DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen)

Klausur vom 08.11.2008

für die Teilnehmer an einem Spezialwissenseminar vor 2008

Die Klausur besteht aus 3 Aufgaben, die mit insgesamt 180 Punkten bewertet werden. Um diese maximale Punktzahl erreichen zu können, müssen alle Aufgaben bearbeitet werden. Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 72 Punkte erforderlich.

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und vergessen Sie nicht, Ihren Namen auf jedes Blatt zu schreiben.

Zugelassenes Hilfsmittel: Taschenrechner

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (60 Punkte)

Bei der Herleitung der DAV-Sterbetafel 1994 T (vgl. Loebus, Blätter der DGVM, Oktober 1994, S. 497-524) war ein additiver Schwankungszuschlag s_x^α zu den ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten q_x der ADST 1986/88 zu ermitteln. Dabei waren u.a. folgende Modellvorausetzungen und Bezeichnungen gegeben:

M = Modellbestand = $\bigcup_x M_x$

L_x^M = Anzahl der x- jährigen in M = Anzahl der Personen aus M_x

T_x = Anzahl der im Alter x Gestorbenen aus M_x (Zufallsvariable)

$q_x^M = \frac{T_x}{L_x^M}$ = Zufallsvariable der (rohen) Sterbewahrscheinlichkeiten

Die Zahl der Todesfälle eines Alters x sei binomialverteilt mit $B(L_x^M, q_x)$, und es sei sichergestellt, daß $T_x \geq 5$ für alle Werte von x. Alle Risiken aus M seien unabhängig.

a) Für die Schwankungszuschläge s_x^α sei die Forderung erfüllt:

(+) $$P(q_x^M \cdot L_x^M \leq (q_x + s_x^\alpha) \cdot L_x^M) \geq 1 - \alpha \quad \text{für jedes Alter x.}$$

Geben Sie unter den genannten Voraussetzungen mit Hilfe der Normalapproximation eine Bedingung zur Berechnung der Mindestgröße des Teilbestandes L_x^M in Abhängigkeit von s_x^α an.

b) Wie groß müssten L_{25}^M und L_{50}^M demnach sein, wenn folgende Werte gegeben sind:

q_{25} = 0,6 ‰ , q_{50} = 3 ‰ , $\alpha = 0{,}01$ und $s_x^\alpha = 0{,}1 \cdot q_x$?

(Hinweis: Das 99 %-Quantil der Standardnormalverteilung beträgt $u_{0,99} = 2{,}326666$.)

c) Neben dem Schwankungszuschlag wurde bei der Modifizierung der Sterbewahrscheinlichkeiten für die Sterbetafel DAV 1994 T auch ein multiplikativer Änderungszuschlag der Gestalt

$$r_x = \begin{cases} 1{,}2 & \text{für } x \leq 20 \\ 1{,}2 - 0{,}01 \cdot (x - 20) & \text{für } 21 \leq x \leq 33 \\ 1{,}07 & \text{für } x \geq 34 \end{cases}$$

berücksichtigt. Wie beurteilen Sie dies aus heutiger Sicht?

d) Die Sterbewahrscheinlichkeiten 1. Ordnung der neuen Sterbetafel DAV 2008 T enthalten - abhängig von der Unternehmenssituation - einen oder zwei Irrtumszuschläge. Nennen Sie bitte einige Argumente für den Ansatz von Irrtumszuschlägen.

Aufgabe 2 (60 Punkte)

Die Gesellschaft XYZ bietet als private Rentenversicherung eine Indexpolice gegen Einmalbeitrag an mit einer Aufschubfrist von zwei Jahren. Investiert wird in ein so genanntes Index-Zertifikat, das bei Rentenbeginn das folgende Kapital zur Verrentung bereitstellt:

Mindestens sind 102 Prozent des eingezahlten Geldes verfügbar; steigt der zugrunde liegende Index DAX, so wird abhängig vom Kursverlauf des Index ein zusätzlicher Betrag zur Verrentung hinzugefügt. Genauer gilt folgendes:

Bezeichnen x(1) (bzw. x(2)) den Stand des Indexes nach Ablauf eines Jahres (bzw. zwei Jahren) und x(0) den Stand des Indexes bei Abschluss des Vertrages, und ist

$$G := \quad 0.2 \cdot ((\frac{x(1)}{x(0)} - 1)^{+} \cdot 1.04 + (\frac{x(2)}{x(0)} - 1)^{+}) + 0.02 \quad ,$$

so ist zu Rentenbeginn das folgende Kapital bereitzustellen:

$E + G \cdot E$, wenn E den gezahlten Einmalbeitrag bezeichnet.

