DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen)

Klausur vom 08.11.2008

für die Teilnehmer des Spezialwissenseminars 2008

Die Klausur besteht aus 4 Aufgaben, die mit insgesamt 180 Punkten bewertet werden. Um diese maximale Punktzahl erreichen zu können, müssen alle Aufgaben bearbeitet werden. Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 72 Punkte erforderlich.

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und vergessen Sie nicht, Ihren Namen auf jedes Blatt zu schreiben.

Zugelassenes Hilfsmittel: Taschenrechner

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (45 Punkte)

a) Aus einer gegebenen Aggregatsterbetafel 2. Ordnung sollen eine Nichtraucher- und eine Rauchersterbetafel 2. Ordnung abgeleitet werden. Welche Größen müssen dazu festgelegt oder hergeleitet werden (kurze Erläuterung)?

b) In einem Altersbereich gelte für die Aggregatsterblichkeit 2. Ordnung gleichaltriger Männer und Frauen stets $q_y = 0{,}60 \cdot q_x$. Gilt dann auch zwangsläufig, dass $q_y^{NR} = 0{,}6 \cdot q_x^{NR}$? (kurze Begründung)

c) Gegeben seien folgende Daten:

x	$q_x^{2.Ordn.}$ (2.Ordnung)	ANT_x^R	$ÜSt_x \left(= \frac{q_x^R}{q_x^{NR}}\right)$
30	0,561 ‰	31,1 %	173,80 %
31	0,573 ‰	31,0 %	177,44 %
32	0,590 ‰	30,9 %	181,08 %

(Bezeichnungen: $ANT_x^R :=$ Raucheranteil des Alters x, $ÜSt_x$ = Raucherübersterblichkeit des Alters x)

Berechnen sie aus diesen Angaben die Nettojahresprämie 1. Ordnung für die Risikoversicherung eines Nichtrauchers mit Eintrittalter 30, Versicherungs- und Beitragszahlungsdauer 3 Jahre und Versicherungssumme 100.000 €. Dabei ergeben sich die Sterblichkeiten 1. Ordnung durch einen multiplikativen Zuschlag auf die jeweiligen Sterblichkeiten 2. Ordnung in Höhe von 34% (Aggregattafel), 40 % (Nichtrauchertafel) und 45 % (Rauchertafel). Der Rechnungszins sei mit i = 2,25 % festgelegt.

d) Welche Auswirkungen auf q_x^{NR} und q_x^R wären zu erwarten, wenn der Raucheranteil 2. Ordnung bei gegebener Raucherübersterblichkeit zu hoch angesetzt würde?

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Herr L ist leitender Angestellter, er ist verheiratet und hat drei schulpflichtige Kinder. Seine Ehefrau ist nicht berufstätig. Sein Bruttoeinkommen lag in 2007 bei 75.000 € und wird in 2008 voraussichtlich 77.000 € betragen. Im Jahr 2004 hat er einen Riester-Vertrag abgeschlossen, seine Frau hat keinen eigenen Riester-Vertrag.

a) Wie hoch ist sein Mindesteigenbeitrag in 2008?

b) Welchen maximalen Zulagenanspruch hat er in 2008?

c) Führen Sie den Günstigervergleich für 2008 gemäß § 10a EStG durch unter der Voraussetzung, dass Herr L genau den Mindesteigenbeitrag zahlt und dass das zu versteuernde Einkommen 2008 des Ehepaares nach dem Ansatz der Kinderfreibeträge gemäß § 32 Abs. 6 EStG ohne die Altersvorsorgebeiträge bei 68.000 € liegt. Ändert sich das Ergebnis, wenn auch der Solidaritätszuschlag in den Vergleich einbezogen wird?

