

## **DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.**

### **Mathematik der Lebensversicherung ( Spezialwissen )**

**Klausur vom 26.10.2013**

Die Klausur bestand aus 4 Aufgaben, die mit insgesamt 180 Punkten bewertet wurden. Um diese maximale Punktzahl erreichen zu können, mussten alle Aufgaben bearbeitet werden. Zum Bestehen der Klausur waren mindestens 72 Punkte erforderlich. 91 der 111 Teilnehmerinnen und Teilnehmer haben die Klausur bestanden.

## Aufgabe 1 (60 Punkte)

Der Aktuar eines Lebensversicherungsunternehmens kalkuliert individuell eine (selbstständige) Berufsunfähigkeitsversicherung, bei der eine erhebliche Rente versichert werden soll. Es wird unterstellt, dass der Gleichbehandlungsgrundsatz nicht verletzt wird.

- Der Versicherte ist männlich.
- Beruf: niedergelassener Kardiologe
- Das Eintrittsalter beträgt 35 Jahre.
- Die Versicherungs- und Prämienzahlungsdauer soll 5 Jahre betragen, eine eventuell gezahlte Berufsunfähigkeitsrente endet ebenfalls im Alter 40.
- Alle Zahlungen erfolgen jährlich vorschüssig.

a) Zunächst sollen geeignete Rechnungsgrundlagen für die Aktivensterblichkeit ausgewählt werden. Es stehen 5 Tafeln zur Auswahl [alle Werte in %]:

- I. die Tafel DAV 2008T
- II. eine Tafel mit unternehmenseigenen Todesfallgrundlagen (modifiziert)
- III. die Tafel DAV 2004 R
- IV. die unmodifizierten Grundlagen zu I.
- V. die unmodifizierten Grundlagen zu III.

Alter	I	II	III	IV	V
35	0,895	0,650	0,605	0,668	0,717
36	0,945	0,680	0,626	0,705	0,742
37	1,005	0,720	0,663	0,750	0,786
38	1,083	0,760	0,713	0,808	0,845
39	1,181	0,810	0,754	0,881	0,918
40	1,301	0,880	0,805	0,971	1,008

Welche Grundlagen sollte der Aktuar wählen? Falls die Auswahl von Voraussetzungen abhängen könnte, die nicht angegeben sind, beschreiben sie bitte diese für Sie gegebenenfalls relevanten Voraussetzungen bzw. Rahmenbedingungen und geben an, welche Konsequenzen daraus jeweils folgen.

b) Für die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten liegen die Werte  $i_x$  [in %] aus der Tafel DAV 1997 I vor:

Alter	$i_x$ [%]
35	2,301
36	2,460
37	2,659
38	2,852
39	3,038

Sind diese Grundlagen für die Kalkulation anzusetzen oder bestehen Alternativen? Welche Zusatzinformationen werden hierfür benötigt?

- c) Als weitere Grundwerte liegen die Invalidensterblichkeit und die Reaktivierungswahrscheinlichkeiten vor [alle Werte in ‰]:

Alter	Invalidensterblichkeit					
	N = 1	N = 2	N = 3	N = 4	N = 5	N = 6
35	20,32	17,49	14,55	11,62	8,68	5,78
36	21,38	18,42	15,33	12,24	9,17	6,17
37	22,39	19,32	16,08	12,84	9,66	6,57
38	23,84	20,19	16,80	13,43	10,14	6,97
39	24,37	21,06	17,52	14,01	10,62	7,37

Die Spaltenwerte zu N bezeichnen die Ausscheidewahrscheinlichkeit eines x-jährigen in der Selektionsperiode N.

Alter	Reaktivierungswahrscheinlichkeit					
	N = 1	N = 2	N = 3	N = 4	N = 5	N = 6
35	66,88	63,99	88,83	84,51	82,85	42,26
36	65,49	60,51	81,12	75,04	74,03	36,96
37	63,97	57,20	74,03	66,70	65,98	32,30
38	61,92	54,01	67,49	59,29	58,52	28,09
39	59,05	50,78	61,22	52,30	51,42	24,13

Im Weiteren unterstellen wir nun:

- die Wahl der Grundlagen II für die Aktivensterblichkeit;
- $0,7 \cdot i_x$  für die Invalidisierung;
- die übrigen angegebenen Rechnungsgrundlagen;
- einen Rechnungszins von 1,75 %.