Das Versicherungsunternehmen hat folgende Anlagemöglichkeiten zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses: Erzielbarer Jahreszins jeweils für die beiden Folgejahre: 4 % , d.h. man nimmt an, dass auch nach einem Jahr noch ein einjähriger risikoloser Zins von 4 % erzielbar ist. Der Stand des DAX beträgt zu Beginn 4000 Punkte, und ein europäischer Call mit einjähriger Laufzeit auf den DAX zum Ausübungspreis 4000 kostet € 160, ein Call mit zweijähriger Laufzeit und demselben Ausübungspreis kostet € 340. Der Preis einer entsprechenden Europäischen Put-Option mit Ausübungspreis 4000 und zweijähriger Laufzeit beträgt € 410.

a) Wie kann man für eine Police mit Einmalbeitrag E = 20.000 € eine kongruente Deckung des Gewinnversprechens darstellen?

b) Welcher Teilbetrag der Brutto-Prämie E = 20.000 bleibt dem Aktuar zur Deckung einer Todesfallleistung in der Aufschubfrist und von Verwaltungskosten, wenn die kongruente Deckung des Gewinnversprechens mit den erwähnten Call-Optionen in der Vermögensanlage vorgenommen wird?

c) Auf dem Kapitalmarkt wird zusätzlich ein Indexpapier mit zweijähriger Laufzeit angeboten, das exakt den Wert des DAX – Indexes in zwei Jahren widerspiegelt, d.h. das in zwei Jahren exakt den Geldwert x(2) hat. Da von den Emittenten noch die Dividenden für zwei Jahre der einzelnen im Index vertretenen Aktien vereinnahmt werden, kostet ein Stück dieses Papiers zum Versicherungsbeginn nicht € 4000, sondern € 3610. Mit welcher gegenüber (a) alternativen Anlagestrategie hätte das Versicherungsunternehmen die kongruente Deckung des Gewinnversprechens unter Zuhilfenahme dieses Papiers auch darstellen können? Welche Variante ist für das Versicherungsunternehmen günstiger?

(Hinweis: Es wird vereinfachend angenommen, dass Transaktionskosten nicht anfallen und steuerliche Aspekte, z.B. die Kapitalertragsteuer, unberücksichtigt bleiben!)

Aufgabe 3 (60 Punkte)

Mit den üblichen Bezeichnungen sei

ω	Schlussalter der Sterbetafel
${}_k p_x$	Wahrscheinlichkeit eines *x*-Jährigen, noch mindestens *k* Jahre zu leben
${}_{k\|} q_x$	Wahrscheinlichkeit eines *x*-Jährigen, noch *k* Jahre zu leben und im Jahr darauf zu sterben
a_x	der rechnungsmäßige Barwert der lebenslänglich jährlich nachschüssig zahlbaren Leibrente vom konstanten Betrag 1
$\ddot{a}_x$	der rechnungsmäßige Barwert der lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbaren Leibrente vom konstanten Betrag 1
${}_{s\|}\ddot{a}_{\|t}$	der finanzmathematische (d.h. ohne Biometrie ermittelte) Barwert der um *s* Jahre aufgeschobenen jährlich vorschüssig zahlbaren Zeitrente der Dauer *t* mit konstantem Betrag 1

a) Beweisen Sie die beiden folgenden Darstellungen:

(1) $$a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_k p_x \cdot {}_{k|}\ddot{a}_{|1}$$

(2) $$a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_{k|} q_x \cdot {}_{1|}\ddot{a}_{|k}$$

b) Geben Sie eine kurze anschauliche Interpretation der beiden Darstellungen und machen Sie den Unterschied deutlich (jeweils 1-2 Sätze genügen völlig). Sie können eine Grafik verwenden.

