Flows

$$\Leftrightarrow NB^l \leq 0$$

⇔ Der Nettobeitrag fällt bzw. steigt mit steigendem bzw. fallendem Rechnungszins

- e) Geben Sie nachfolgend jeweils kurz an, bei welchem Vertrag sich Beitrag und Leistung bei ansonsten gleichen Verhältnissen stärker mit dem Rechnungszins ändern, und begründen Sie dies kurz mit Hilfe der Formeln aus Teil c):

- Einmalbeitrag vs. lfd. Beitrag mit vs. lfd. Beitrag ohne abgekürzter Zahldauer.
- aufgeschobene Leibrente vs. sofort beginnende Leibrente
- aufgeschobene Leibrente vs. Erlebensfallversicherung mit Kapitalabfindung

Lösung

Wie stark sich Beitrag und Leistung bei ansonsten gleichen Verhältnissen mit dem Rechnungszins ändern, hängt wegen Teil c) von der Differenz der Durationen von Leistungs- und Beitrags- Cash Flows ab. Wegen Teil d) gibt es dabei keinen Vorzeichenwechsel, d.h. die Beitragsduration bleibt stets begrenzt durch die Leistungsduration. Das heißt, dass bei unverändertem Beitrag die Zinsabhängigkeit der Leistung umso stärker wächst, je mehr sich ihr Schwerpunkt nach hinten verschiebt, und umgekehrt.

Ebenso folgt, dass bei unveränderter Leistung die Zinsabhängigkeit des Beitrags umso stärker zunimmt, je mehr sein Zahlungsschwerpunkt nach vorne rückt, und umgekehrt.

- Bei gleicher Leistung wird offenbar der Schwerpunkt der Beitragszahlungen nach vorne gezogen, wenn gegenüber einer mit der Versicherungsdauer übereinstimmenden Zahldauer diese zunächst verkürzt und dann nur einmalig erfolgt. Offenbar hat deshalb der Einmalbeitragsvertrag eine größere Zinsabhängigkeit als ein Vertrag mit abgekürzter Zahlung, und letzterer wiederum eine größere Zinsabhängigkeit als ein Vertrag mit laufender Zahlung über die volle Versicherungsdauer.

- Die Leistungsduration einer aufgeschobenen Leibrente ist offenbar länger als diejenige einer sofortbeginnenden Leibrente. Wie erläutert ist deshalb bei gleicher Beitragsduration auch ihre Zinsabhängigkeit größer.

- Ebenso ist die Leistungsduration einer aufgeschobenen Leibrente offenbar länger als diejenige einer Erlebensfallversicherung mit Kapitalabfindung statt Rentenzahlung; deshalb ist bei gleicher Beitragsduration auch ihre Zinsabhängigkeit größer.

- f) Sie analysieren jetzt die Abhängigkeit des Deckungskapitals $V = P(L) - P(B)$ einer Versicherung gegen laufenden Beitrag vom Rechnungszins, wobei die biometrischen Rechnungsgrundlagen für Beitrag, Leistung und Deckungskapital übereinstimmen. Leiten Sie für die Ableitung $V' = \frac{\partial V}{\partial i}$ die folgende Formel her:

$$V' = -(V \cdot D_{\text{mod}}(L) + P(B) \cdot (D_{\text{mod}}(L) - D_{\text{mod}}(B)))$$

Lösung

Durch Ableiten von Leistungs- und Beitragsbarwert, Anwendung der Definition der modifizierten Duration aus Teil a) und elementare Äquivalenzumformungen erhält man die gewünschte Formel:

$$\begin{aligned} V' &= P(L)' - P(B)' \\ &= -P(L) \cdot D_{\text{mod}}(L) + P(B) \cdot D_{\text{mod}}(B) \\ &= -V \cdot D_{\text{mod}}(L) - P(B) \cdot D_{\text{mod}}(L) + P(B) \cdot D_{\text{mod}}(B) \\ &= -(V \cdot D_{\text{mod}}(L) + P(B) \cdot (D_{\text{mod}}(L) - D_{\text{mod}}(B))) \end{aligned}$$

- g) Wächst oder fällt die Zinsabhängigkeit des Deckungskapitals, wenn der Versicherungsnehmer einen Vertrag gegen laufenden Beitrag zukünftig beitragsfrei stellt?

Für welchen Vertrag ist bei ansonsten gleichen Verhältnissen mehr Zinszusatzreserve (ZZR) zu stellen, einen Vertrag gegen Einmalbeitrag oder einen Vertrag gegen laufenden Beitrag?

Hinweis: Verwenden Sie Teil f). Bei der zweiten Frage dürfen Sie ohne weitere Begründung unterstellen, dass das Deckungskapital der handelsrechtlichen Deckungsrückstellung entspricht, also keine nachträglichen Maximierungen o.ä. vorgenommen werden, und dass die Begrenzung der ZZR auf die ersten 15 Jahre nichts ändert gegenüber einer Betrachtung der vollen Vertragslaufzeit.

Lösung

Die Zinsabhängigkeit des Deckungskapitals lässt sich an der Größe des Betrags ihrer Ableitung erkennen. Nach Teil f) entspricht diese der Summe aus zwei positiven Summanden,

- dem ersten Summand $V \cdot D_{\text{mod}}(L)$, der mit der Leistungsduration wächst und fällt, und
- dem zweiten Summanden $P(B) \cdot (D_{\text{mod}}(L) - D_{\text{mod}}(B))$, der mit der (positiven!) Differenz Leistungs-Duration minus Beitrags-Duration wächst bzw. fällt.

Aus der prospektiven Definition des Deckungskapitals folgt, dass hier der Cash Flow der zukünftigen (!) Beiträge gemeint ist. Nach Beitragsfreistellung oder Zahlung des Einmalbeitrags gibt es aber keine zukünftigen Beiträge (mehr). In diesen beiden Fällen ist also der Betrag der Ableitung geringer, da der zweite positive Summand entfällt. Damit wird die Zinsabhängigkeit des Deckungskapitals geringer: Das Deckungskapital beitragsfreier

Versicherungen, insbesondere dasjenige von Einmalbeitragsversicherungen, weist eine weniger stark ausgeprägte Zinsabhängigkeit auf als dasjenige von Versicherungen gegen laufenden Beitrag.

Ebenso ergibt sich offenbar, dass das Deckungskapital bei abgekürzter Zahldauer eine weniger ausgeprägte Zinsabhängigkeit aufweist als bei Beitragszahlung über die volle Versicherungsdauer. Insgesamt liegen die Verhältnisse in Bezug auf das Deckungskapital also genau anders herum als in Bezug auf Versicherungsleistung oder Nettobeitrag.

Gemäß Hinweis können wir unterstellen, dass die ZZR i.w. der Veränderung des Deckungskapitals beim Übergang vom Rechnungszins auf den Referenzzins entspricht. Mehr ZZR ist also für diejenigen Vertragstypen zu bilden, deren Deckungskapital eine stärkere Zinsabhängigkeit aufweist. Das bedeutet, dass für Einmalbeitragsverträge weniger ZZR zu bilden ist als für Verträge gegen laufenden Beitrag (und dass für letztere weniger ZZR zu bilden ist, wenn die Zahldauer abgekürzt ist).