Aufgabe 3 (60 Punkte)

Die Gesellschaft XYZ bietet als private Rentenversicherung eine Indexpolice gegen Einmalbeitrag an mit einer Aufschubfrist von zwei Jahren. Investiert wird in ein so genanntes Index-Zertifikat, das bei Rentenbeginn das folgende Kapital zur Verrentung bereitstellt:

Mindestens sind 102 Prozent des eingezahlten Geldes verfügbar; steigt der zugrunde liegende Index DAX, so wird abhängig vom Kursverlauf des Index ein zusätzlicher Betrag zur Verrentung hinzugefügt. Genauer gilt folgendes:

Bezeichnen x(1) (bzw. x(2)) den Stand des Indexes nach Ablauf eines Jahres (bzw. zwei Jahren) und x(0) den Stand des Indexes bei Abschluss des Vertrages, und ist

$$G := \quad 0.2\cdot\left(\left(\frac{x(1)}{x(0)}-1\right)^{+}\cdot 1.04+\left(\frac{x(2)}{x(0)}-1\right)^{+}\right)+0.02 \quad ,$$

so ist zu Rentenbeginn das folgende Kapital bereitzustellen:

$E+G\cdot E$, wenn E den gezahlten Einmalbeitrag bezeichnet.

Das Versicherungsunternehmen hat folgende Anlagemöglichkeiten zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses: Erzielbarer Jahreszins jeweils für die beiden Folgejahre: 4 % , d.h. man nimmt an, dass auch nach einem Jahr noch ein einjähriger risikoloser Zins von 4 % erzielbar ist. Der Stand des DAX beträgt zu Beginn 4000 Punkte, und ein europäischer Call mit einjähriger Laufzeit auf den DAX zum Ausübungspreis 4000 kostet € 160, ein Call mit zweijähriger Laufzeit und demselben Ausübungspreis kostet € 340. Der Preis einer entsprechenden Europäischen Put-Option mit Ausübungspreis 4000 und zweijähriger Laufzeit beträgt € 410.

a) Wie kann man für eine Police mit Einmalbeitrag E = 20.000 € eine kongruente Deckung des Gewinnversprechens darstellen?

b) Welcher Teilbetrag der Brutto-Prämie E = 20.000 bleibt dem Aktuar zur Deckung einer Todesfallleistung in der Aufschubfrist und von Verwaltungskosten, wenn die kongruente Deckung des Gewinnversprechens mit den erwähnten Call-Optionen in der Vermögensanlage vorgenommen wird?

c) Auf dem Kapitalmarkt wird zusätzlich ein Indexpapier mit zweijähriger Laufzeit angeboten, das exakt den Wert des DAX – Indexes in zwei Jahren widerspiegelt, d.h. das in zwei Jahren exakt den Geldwert x(2) hat. Da von den Emittenten noch die Dividenden für zwei Jahre der einzelnen im Index vertretenen Aktien vereinnahmt werden, kostet ein Stück dieses Papiers zum Versicherungsbeginn nicht € 4000, sondern € 3610. Mit welcher gegenüber (a) alternativen Anlagestrategie hätte das Versicherungsunternehmen die kongruente Deckung des Gewinnversprechens unter Zuhilfenahme dieses Papiers auch darstellen können? Welche Variante ist für das Versicherungsunternehmen günstiger?

(Hinweis: Es wird vereinfachend angenommen, dass Transaktionskosten nicht anfallen und steuerliche Aspekte, z.B. die Kapitalertragsteuer, unberücksichtigt bleiben!)

Aufgabe 4 (60 Punkte)

Mit den üblichen Bezeichnungen sei

ω	Schlussalter der Sterbetafel
i	der Rechnungszins
${}_k p_x$	Wahrscheinlichkeit eines x-Jährigen, noch mindestens k Jahre zu leben
${}_{k\|} q_x$	Wahrscheinlichkeit eines x-Jährigen, noch k Jahre zu leben und im Jahr darauf zu sterben (d.h. noch genau k Jahre zu leben)
a_x	der rechnungsmäßige Barwert der lebenslänglich jährlich nachschüssig zahlbaren <u>Leib</u>rente vom konstanten Betrag 1
$\ddot{a}_x$	der rechnungsmäßige Barwert der lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbaren <u>Leib</u>rente vom konstanten Betrag 1
${}_{s\|}\ddot{a}_{\|t}$	der finanzmathematische (d.h. ohne Biometrie ermittelte) Barwert der um s Jahre aufgeschobenen jährlich vorschüssig zahlbaren <u>Zeit</u>rente der Dauer t mit konstantem Betrag 1
${}_{s\|}\Omega^{\rho}_{\|t}$	der Preis (für den Nominalwert 1) einer Receiver Forward Swaption mit Strike $\rho > 0$, die in s Jahren fällig ist und t Jahre lang auszahlt.