Ihr Unternehmen möchte eine sofort beginnende vorschüssig zahlbare jährliche Leibrente ohne Todesfallleistung und ohne Rückkaufswert gegen Einmalprämie anbieten. Vertriebliches Ziel ist es, eine möglichst hohe garantierte Rente anzubieten. Die Sterbetafel und die Kosten liegen jeweils für Prämienberechnung und Reservierung bereits fest. Ihre Aufgabe als Aktuar ist es, den Rechnungszins für Prämie und Reserve (HGB-Deckungsrückstellung) festzulegen und damit das gesetzte Ziel einer möglichst hohen garantierten Rente bestmöglich zu erfüllen.

c) Welchen Rechnungszinssatz können Sie für die Reservierung über welchen Zeitraum gemäß DeckRV höchstens garantieren, wenn die letzten Monatswerte der Umlaufrenditen für Staatsanleihen beispielsweise bei $i_0(t) = 3{,}55\% + t \cdot 0{,}1\%$ für $t = 1,2,3, \ldots, 8$ liegen und für längere Restlaufzeiten konstant dem Wert für t = 8 entsprechen?
d) Aus Vorsichtsgründen möchten Sie die „ehrgeizige" Wahl des Rechnungszinses für Prämie und Reserve mit einer hierauf angepassten definierten Anlagestrategie für die Einmalprämie unterlegen: Die Kapitalanlage soll ausschließlich in Kuponbonds bester Bonität erfolgen und die Nettoeinmalprämie $\ddot{a}_x$ (ohne Kosten der Rentenzahlung) dabei so angelegt werden, dass die Leibrentenverpflichtung bei rechnungsmäßigem Verlauf über die gesamte Dauer kongruent bedeckt ist. Geben Sie die Nominalvolumina an, die hierzu bei Versicherungsbeginn in Kuponbonds der Laufzeiten *k* = 1, 2, 3, …, ω - x anzulegen sind.

e) Der Rechnungszins für die Prämienkalkulation soll (sofern möglich) höher als der Rechnungszins für die Reserve gewählt werden. Welchen Rechnungszins können Sie realistischerweise für die Prämienkalkulation wählen, wenn einerseits die Höhe der garantierten Rente optimiert werden soll und andererseits der Rechnungszins für die Prämienkalkulation aus Vorsichtsgründen kongruent aus der Kapitalanlage finanziert werden soll? Beschreiben Sie als Antwort zunächst Ihren grundsätzlichen Ansatz und geben Sie danach den / die konkreten Zahlenwerte an, die Sie in der Praxis wählen würden.

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

Zu a) Unter den gegebenen Voraussetzungen ist $T_x = q_x^M \cdot L_x^M$ für jedes x asymptotisch normalverteilt, so dass aus der aus der Gültigkeit von (+) folgt

$$P\left(T_x \le \left(q_x + s_x^\alpha\right) \cdot L_x^M\right) \ge 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow\ P\left(\frac{T_x - E(T_x)}{\sigma(T_x)} \le \frac{\left(q_x + s_x^\alpha\right) \cdot L_x^M - E(T_x)}{\sigma(T_x)}\right) \ge 1 - \alpha$$

Da $E(T_x) = q_x \cdot L_x^M, \quad \sigma(T_x) = \sqrt{q_x(1 - q_x)\, L_x^M},$

folgt nach Anwendung der Normalapproximation:

$$\frac{\left(q_x + s_x^\alpha\right) \cdot L_x^M - q_x \cdot L_x^M}{\sqrt{q_x(1 - q_x) \cdot L_x^M}} \ge u_{1-\alpha} \qquad \text{(1-}\alpha\text{ - Quantil der Standardnormalverteilung)}$$

$$\frac{s_x^\alpha}{\sqrt{q_x(1 - q_x)}} \cdot \sqrt{L_x^M} \ge u_{1-\alpha}$$

$$L_x^M \ge \left(\frac{u_{1-\alpha}}{s_x^\alpha}\right)^2 \cdot q_x\,(1 - q_x).$$