Bitte geben Sie unter diesen Bedingungen für eine Jahresrente der Höhe 1 formel- und zahlenmäßig an:

- den Barwert der Aktivitätsrente im Alter 38
- den Barwert der laufenden Berufsunfähigkeitsrente im Alter 38 bei Invalidisierung im Alter 36
- den Anwartschaftsbarwert des Aktiven auf Invalidenrente im Alter 38. Wie hoch wäre dieser Anwartschaftsbarwert, wenn die vertraglich vereinbarte Invalidenrente bei jährlich 60.000 € läge?

### Aufgabe 2 (60 Punkte)

Der Vermögensanleger eines Versicherungsunternehmens verfolgt kontinuierlich eine Anlagestrategie, die nur 10% des Gesamtvermögens in einen Aktienfonds und 90% des Anlagevermögens in einen risikolosen Geldmarktfonds investiert.

Der Preisprozess  $\{S_t | 0 \leq t \leq T\}$  des genannten Aktienfonds folge einer geometrischen Brownschen Bewegung, etwa  $S_t = S_0 \cdot e^{(\mu - \frac{\nu^2}{2})t + \nu W_t}$  mit  $\mu = 0,06$  und  $\nu = 0,2$ .

Der risikolose Geldmarktfonds entwickelt sich kontinuierlich mit einer festen exponentiellen Zinsrate  $r = 0,02$  weiter, etwa:  $B_t = B_0 \cdot e^{rt}$ .

Man unterstellt, dass in einem zeitstetigen Modell idealisiert diese kontinuierliche Anlagestrategie mit den anvisierten proportionalen Anteilen möglich ist.

- a) Man zeige, dass unter diesen Annahmen der Wert  $V(t)$  der Vermögensanlage durch die folgende geometrische Brownsche Bewegung beschrieben werden kann:

$$V(t) = \exp\left(\left(b\mu + (1-b)r - \frac{b^2\nu^2}{2}\right)t + b\nu \cdot W_t\right) ,$$

wenn man von einem Startvermögen 1 ausgeht. Was sind Drift- und Volatilitätsparameter dieser geometrischen Brownschen Bewegung?

**(15 Punkte).**

- b) Man berechne den Erwartungswert  $E[V(1)]$  und die Varianz des Vermögens  $V(1)$  nach einem Jahr.

**(25 Punkte).**

- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird man mit dieser Anlagestrategie mindestens einen Garantiezins von 1,75% in einem Jahr erwirtschaften? Ist diese größer als 50% ?

**(20 Minuten).**

**(Hinweis zu Teil a) der Aufgabe:** Man berechne die infinitesimalen Inkremente für die jeweiligen Anlagen:

$dS_t = \mu \cdot S_t \cdot dt + \nu \cdot S_t dW_t$  ;  $dB_t = r \cdot B_t \cdot dt$  ;  $dV(t) = \dots$  und versuche, die vorgeschriebene feste Aufteilung der Anteile in diesen kleinen Zeitabschnitten einzuhalten.

**Hinweis zu Teil b) der Aufgabe:** Man benutze ohne Beweis, dass  $\exp(-\frac{\nu^2}{2}t + \nu W_t)$  ein Martingal ist, so dass insbesondere für alle  $t$  gilt:

$$E[\exp(-\frac{\nu^2}{2}t + \nu W_t)] = 1.$$

### **Aufgabe 3 Mittlerer Rechnungszins und Zinsmarge (40 Punkte)**

Sie arbeiten als Aktuar bei einem deutschen Lebensversicherer, der Pfefferminzia, und unterstützen deren Verantwortlichen Aktuar bei seinen Aufgaben.

Der Urlaub ist gerade vorbei, Sie kommen zurück in Ihr Büro und sichten Ihre E-Mails. Zwei Mails Ihres Chefs wecken Ihre besondere Aufmerksamkeit, und Sie bearbeiten sie als erstes.