a) Beweisen Sie die beiden folgenden Darstellungen:

(1) $$a_x = \sum_{k=1}^{\omega} {}_k p_x \cdot {}_{k|}\ddot{a}_{|1}$$

(2) $$a_x = \sum_{k=1}^{\omega} {}_{k|} q_x \cdot {}_{1|}\ddot{a}_{|k}$$

b) Geben Sie eine kurze anschauliche Interpretation der beiden Darstellungen und machen Sie den Unterschied deutlich (Jeweils 1-2 Sätze genügen völlig). Sie können eine Grafik verwenden.

Für eine grobe rechnungsmäßige Analyse des Wiederanlagerisikos einer sofort beginnenden Leibrente vom konstanten Betrag 1 mit garantiertem Rechnungszins i betrachten Sie zur Illustration zwei konträre Anlagestrategien c) und d):

c) Die Nettoeinmalprämie $\ddot{a}_x$ (ohne Kosten der Rentenzahlung) wird so angelegt, dass die Leibrentenverpflichtung bei rechnungsmäßigem Verlauf über die gesamte Dauer kongruent bedeckt ist und ein Wiederanlagerisiko unter dieser Prämisse theoretisch nicht entsteht.

   c1) Geben Sie die Nominalvolumina an, die hierzu in Kuponbonds der Laufzeiten $k = 1, 2, 3, \ldots, \omega - x$ anzulegen sind.

   c2) In welchem Umfang (qualitative Beschreibung) besteht realiter dennoch ein Wiederanlagerisiko bei diesem Vorgehen?

d) Alternativ soll die gleiche Nettoeinmalprämie $\ddot{a}_x$ zunächst nur für ein Jahr angelegt und der rechnungsmäßige Wiederanlagebetrag in den Folgejahren auch für nur jeweils ein weiteres Jahr wiederangelegt werden.

d1) Geben Sie die Nominalvolumina an, die nach k = 1, 2, 3, …, ω - x Jahren jeweils einjährig wieder anzulegen sind.

d2) Geben Sie eine Formel für den Preis $\pi(i)$ des hierdurch entstehenden Wiederanlagerisikos auf Basis der o.a. Optionsprämien ${}_{s|}\Omega^{\rho}_{|t}$ an.

d3) Ersetzen Sie in der Formel für den Preis $\pi(i)$ die verwendeten Optionsprämien durch einen konstanten mittleren Wert $\mathbf{\Omega}$. Geben Sie auf Basis dieser Annahme eine einfachere Formel für den Preis $\pi(i)$ an.

d4) Schätzen Sie grob unter der Annahme $\mathbf{\Omega}$ = 7 bp (0,07 %) einen Zahlenwert für $\pi(i)$ bei einem Rentenbeginnalter von 65 Jahren.