Zu b) Mit q_{25} = 0,6 ‰ = 0,0006, $s_{25}^\alpha = 0{,}1 \cdot q_{25} = 6 \cdot 10^{-5}$, α = 0,01 und $u_{0,99}$ = 2,326666 folgt:

$$L_{25}^M \ge \left(\frac{2{,}326666}{6 \cdot 10^{-5}}\right)^2 \cdot 6 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}9994 \quad = 901.688$$

und analog für x = 50 mit q_{50} = 3 ‰, $s_{50}^\alpha = 3 \cdot 10^{-4}$:

$$L_{50}^M \ge \left(\frac{2{,}326666}{3 \cdot 10^{-4}}\right)^2 \cdot 0{,}003 \cdot 0{,}997, \text{ also}$$

$$L_{50}^M \ge 179.905.$$

Man benötigt also (unter diesen Voraussetzungen) außerordentlich große Bestände.

Zu c) Seinerzeit hielt man es für denkbar, dass die Sterbewahrscheinlichkeiten auch wieder einmal ansteigen könnten (Stichworte Aids, Diphterie). Seit 1994 sind aber die q_x kontinuierlich gefallen, so dass der Ansatz eines Zuschlags für das Änderungsrisiko nicht mehr notwendig erscheint. Im Gegenteil: Der Verzicht auf einen Änderungszuschlag beinhaltet wegen des erwarteten Sterblichkeitstrends bereits eine zusätzliche Sicherheit.

Zu d) Argumente für einen Zuschlag für das Irrtumsrisiko sind beispielsweise in Stichworten:

- Unterschiede zwischen Modellbestand und Unternehmensbestand (Altersstruktur, Geschäftsmix, Unterschiede im Gesamtsterblichkeitsniveau, Parameterschätzunsicherheiten im Modellbestand)
- Modellrisiken im Herleitungsbestand (Verzicht auf Summenabhängigkeit der q_x, Art der Erfassung des Selektionseffekts)
- Denkbare strukturelle Änderungen des Neugeschäfts
- Eingeschränkte Kenntnisse des Aktuars über das relative Sterblichkeitsniveau im Unternehmensbestand.

Aufgabe 2

Zu (a)

Das Leistungsversprechen der Index-bezogenen Versicherung bei Rentenbeginn kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$E + G \cdot E \; = 20\,000 \;\cdot 1.02 \;+\; (0.2 \cdot ((\frac{x(1)}{x(0)} - 1)^{+} \cdot 1.04 + (\frac{x(2)}{x(0)} - 1)^{+})) \cdot 20\,000$$

$$= 20\,400 + \; 0.2 \cdot 20\,000 \cdot \frac{1}{x(0)}((x(1) - x(0))^{+} \cdot 1.04 + (x(2) - x(0))^{+})$$

$$= 20\,400 + \; ((x(1) - 4000)^{+} \cdot 1.04 + (x(2) - 4000)^{+}) \; .$$

Das gegebene Leistungsversprechen lässt sich also dann einhalten, wenn man den Betrag von

$\frac{20\,400}{(1.04)^2} \approx 18860.95$ zu 4 % für zwei Jahre anlegt und gleichzeitig je eine Call-Option auf den DAX zum Ausübungspreis von x(0) = 4000 mit ein- bzw. zweijähriger Laufzeit kauft. Das kostet 160 + 340 = 500 €, so dass für die kongruente Geldanlage insgesamt € 19360.95 benötigt werden. Man beachte, dass nach einem Jahr das Ergebnis des einjährigen Calls angelegt wird zu dem vorgegebenen Zinssatz von 4 % .

Zu b)

Von dem Bruttobeitrag in Höhe von € 20 000.- verbleiben also nur € 639.05 zur Deckung einer Todesfallleistung und der Kosten.