*Hallo,*

*die aktuellen Zeitungsberichte über die laut MACK Report im Geschäftsjahr 2012 sehr hohen Nettoverzinsungen (5,0% für die Pfefferminzia, 6,0% in der Branchenspitze) haben unseren Vorstand offenbar irritiert:*

- *Gerade erst hatte Herr Mannimeiker, unser Kapitalanleger, in der letzten Vorstandssitzung erläutert, dass er derzeit nur mit Mühe und deutlich höherem Kreditrisiko zu 3,1% wiederanlegen kann statt zu 3,5% wie in der zweiten Hälfte des Geschäftsjahres 2012.*
- *Außerdem hatte ich in der gleichen Vorstandssitzung deutlich gemacht, dass wir im Geschäftsjahr 2012 wegen der hohen Aufwände für die Zinszusatzreserve (0,95% der mittleren Deckungsrückstellung) und für die Beteiligung der Kunden an den Bewertungsreserven (0,55% der mittleren Deckungsrückstellung) in entsprechendem Umfang Bewertungsreserven realisieren mussten, so dass wir wegen der niedrigen Wiederanlage für die nächsten Jahre eine laufende Durchschnittsverzinsung von nur noch wenig über 3,0%, unserem mittleren Rechnungszins im Bestand (gerechnet noch ohne Zinszusatzreserve), erwarten. Deshalb hatte ich die Sicherheitsmarge in der Rechnungsgrundlage als deutlich reduziert bezeichnet.*

*Und jetzt bittet mich der Vorstand, doch noch mal zu erläutern, wo denn genau das Problem liege – die Nettoverzinsung liege doch immerhin exakt 2% über dem durchschnittlichen Rechnungszins, damit sei der Abstand zwischen Zinserträgen und Zinsaufwänden deutlich größer als in jedem der letzten zehn Jahre, so dass von einer reduzierten Marge doch offenbar keine Rede sein könne, eher das Gegenteil sei doch offenbar der Fall.*

*Entwerfen Sie bitte eine Antwort für mich, die den allgemeinen Sachverhalt erläutert sowie konkret und leicht verständlich auf den genannten Einwand eingeht? Danke.*

Sie legen sich ein Konzept für die Antwort zurecht und bearbeiten dazu zur Schärfung Ihrer Argumentation die folgenden Themen:

- a) Wie ist der mittlere (durchschnittliche) Rechnungszins grundsätzlich definiert? Wie verändert sich dieser Wert durch Bildung einer Zinszusatzreserve und Berücksichtigung dieser Zusatzreserve in der Definition? (5 Punkte)
- b) Wie ist der mittlere (durchschnittliche) Zinsaufwand definiert? Wie geht eine ggf. zu bildende Zinszusatzreserve in diesen Wert ein? (5 Punkte)
- c) Worin unterscheiden sich beide Begriffe aus a) und b)? Gehen Sie bitte insbesondere auf eine etwaige Zinszusatzreserve ein. (6 Punkte)
- d) Wie ist die Nettoverzinsung definiert? (4 Punkte)
- e) Wie sind die laufende Durchschnittsverzinsung und die bereinigte laufende Durchschnittsverzinsung definiert? (5 Punkte)
- f) Welche Nettoverzinsung hätte sich ohne die beiden in der Mail genannten außerordentlichen Effekte ergeben? (5 Punkte)
- g) Was bedeutet das für die laufende Durchschnittsverzinsung? Welche Marge zwischen laufender Durchschnittsverzinsung und mittlerem Rechnungszins ergibt sich dabei konkret (in %)? Wie kam Ihr Chef zu der Einschätzung, in den nächsten Jahren sei vermutlich mit einer lfd. Durchschnittsverzinsung von nur wenig über 3,0% zu rechnen? (7 Punkte)
- h) Wo liegt der Fehler in dem explizit genannten Argument des Vorstandes? (3 Punkte)

#### **Aufgabe 4 Zinszusatzreserve und Sicherungsbedarf (20 Punkte)**

Die zweite Mail Ihres Chefs hat folgenden Wortlaut:

*Hallo,*

*erinnern Sie sich noch an die unglücklich verlaufene Diskussion über das SEPA-Begleitgesetz und die darin enthaltene Änderung der Beteiligung der Kunden an den Bewertungsreserven? Vorgesehen war, die Kunden nur noch an denjenigen Bewertungsreserven aus festverzinslichen Anlagen zu beteiligen, die oberhalb des so genannten „Sicherungsbedarfs“ liegen. Dabei bezeichne ich mit Sicherungsbedarf genau diejenige Zinszusatzreserve, die man erhält, wenn man als Referenzzinssatz den aktuellen Basiszinssatz zu Grunde legt statt des in der DeckRV definierten Zehnjahresmittel der Basiszinssätze (auch wenn im Gesetzesentwurf mit diesem Terminus genau genommen der Aufwand bezeichnet wurde, den ich zusätzlich zur bereits nach DeckRV gebildeten vorhandenen Zinszusatzreserve erbringen müsste, um als Endwert die mit aktuellem Basiszinssatz berechnete Zinszusatzreserve zu erhalten). Beim Sicherungsbedarf geht man also sofort in einem einzigen Schritt auf den aktuellen Basiszinssatz als Rechnungszins. Bei der nach DeckRV gebildeten Zinszusatzreserve dagegen nimmt man sich hierfür wegen der Zehnjahresmittelung auch zehn Jahre Zeit (denn bei konstant bleibendem aktuellem Basiszins entspricht das Zehnjahresmittel nach zehn Jahren genau diesem konstanten Basiszins), baut also die Zinszusatzreserve in 10 aufeinanderfolgenden Jahresschritten statt in einem einzigen Schritt auf.*

*Über diese Deutung des Sicherungsbedarfs habe ich gestern beim Kaffee noch mal mit Herrn Lemma, unserem neuen Mathematik – Vorstand, diskutiert. Wir haben uns gemeinsam überlegt, dass der Sicherungsbedarf - so verstanden - eigentlich auch eine Aussage über den für die Zinszusatzreserve erforderlichen Aufwand in den nächsten zehn Jahren beinhaltet. Hieran schloss sich die konkrete Frage an, was es wohl für diesen Aufwand bedeuten würde, wenn der Basiszins auf seinem Jahres - Tiefststand von rund 1,5% verharren würde. Insbesondere wollten wir grob abschätzen, welchen Betrag an Zinszusatzreserve wir dann wohl in den nächsten 10 Jahren insgesamt bilden müssten.*

*Dabei habe ich mich leichtsinnigerweise dazu verleiten lassen, diesen Betrag an Hand unseres mittleren Rechnungszinses von 3,0% (der ohne Berücksichtigung bereits gebildeter Zinszusatzreserven ermittelt ist) ohne großes Überlegen aus dem Gefühl heraus einfach so mal abzuschätzen als  $10 * (3,0\% - 1,5\%) = 15\%$  der Deckungsrückstellung. Das schien uns ziemlich viel.*

*Tun Sie mir deshalb bitte den Gefallen und überlegen sich einmal, was ich da eigentlich genau gerechnet habe und ob das überhaupt zur Fragestellung passt? Bitte antworten Sie zunächst nur mir, mit Herrn Lemma rede ich dann später selbst. Vielen Dank.*

Sie denken zunächst mal über das Problem nach und verwenden dazu die folgenden Notationen:

- Mit  $z_1, \dots, z_7$  seien die sieben Rechnungszinssätze von 1,75% / 2,25% / 2,75% / 3,0% / 3,25% / 3,5% / 4,0% bezeichnet.
- Mit  $DR_1, \dots, DR_7$  seien die Deckungsrückstellungen der zugehörigen Tarifgenerationen und mit  $DR$  die gesamte Deckungsrückstellung bezeichnet.
- Der Anteil der Deckungsrückstellung  $DR_k$  an der Deckungsrückstellung  $DR$  sei mit  $\alpha_k$  bezeichnet,  $k = 1, \dots, 7$ .
- Für jedes  $k = 1, \dots, 7$  verwenden Sie als lineare Näherung der Zinszusatzreserve der Tarifgeneration  $k$  zu einem Zinssatz  $0 < i < z_k$  die Größe  $ZZR_k(i) \cong (z_k - i) * D_k * DR_k$ , wobei  $D_k$  die „modified duration“ von  $ZZR_k(i)$  bezeichne.