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

Zu a)

Zunächst sollte die Raucher- bzw. Nichtraucher-Definition festgelegt sein. Darauf aufbauend setze man:

$q_x^R :=$ Rauchersterblichkeit 2. Ordnung im Alter x
$q_x^{NR} :=$ Nichtrauchersterblichkeit 2. Ordnung im Alter x
$q_x :=$ Aggregatsterblichkeit 2. Ordnung im Alter x
$ANT_x^{NR} :=$ Anteil der Nichtraucher des Alters x im Portfolio
$ANT_x^R :=$ Anteil der Raucher des Alters x im Portfolio

Damit erhält man die Ausgangsgleichung :

$$q_x = ANT_x^R \cdot q_x^R + ANT_{NR} \cdot q_x^{NR} \qquad (1)$$

Definiert man weiter
$\text{ÜSt}_x = \dfrac{q_x^R}{q_x^{NR}}$ und berücksichtigt, dass $ANT_x^R + ANT_x^{NR} = 1$, so folgt aus (1)

$$q_x^{NR} = \frac{q_x}{(1\text{-}ANT_x^{NR}) \cdot \text{ÜSt}_x + ANT_x^{NR}} \qquad (2)$$

und $q_x^R = q_x^{NR} \cdot \text{ÜSt}_x$ (3)

Neben der Raucherdefinition müssen also für jedes Alter der Anteil der Nichtraucher sowie die Raucherübersterblichkeit bekannt sein.

Zu b)

Aus Gleichung (2) folgt, dass unter den gegebenen Voraussetzungen im Allgemeinen $q_y^{NR} \neq 0{,}6 \cdot q_x^{NR}$ sein wird, da der Nichtraucheranteil und die Raucherübersterblichkeit der Frauen in der Regel von denen der Männer abweichen werden.

Zu c)

Wir berechnen zunächst mit (2) und (3) die Nichtraucher- und die Rauchersterblichkeiten:

$$q_{30}^{NR} = \frac{0{,}000561}{0{,}311 \cdot 1{,}738 + 0{,}689} = 0{,}00045627$$

$$q_{30}^R = 0{,}000793$$

$q_{31}^{NR} = \dfrac{0{,}000573}{0{,}31 \cdot 1{,}7744 + 0{,}69} = 0{,}00046207$

$q_{31}^{R} = 0{,}00081990$

$q_{32}^{NR} = \dfrac{0{,}00059}{0{,}309 \cdot 1{,}8108 + 0{,}691} = 0{,}00047179$

$q_{32}^{R} = 0{,}00085433$

Daraus ergeben sich die Sterblichkeiten 1. Ordnung aus

q_x^{NR} (1.Ordnung) = $1{,}40 \cdot q_x^{NR}$ und

q_x^{R} (1.Ordnung) = $1{,}45 \cdot q_x^{R}$, also

x	Nichtraucher q_x^{NR} (1.Ordnung)	Raucher q_x^{R} (1.Ordnung)
30	0,0006387	0,0011498
31	0,0006468	0,0011888
32	0,00066052	0,0012387

Nettoleistungsbarwert für Nichtraucher:

$_{|3}A_{30}^{NR} = S \cdot (v \cdot q_{30}^{NR} + v^2 \cdot p_{30}^{NR} \cdot q_{31}^{NR} + v^3 \cdot p_{30}^{NR} \cdot p_{31}^{NR} \cdot q_{32}^{NR})$

$= 185{,}99538$

$\ddot{a}_{30:\overline{3}|}^{NR} = 1 + v \cdot p_{30}^{NR} + v^2 \, {}_2p_{30}^{NR}$

$= 2{,}932616$

$_{|3}P_{30}^{NR} = 63{,}42$

zu d)

ANT_x^{R} zu hoch $\Rightarrow$ ANT_x^{NR} zu niedrig

$\Rightarrow$ Nenner in (2) $= ÜSt_x + ANT_x^{NR}(1 - ÜSt_x) = ÜSt_x - ANT_x^{NR}(ÜSt_x - 1)$ zu groß

$\Rightarrow q_x^{NR}$ zu niedrig; daher auch wegen (3) q_x^{R} zu niedrig.

Aufgabe 2

Zu a)

Erforderlicher Mindesteigenbeitrag für Herrn L im Jahr 2008:

4%·75.000 €	=	3.000 €
Maximal		2.100 €
abzüglich Grundzulage	./.	154 €
abzüglich 3 Kinderzulagen (3·185 €)	./.	555 €
Mindesteigenbeitrag		1.391 €

Der Sockelbetrag von 60 € ist trivialer Weise überschritten.