Zu c)

Analog der Put-Call-Relation müsste folgende Preisrelation für den Preis P des zweijährigen Puts erfüllt sein:

$$P + 3610 = 340 \;+\; 4000 \cdot \frac{1}{(1.04)^2} \;= 340 + 3698.22 = 4038.22\;,$$

d.h. in einem Kapitalmarkt ohne Arbitragemöglichkeiten sollte der Preis P nicht 410 sondern 428.22 betragen. Man könnte also in der oben unter (a) beschriebenen kongruenten Deckung des Gewinnversprechens den Call durch eine äquivalente Position ersetzen, indem man den zweijährigen Call durch den äquivalenten Wert

$$3610 - 4000 \cdot \frac{1}{(1.04)^2} + \mathrm{P} = 321.78$$

ersetzt. Damit hat man statt der Call-Option eine Put-Option zu kaufen, ein Indexpapier zum Preis von € 3610 und den Anlagebetrag zu dem festen Zinssatz 4 % nach dem Muster (b) in Höhe von $\frac{20\,400}{(1.04)^2} \approx 18860.95$ um den Betrag von $4000 \cdot \frac{1}{(1.04)^2} = 3698.22$ zu vermindern.
Der Aufwand für die kongruente Geldanlage nach diesem Muster ist um € 18.22 kleiner als nach dem oben unter (a), (b) besprochenen Schema.

Aufgabe 3

Zu a)

Der Beweis von (1) ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen durch Einsetzen:

$$a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_k p_x \cdot v^k$$

$$_{k|}\ddot{a}_{|1} = v^k \cdot 1$$

Der Beweis von 2) ergibt sich zum Beispiel, indem man zunächst in der fraglichen Summe die Definitionen der Summanden einsetzt und vereinfacht

$$\sum_{k=1}^{\omega-x} {}_{k|}q_x \cdot {}_{1|}\ddot{a}_{|k} = \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v \cdot \sum_{j=0}^{k-1} v^j = \sum_{k=1}^{\omega-x} \sum_{j=1}^{k} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^j \quad ,$$

die Summationsreihenfolge vertauscht, umsortiert

$$= \sum_{j=1}^{\omega-x} \sum_{k=j}^{\omega-x} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^j = \sum_{j=1}^{\omega-x} v^j \cdot \sum_{k=j}^{\omega-x} {}_k p_x \cdot q_{x+k}$$

und benutzt, dass für die innere Summe gilt

$$_j p_x = \sum_{k=j}^{\omega-x} {}_k p_x \cdot q_{x+k}$$

(wer j Jahre überlebt, stirbt im nächsten Jahr oder in einem der Folgejahre), was man unmittelbar an Hand der üblichen Definitionen im Kalkül der Kommutationswerte auch formal herleitet durch

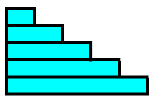
$$\sum_{k=j}^{\omega-x} {}_k p_x \cdot q_{x+k} = \sum_{k=j}^{\omega-x} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot \frac{d_{x+k}}{l_{x+k}} = \sum_{k=j}^{\omega-x} \frac{d_{x+k}}{l_x} = \frac{1}{l_x} \cdot \sum_{k=j}^{\omega-x} (l_{x+k} - l_{x+k+1}) = \frac{l_{x+j}}{l_x} = {}_j p_x$$

Zu b)

Die gesuchte Interpretation ergibt sich daraus, dass ${}_{k|}\ddot{a}_{|1}$ der Barwert der einmaligen Zahlung 1 in k Jahren und ${}_{1|}\ddot{a}_{|k}$ der Barwert der nachschüssigen k-fachen Zahlung von 1 ist. Dementsprechend zerlegt die Darstellung (1) die nachschüssige Leibrente in die Summe der einzelnen, mit dem Anteil ${}_{k}p_{x}$ gewichteten Rentenzahlungen, und die Darstellung (2) zerlegt die nachschüssige Leibrente in die Summe von vorschüssigen Zeitrenten mit genau 1, 2, 3, … Zahlungen, deren Anteil am Barwert jeweils ${}_{k|}q_{x}$ beträgt.