Gesucht ist offenbar eine Näherung des Sicherungsbedarfs

$$SichB(1,5\%) = \sum_{k=1}^7 ZZR_k(1,5\%).$$

- a) Geben Sie mit den oben eingeführten Notationen eine Formel für den mittleren Rechnungszins  $m_z$  an, ohne dabei ggf. bereits gebildete Zinszusatzreserven zu berücksichtigen. (5 Punkte)
- b) Formen Sie die angegebene Gleichung für den Sicherungsbedarf so um, dass Sie der von Ihrem Chef in der obigen E-Mail verwendeten Formel von der Struktur her entspricht. (10 Punkte)
- c) Was entspricht dem von Ihrem Chef ad hoc verwendeten Faktor 10 in Ihrer Umformung? Wovon hängt es ab, ob dieser Wert 10 eine mehr oder wenige gute Näherung ist? Wie ist Ihre Einschätzung? (5 Punkte)



## Lösungsvorschläge

### Aufgabe 1

zu a)

(1) Das primäre Entscheidungskriterium ist die Frage, ob die Versicherung Erlebensfall- oder Todesfallcharakter hat:

- Bei Erlebensfallcharakter ist III oder V zu wählen.
- Bei Todesfallcharakter stehen I, II und IV zur Diskussion.

Die Frage ist für die selbständige Invaliditätsversicherung gegen jährliche Prämienzahlung ohne Prämienberechnung oder Abschätzung nicht unmittelbar zu beantworten, da die Sterblichkeit sowohl in den Leistungs- als auch in den Prämienzahlungsbarwert eingeht. Da allerdings die Berufsunfähigkeitsleistung vom Erleben des Invalidisierungsalters abhängig ist, erscheint die Wahl einer Erlebensfalltafel (anders als in der Praxis üblich) plausibel.

(2) Grundsätzlich darf keine Tafel ohne Modifizierung gewählt werden, wenn keine Top-down-Kalkulation mit Ermittlung eines Gesamt-Sicherheitsniveaus vorgenommen wird. Dies spricht für die Wahl von I, II oder III.

(3) Bei Annahme des Todesfallcharakters spricht das niedrige Alter des Versicherungsinteressenten und die zu erwartende intensive (medizinische und finanzielle) Risikoprüfung dafür, dass II nicht unangemessen ist. Bei Erlebensfallcharakter zeigt der Vergleich von V und III, dass die Wahl von III erforderlich bleibt.

(4) Pragmatische Gesichtspunkte:

- Die Wahl der Aktivensterblichkeit ist von untergeordneter Bedeutung, insoweit kann pragmatischen Aspekten der Verwaltbarkeit durchaus Rechnung getragen werden. Insbesondere kann eine Todesfalltafel zugrundegelegt werden (keine Geburtsjahrabhängigkeit der  $q_x^{aa}$ ).
- Bei Annahme des Todesfallcharakters bedeutet dies, dass die üblichen Todesfallwahrscheinlichkeiten der Gesellschaft, hier also Tafel II, verwendet werden können. Auch wenn der Erlebensfallcharakter unterstellt wird, ist der Ansatz von II (Werte zwischen denen von III und V) vertretbar.

zu b)

- Die vorliegende Tafel DAV 1997 I ist ohne Berufsgruppendifferenzierung erstellt worden. Da das Risiko „Kardiologe“ aber hinsichtlich der Berufsgruppe ein überdurchschnittlich gutes Risiko darstellt, sollte zumindest überprüft werden, ob die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten unter diesem Gesichtspunkt im vorliegenden Fall reduziert werden könnten.
- Die ungewöhnlich kurze Versicherungsdauer bewirkt einen starken positiven Selektionseffekt, der ggf. zur Reduzierung der  $i_x$  beitragen kann. In jedem Fall aber kann bei Verwendung der vorgegebenen  $i_x$  - bezogen auf diesen Aspekt - von einer zusätzlichen Sicherheit ausgegangen werden.
- Auf der anderen Seite muss das subjektive Risiko, das sich aufgrund der hohen versicherten Leistung ergeben könnte, durch eine sorgfältige Risikoprüfung (auch hinsichtlich des finanziellen Risikos) minimiert werden, ggf. auch durch den Verzicht auf die möglich erscheinende Absenkung der  $i_x$ .
- Kann - was wahrscheinlich ist - das Unternehmen eine solche Deckung innerhalb des eigenen Portefeuilles nicht zeichnen, so ist die Einbettung in ein Rückversicherungskollektiv ggf. erforderlich.
- Bei der vorliegenden Fallkonstruktion ist es nicht abwegig, dass auch der Wettbewerbsfaktor zu beachten ist.