Zu b)

Aus a) ergibt sich, dass der maximale Zulagenanspruch in 2008 bei 154 € + 555 € = 709 € liegt.

Zu c)

Günstigerprüfung: Zahlt Herr L genau den Mindesteigenbeitrag von 1.391 €, so sind für den Sonderausgabenabzug gemäß § 10a EStG folgende Altersvorsorgeaufwendungen zu berücksichtigen:

1.391 € + 709 € = 2.100 €

Damit ergibt sich anhand der beigefügten Splittingtabelle die folgende Gegenüberstellung:

Zu versteuerndes Einkommen	Steuerschuld
68.000 €	14.247 €
65.900 €	13.548 €
Steuerersparnis	699 €

Ergebnis: Die Zulagenförderung ist in diesem Fall geringfügig günstiger. Der Solidaritätszuschlag ist gemäß dem BMF-Schreiben vom 05.02.2008 nicht in die Betrachtung einzubeziehen.

Da dieses BMF-Schreiben den Teilnehmern aber nicht vorlag, wurde auch folgende Regelung als richtig anerkannt: Bei Einbeziehung des Solidaritätszuschlag erhöht sich die Steuerersparnis auf 699·1,055 € = 737,45 €, so dass unter diesen Voraussetzungen letztlich ein Differenzbetrag von 28,45 € an Herrn L erstattet würde.

Aufgabe 3

Zu (a)

Das Leistungsversprechen der Index-bezogenen Versicherung bei Rentenbeginn kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$E + G \cdot E \ = 20\,000 \ \cdot 1.02 \ + \ (0.2 \cdot ((\frac{x(1)}{x(0)} - 1)^+ \cdot 1.04 + (\frac{x(2)}{x(0)} - 1)^+)) \cdot 20\,000$$

$$= 20\,400 + \ 0.2 \cdot 20\,000 \cdot \frac{1}{x(0)}((x(1) - x(0))^+ \cdot 1.04 + (x(2) - x(0))^+)$$

$$= 20\,400 + \ ((x(1) - 4000)^+ \cdot 1.04 + (x(2) - 4000)^+) \ .$$

Das gegebene Leistungsversprechen lässt sich also dann einhalten, wenn man den Betrag von $\frac{20\,400}{(1.04)^2} \approx 18860.95$ zu 4 % für zwei Jahre anlegt und gleichzeitig je eine Call-Option auf den DAX zum Ausübungspreis von x(0) = 4000 mit ein- bzw. zweijähriger Laufzeit kauft. Das kostet 160 + 340 = 500 €, so dass für die kongruente Geldanlage insgesamt € 19360.95 benötigt werden. Man beachte, dass nach einem Jahr das Ergebnis des einjährigen Calls angelegt wird zu dem vorgegebenen Zinssatz von 4 % .

Zu b)

Von dem Bruttobeitrag in Höhe von € 20 000.- verbleiben also nur € 639.05 zur Deckung einer Todesfallleistung und der Kosten.

Zu c)

Analog der Put-Call-Relation müsste folgende Preisrelation für den Preis P des zweijährigen Puts erfüllt sein:

$$P + 3610 = 340 + 4000 \cdot \frac{1}{(1.04)^2} = 340 + 3698.22 = 4038.22 ,$$

d.h. in einem Kapitalmarkt ohne Arbitragemöglichkeiten sollte der Preis P nicht 410 sondern 428.22 betragen. Man könnte also in der oben unter (a) beschriebenen kongruenten Deckung des Gewinnversprechens den Call durch eine äquivalente Position ersetzen, indem man den zweijährigen Call durch den äquivalenten Wert

$$3610 - 4000 \cdot \frac{1}{(1.04)^2} + P = 321.78$$

ersetzt. Damit hat man statt der Call-Option eine Put-Option zu kaufen, ein Indexpapier zum Preis von € 3610 und den Anlagebetrag zu dem festen Zinssatz 4 % nach dem Muster (b) in Höhe von $\frac{20\,400}{(1.04)^2} \approx 18860.95$ um den Betrag von $4000 \cdot \frac{1}{(1.04)^2} = 3698.22$ zu vermindern. Der Aufwand für die kongruente Geldanlage nach diesem Muster ist um € 18.22 kleiner als nach dem oben unter (a), (b) besprochenen Schema.