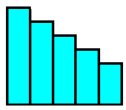
Darstellung (1) sortiert die Rentenzahlungen nach dem jeweiligen Anfalljahr k = 1, 2, 3, … der einzelnen Zahlung, während Darstellung (2) die Rentenzahlungen nach Zeitrenten gleicher Rentenzahlungsdauer k = 1, 2, 3, … zusammenfasst.

Grafisch veranschaulichen lässt sich deshalb die Zerlegung (2) durch die Grafik



… ,

deren Scheiben mit zunehmender Breite jeweils die k Zahlungen der einzelnen Zeitrentenkomponenten veranschaulichen (Scheibenmodell), wohingegen die Zerlegung (1) durch die Säulen abnehmender Höhe der Grafik



…

die sinkende Anzahl der Empfänger der einzelnen Jahresrenten verdeutlicht (Säulenmodell).

Zu c)

Die sofort beginnende Leibrente hat definitionsgemäß keinen Rückkaufswert. Deshalb darf der Rechnungszins gemäß DeckRV ab Beginn für die folgenden acht Jahre den ansonsten für die Reserve geltenden Höchstrechnungszinssatz von derzeit 2,25% überschreiten; stattdessen ist er begrenzt durch 85% des arithmetischen Mittels der letzten Monatswerte der Umlaufrenditen von Staatsanleihen mit einer Restlaufzeit von einem Jahr bis zu acht Jahren.

Gemäß Vorgabe berechnet sich das arithmetische Mittel zu

$$\frac{1}{8}\cdot\sum_{t=1}^{8}(3{,}55\% + t\cdot 0{,}1\%) = 3{,}55\% + 0{,}1\%\cdot\frac{1}{8}\cdot\sum_{t=1}^{8}t = 3{,}55\% + 0{,}1\%\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{8\cdot 9}{2} = 3{,}55\% + 0{,}45\% = 4\%$$

Deshalb sind 85% dieses Mittels gerade 3,4%: Dieser Wert kann für die ersten 8 Jahre höchstens garantiert werden; für die Folgejahre gilt der kanonische Höchstrechnungszins von 2,25%.

Zu d)

Nach Abzug der ersten Rentenzahlung 1 von der Nettoeinmalprämie $\ddot{a}_x$ der sofort beginnenden vorschüssigen Leibrente muss wegen $\ddot{a}_x = 1 + a_x$ nur noch das verbleibende Nominalvolumen von a_x tatsächlich angelegt werden. Die Zerlegung (2) des Scheibenmodells zeigt, dass hierzu jeweils ein Nominalvolumen von ${}_{k|}q_x$ in Kuponbonds der fest definierten Laufzeit k = 1, 2, 3, …, ω - x Jahre investiert werden kann, deren Erträge jeweils eine Zeitrente gleicher Laufzeit kongruent bedecken, so dass hieraus bei rechnungsmäßigem Verlauf insgesamt eine fristenkongruente Bedeckung der gesamten Leibrentenverpflichtung durch Kapitalerträge sicher gestellt ist. Hierbei wird unterstellt, dass typische Rentenbeginne in einem engen Intervall um x = 65 Jahre liegen und deshalb auch die höchste Restlaufzeit von beispielsweise ω - x ~ 50 Jahre zumindest grundsätzlich auch am Kapitalmarkt verfügbar ist. Zusätzlich ist noch zu beachten, dass hierbei das Nominal nicht in diese Finanzierung eingeht: Entweder geht man von Annuitätendarlehen aus, deren regelmäßige Zahlungen Tilgung und Zins beinhalten, oder man unterstellt ein Unternehmen im dynamischen Beharrungszustand, das die Rentenleistungen allein aus Zinskupons erbringt und die Nominale instantan wiederanlegt ohne sie in die Finanzierung einzubeziehen.

Zu e)

Der Rechnungszins für die Prämienkalkulation muss aufsichtsrechtlich „nur“ hinreichend niedrig sein, damit das Unternehmen alle seine Verpflichtungen hinreichend sicher erfüllen kann. Dies heißt insbesondere, dass die Finanzierung der erforderlichen Reserve hinreichend sicher möglich sein muss.