zu c)

Mit den üblichen Bezeichnungen gilt

*Aktivitätsrentenbarwert:*

$$l_{(x)+m+1}^{aa} = l_{(x)+m}^{aa} \cdot (1 - q_{(x)+m}^{aa} - 0,7 \cdot i_{(x)+m})$$

$$\ddot{a}_{(x)+m: \overline{n-m}|}^{aa} = \frac{1}{D_{(x)+m}^{aa}} \cdot \sum_{\mu=m}^{n-1} D_{x+\mu}^{aa}$$

Mit den Vorgaben folgt

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{38: \overline{2}|}^{aa} &= 1 + \frac{D_{39}^{aa}}{D_{38}^{aa}} = 1 + v \cdot \frac{l_{39}^{aa}}{l_{38}^{aa}} = 1 + \frac{1}{1,0175} \cdot (1 - q_{38}^{aa} - 0,7 \cdot i_{38}) \\ &= 1 + \frac{1}{1,0175} \cdot (1 - 0,00076 - 0,7 \cdot 0,002852) = 1,98009 \end{aligned}$$

*Invalidenrentenbarwert* ( $x = 38; z = 36$ )

$$l_{(z)+m+1}^i = l_{(z)+m}^i \cdot (1 - q_{(z)+m}^i - r_{(z)+m})$$

$$a_{(z)+m, \overline{x+n-z-m}|}^i = \frac{1}{D_{(z)+m}^i} \cdot \sum_{\mu=m}^{x+n-z-1} D_{(z)+\mu}^i$$

Mit den Vorgaben folgt:

$$\ddot{a}_{(36)+2; \overline{2}|}^i = 1 + v \cdot \frac{l_{(36)+3}^i}{l_{(36)+2}^i} = 1 + \frac{1}{1,0175} \cdot (1 - 0,0168 - 0,06749) = 1,89996$$

*Anwartschaftsbarwert im Alter 33 auf Invalidenrente*

$$\ddot{a}_{(x)+m; \overline{n-m}|}^{ai} = \frac{1}{D_{(x)+m}^{aa}} \cdot \sum_{\mu=m}^{x+n-z-1} D_{(x)+\mu}^{aa} \cdot 0,7 \cdot i_{(x)+\mu} \cdot \left(1 - \frac{q_{(x)+\mu}^{aa}}{2}\right) \cdot 0,5 \cdot \left(\ddot{a}_{(x+\mu); \overline{n-\mu}|}^i + \ddot{a}_{(x+\mu)+1; \overline{n-\mu-1}|}^i - \frac{1}{12}\right) \cdot v^{\frac{1}{2}}$$

Im konkreten Beispiel erhält man:

$$\ddot{a}_{(38); \overline{2}|}^i = 1 + v \cdot (1 - 0,02384 - 0,06192) = 1,89851$$

$$\ddot{a}_{(39); \overline{1}|}^i = 1$$

und damit

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{(35)+3; \overline{2}|}^{ai} &= 0,7 \cdot 0,002852 \cdot \left(1 - \frac{0,00076}{2}\right) \cdot \left(0,5 \cdot 2,89851 - \frac{1}{24}\right) \cdot v^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + (1 - 0,00076 - 0,7 \cdot 0,002852) \cdot 0,7 \cdot 0,003038 \cdot \left(1 - \frac{0,00081}{2}\right) \cdot \left(0,5 - \frac{1}{24}\right) \cdot v^{\frac{3}{2}} \\ &= 0,002784786 + 0,000946653 = 3,731439 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Bei einer vereinbarten Rente von jährlich 60.000 € führt dies zu einem Anwartschaftsbarwert im Alter 38 in Höhe von 223,89 €.