Aufgabe 4

a) Der Beweis von (1) ergibt sich unmittelbar aus den nachfolgenden Definitionen durch Einsetzen:

$$a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_k p_x \cdot v^k$$

$$_{k|}\ddot{a}_{|1} = v^k \cdot 1$$

Der Beweis von 2) ergibt sich zum Beispiel, indem man zunächst in der fraglichen Summe die Definitionen der Summanden einsetzt und vereinfacht

$$\sum_{k=1}^{\omega-x} {}_{k|}q_x \cdot {}_{1|}\ddot{a}_{|k} = \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v \cdot \sum_{j=0}^{k-1} v^j = \sum_{k=1}^{\omega-x} \sum_{j=1}^{k} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^j \quad ,$$

die Summationsreihenfolge vertauscht, umsortiert

$$= \sum_{j=1}^{\omega-x} \sum_{k=j}^{\omega-x} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^j = \sum_{j=1}^{\omega-x} v^j \cdot \sum_{k=j}^{\omega-x} {}_k p_x \cdot q_{x+k}$$

und benutzt, dass für die innere Summe gilt

$$ {}_{j}p_{x} = \sum_{k=j}^{\omega-x} {}_{k}p_{x} \cdot q_{x+k} $$

(wer j Jahre überlebt, stirbt im nächsten Jahr oder in einem der Folgejahre), was man unmittelbar an Hand der üblichen Definitionen im Kalkül der Kommutationswerte auch formal herleiten kann durch

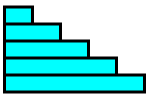
$$ \sum_{k=j}^{\omega-x} {}_{k}p_{x} \cdot q_{x+k} = \sum_{k=j}^{\omega-x} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot \frac{d_{x+k}}{l_{x+k}} = \sum_{k=j}^{\omega-x} \frac{d_{x+k}}{l_x} = \frac{1}{l_x} \cdot \sum_{k=j}^{\omega-x} (l_{x+k} - l_{x+k+1}) = \frac{l_{x+j}}{l_x} = {}_{j}p_{x} $$

b) Geben Sie eine kurze anschauliche Interpretation der beiden Darstellungen und machen Sie den Unterschied deutlich (Jeweils 1-2 Sätze genügen völlig). Sie können eine Grafik verwenden.

Die gesuchte Interpretation ergibt sich daraus, dass ${}_{k|}\ddot{a}_{|1}$ der Barwert der einmaligen Zahlung 1 in k Jahren und ${}_{1|}\ddot{a}_{|k}$ der Barwert der nachschüssigen k-fachen Zahlung von 1 ist. Dementsprechend zerlegt die Darstellung (1) die nachschüssige Leibrente in die Summe der einzelnen, mit dem Anteil ${}_{k}p_{x}$ gewichteten (Renten-) Zahlungen, und die Darstellung (2) zerlegt die nachschüssige Leibrente in die Summe von um 1 Jahr aufgeschobenen vorschüssigen Zeitrenten mit jeweils genau 1, 2, 3, … Zahlungen, deren Anteil am Barwert jeweils ${}_{k|}q_{x}$ beträgt.

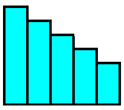
Darstellung (1) sortiert also die Rentenzahlungen nach dem jeweiligen Anfalljahr k = 1, 2, 3, … der einzelnen (Renten-) Zahlung, während Darstellung (2) die lebenslangen Rentenzahlungen nach Zeitrenten jeweils gleicher vorgegebener Rentenzahlungsdauer k = 1, 2, 3, … zusammenfasst.