Die unter Teil c) beschriebene Ausnahmeregelung der DeckRV lässt sich äquivalent wie folgt formulieren: Erfolgt die Kapitalanlage für die ersten 8 Jahre zu jeweils einem Achtel in Staatsanleihen der Restlaufzeit 1,2,3, …, 8 Jahre, so kann 85% des hieraus erzielten Durchschnittszinses (also 85% des arithmetischen Mittels der Umlaufrenditen) als Reservierungszins für die ersten 8 Jahre verwendet werden.

Über die ersten 8 Jahre hinaus wird dies nicht zugelassen, da i.a. nicht davon ausgegangen werden kann, dass im relevanten Umfang in Laufzeiten von 9, 10, 11, …, ω - x investiert wird. Die Aufgabenstellung stellt aber gerade diese (i.a. nicht notwendig erfüllte) Prämisse hier definitionsgemäß sicher. Deshalb wird man im Rahmen dieser Aufgabe davon ausgehen können, dass (eine mit Staatsanleihen vergleichbare Bonität vorausgesetzt) für die gesetzlich weniger konkret geregelte Prämienberechnung eine Zinsstruktur von $0{,}85 \cdot i_0(t)$ für alle Werte von t grundsätzlich ein zulässiger Zinsansatz für die Prämienberechnung ist.

Formelmäßig liefert das für den Rechnungszins zur Prämienkalkulation eine Zinsstruktur

$$i_{RZ\_Prämie}(t) = 0{,}85 \cdot (3{,}55\% + t \cdot 0{,}1\%) = 3{,}0175\% + t \cdot 0{,}085\% \text{ für } t = 1,2,3, \ldots,8$$

und konstant gleich dem Wert 3,6975% ~ 3,70% für t ab 8 Jahren.

Ebenso wird man von der Zinsstruktur zu abschnittsweise über mehrere Jahreszeiträume konstanten Zinsansätzen übergehen können, wenn man als stückweise konstanten Satz jeweils ein geeignetes Mittel der Zinsstruktur über diesen Zeitraum wählt. Als Mittelbildung bietet sich wegen d) die Mittelung mit den Gewichten ${}_{k|}q_x$ oder (wegen der eliminierten Alters- und Bestandsabhängigkeit einfacher und daher praktisch nahe liegender) eine arithmetische Mittelung wie in der DeckRV an.

Um die Unterschiede zum Rechnungszins für die Reserve praktischerweise klein zu halten, bietet es sich in diesem Sinne z.B. an, für die ersten 8 Jahre den Rechnungszins arithmetisch zu mitteln wie beim Rechnungszins für die Reserve (also den Wert von 3,4% auch zur Prämienberechnung zu wählen) und danach nicht auf den Höchstrechnungszins von 2,25% abzusenken, sondern beim Wert von

$$0{,}85 \cdot i_0(t) = 0{,}85 \cdot i_0(8) = 0{,}85 \cdot 4{,}35\% \approx 3{,}7\% \text{ für } t = 9,10,11,\ldots,\omega - x$$

zu bleiben. Prämien- und Reservenkalkulation sind dann strukturell gleich, indem beide

- für die ersten 8 Jahre den Wert von 3,4% wählen
- danach konstant sind, und zwar
  - bei 2,25% für die Reserve
  - bei 3,70% für die Prämienkalkulation.

Will man für die längeren Restlaufzeiten (nachvollziehbarer Weise) die Sicherheit etwas erhöhen, so ist ein insgesamt konstanter Rechnungszins von 3,4% für die Prämienkalkulation nahe liegend.

Allen Ansätzen gemeinsam ist aber die (praktisch folgenreiche!) Tatsache, dass man im Sinne einer Tranchenbildung für Produkte und Kapitalanlagen ggf. monatlich neu rechnen und (zumindest den Rechnungszins für die Reserve, ggf. verzögert aber auch den Rechnungszins für die Prämienkalkulation) auch neu festsetzen muss. Dies erfordert ggf. einen erheblichen Umsetzungs- und Kommunikationsaufwand.