Grafisch veranschaulichen lässt sich deshalb die Zerlegung (2) durch die Grafik



… ,

deren Scheiben mit zunehmender Breite jeweils die k Zahlungen der einzelnen Zeitrentenkomponenten veranschaulichen (Scheibenmodell), wohingegen die Zerlegung (1) durch die Säulen abnehmender Höhe der Grafik



…

die sinkende Anzahl der Empfänger der einzelnen Jahresrenten verdeutlicht (Säulenmodell).

Man kann auch bereits hier die erst nachfolgend ohnehin geforderte Analogie zu festverzinslichen Wertpapieren ziehen: Die Darstellung (1) zerlegt den Barwert der nachschüssigen Leibrente in die Barwerte von Zerobonds mit Fälligkeit des Nominals im jeweiligen Anfalljahr k = 1, 2, 3, … der einzelnen Rentenzahlung. Die Darstellung (2) zerlegt den Barwert der nachschüssigen Leibrente in die Barwerte von Kuponbonds der Dauer k = 1, 2, 3, … Jahren, deren Kupons jeweils die Renten finanzieren. Hierbei ist allerdings zu beachten, dass in der Formel-Analogie das Nominal nicht in diese

Finanzierung eingeht: Entweder geht man von Annuitätendarlehen aus, deren regelmäßige Zahlungen Tilgung und Zins beinhalten, oder man unterstellt ein Unternehmen im dynamischen Beharrungszustand, das die Rentenleistungen allein aus Zinskupons erbringt und die Nominale instantan wiederanlegt ohne sie in die Finanzierung einzubeziehen.

c) Nach Abzug der ersten Rentenzahlung 1 von der Nettoeinmalprämie $\ddot{a}_x$ der sofort beginnenden vorschüssigen Leibrente muss wegen $\ddot{a}_x = 1 + a_x$ nur noch das verbleibende Nominalvolumen von a_x am Kapitalmarkt angelegt werden. Aus den Erträgen dieser Kapitalanlage sollen die Leibrentenzahlungen finanziert werden. Auch hier ist ggf. die Behandlung der Rückzahlung der Nominale zu präzisieren, falls nicht ausschließlich in Annuitätendarlehen investiert wird: In der ALM-Sicht eines Lebensversicherers im dynamischen Beharrungszustand erscheint es in der Regel pragmatisch zulässig, nur die Kuponzahlungen zu betrachten und zur Finanzierung heranzuziehen. Die Berücksichtigung auch der Rückzahlung des Nominalwerts für die Rentenfinanzierung führt andernfalls zu rekursiven Bestimmungsgleichungen, die hier nicht gefragt waren (aber ggf. als Lösung anerkannt wurden).

c1) Die Zerlegung (2) des Scheibenmodells zeigt unter dieser Prämisse, dass hierzu jeweils ein Nominalvolumen von ${}_{k|}q_x$ in Kuponbonds der festdefinierten Laufzeit k = 1, 2, 3, … Jahre investiert werden kann, deren Zinskuponzahlungen jeweils eine Zeitrente gleicher Laufzeit bei rechnungsmäßigem Verlauf kongruent finanzieren.

c2) Eine Wiederanlage gibt es bei diesem Vorgehen und rechnungsmäßigem Verlauf nicht. Realiter ist damit das Wiederanlagerisiko insofern reduziert, als es „nur“ noch Abweichungen vom rechnungsmäßigen Verlauf betrifft. Diese entstehen durch Unterschiede in den kalkulatorischen und tatsächlichen Rechnungsgrundlagen, durch Storno, durch die Überschussbeteiligung (Beteiligung am handelsrechtlichen Überschuss und an den Bewertungsreserven) sowie im Bestandsmix z.B. auch durch Neugeschäft.

d) Die Nettoeinmalprämie $\ddot{a}_x$ wird unmittelbar zu Beginn des ersten Jahres um die erste Rentenzahlung gekürzt, sofort danach wird der verbleibende Betrag von a_x für ein Jahr angelegt. Im hier unterstellten Modell werden nach einem Jahr Zinsen, Nominal und (negative) Risikoprämien vereinnahmt. Für die im Bestand verbleibenden Versicherungen ist nach Ende des ersten Jahres dann der Betrag $\ddot{a}_{x+1}$ vorhanden, der zu Beginn des zweiten Jahres erneut um die (jetzt zweite) Rentenzahlung gekürzt und in der verbleibenden Höhe von a_{x+1} unmittelbar wieder angelegt wird. Wieder werden nach einem weiteren Jahr Zinsen, Nominal und (negative) Risikoprämien vereinnahmt, und für die weiter im Bestand verbleibenden Versicherungen ist nach Ende des zweiten Jahres dann der Betrag $\ddot{a}_{x+2}$ vorhanden, der zu Beginn des zweiten Jahres erneut um die (jetzt dritte) Rentenzahlung gekürzt und in der verbleibenden Höhe von a_{x+2} unmittelbar wieder angelegt wird. Auf diese Weise geht es in den Folgejahren weiter. Für die jeweils im Bestand verbleibenden Versicherungen (individuelles Modell) ergeben sich die Anlagebeträge a_x, a_{x+1}, a_{x+2}, … . Beim Übergang zur Bestandssicht des kollektiven Modells (das hier nicht gefragt war, aber ggf. als Lösung anerkannt wurde) sind ggf. zusätzlich Ausscheidewahrscheinlichkeiten anzusetzen.

d1) Diese Überlegungen zeigen, dass zum Anfang des *(k+1)*-ten Jahres (nach *k* Jahren) jeweils ein Nominalvolumen von a_{x+k} wieder in einjährige Bonds mindestens zum Rechnungszins *i* angelegt werden muss.

d2) Die Absicherung dieser zukünftigen Wiederanlage durch Receiver Forward Swaptions zum Strikesatz *i* kostet dann heute jeweils den Betrag von $a_{x+k} \cdot {}_{k|}\Omega^{i}_{|1}$,

so dass sich insgesamt ein Preis von $\pi(i) = \sum_{k=1}^{\omega} a_{x+k} \cdot {}_{k|}\Omega^{i}_{|1}$ ergibt.

d3) Mit ${}_{k|}\Omega^{i}_{|1} \equiv \Omega$ folgt $\pi(i) = \sum_{k=1}^{\omega-x} a_{x+k} \cdot \Omega = \Omega \cdot \sum_{k=1}^{\omega-x} a_{x+k}$.

d4) Die Summe $\sum_{k=1}^{\omega-x} a_{x+k}$ lässt sich (nur zur Bestimmung der Größenordnung) sehr grob abschätzen durch ihren Wert für Zins und Sterblichkeit Null, d.h. man nähert $a_{x+k} \approx \omega - (x+k)$ und erhält

$$\pi(i) \approx \Omega \cdot \sum_{k=1}^{\omega-x} (\omega - x - k) = \Omega \cdot \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k = \Omega \cdot \frac{(\omega - x - 1) \cdot (\omega - x)}{2}$$

In der hier verwendeten groben Näherung ist der Einmalbeitrag gleich $\omega - x$, d.h. der Preis in Anteilen des Einmalbeitrags beträgt ganz grob $\Omega \cdot \frac{(\omega - x - 1)}{2}$.

Für $x = 65$, $\omega = 105$, $\omega - x = 40$ je nach Tafel und $\Omega = 7bp$ (0,07 %) ist dann z.B. $\pi(i) \approx 7bp \cdot \frac{39 \cdot 40}{2} = 7 \cdot 20 \cdot 39bp = 5460bp = 54{,}6\% = 0{,}546$, und der Preis in Anteilen des Einmalbeitrags beträgt ganz grob $\Omega \cdot \frac{(\omega - x - 1)}{2} = 7bp \cdot \frac{39}{2} = 136{,}5bp = 1{,}365\%$ des Einmalbeitrags.