## Aufgabe 2

Zu a)

Ist  $V(t)$  der Wert der Vermögensanlage, so gilt in kleinen Zeitabschnitten für die Dynamik der Inkremente, wenn man  $b$  Anteile in der riskanten Anlage hält und  $1-b$  Anteile in der risikolosen Anlage:

$$\begin{aligned} dV(t) &= b \cdot (\mu \cdot V(t) \cdot dt + v \cdot V(t) \cdot dW_t) + (1-b) \cdot V(t) \cdot r \cdot dt \\ &= (b \cdot \mu + (1-b) \cdot r) \cdot V(t) \cdot dt + b \cdot v \cdot V(t) \cdot dW_t \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich

$$(1) \quad V(t) = \exp\left(\left(b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}\right)t + bv \cdot W_t\right),$$

wenn man das Anfangsvermögen auf 1 normiert. Bei den hier vorliegenden Zahlen ist dabei  $\mu = 0,06$  und  $v = 0,2$ ,  $b$  beträgt  $0,1$  und damit  $1-b = 0,9$ . Der Volatilitätsparameter ist also  $0,1 \cdot 0,2 = 0,02$  und der Driftparameter ist  $0,1 \cdot 0,06 + 0,9r = 0,006 + 0,018 = 0,024$ .

Zu b)

Es ist nach Gleichung (1) von a):

$$E[V(1)] = E\left[\exp\left(\left(b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}\right)1 + bv \cdot W_1\right)\right]$$

$= E[\exp((b\mu + (1-b)r))] = \exp(b\mu + (1-b)r)$  unter Beachtung des Hinweises zu b) und damit hier konkret:

$$E[V(1)] = \exp(0,1 \cdot 0,06 + 0,9 \cdot 0,02) = \exp(0,024) = 1,02429 \dots$$

Das bedeutet, dass man im Erwartungswert schon die Zielrendite von  $1,75\%$  übertrifft.

Zur Berechnung der Varianz:

Es ist  $\text{VAR}[V(1)] = E[V(1)^2] - E[V(1)]^2$ , also wegen

$$V(1)^2 = \exp\left(2\left(b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}\right) + 2bv \cdot W_1\right) \text{ folgt dann mit dem Hinweis zu b)}$$

$$E[V(1)^2] = E\left[\exp\left(2\left(b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}\right) + 2bv \cdot W_1\right)\right] =$$

$$\exp\left(2\left(b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}\right)\right) \cdot E[\exp(2bv \cdot W_1)] =$$

$$\exp\left(2\left(b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}\right)\right) \cdot \exp(2b^2v^2) =$$

$$\exp(2(b\mu + (1-b)r) + b^2v^2),$$

und das ergibt bei den hier vorliegenden numerischen Werten:

$E[V(1)^2] = \exp(2 \cdot (0,1 \cdot 0,06 + 0,9 \cdot 0,02) + 0,01 \cdot 0,04) = \exp(0,0484)$   
 $\approx 1,049590\dots$  und damit ergibt sich insgesamt  $\text{VAR}[V(1)] =$   
 $1,049590\dots - (1,02429\dots)^2 = 0,00041975\dots$  und damit eine sehr kleine Varianz,  
 die bei naiver Betrachtung darauf hindeutet, dass man die Zielrendite mit hoher  
 Wahrscheinlichkeit erreicht. Aber hierzu vgl. Teil c)!

Zu c)

Man definiere  $r_G$  durch  $1,0175 = \exp(r_G)$ , d.h.  $r_G = 0,01735$ , dann hat man zur  
 Berechnung der Wahrscheinlichkeit:  $P(V(1) \geq e^{r_G})$  nur die Formel von Teil a)  
 zu verwenden. Das ergibt:

$$\begin{aligned} P(V(1) \geq e^{r_G}) &= P\left(\exp\left((b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}) + bv \cdot W_1\right) \geq e^{r_G}\right) = \\ &= P\left(\left((b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}) + bv \cdot W_1\right) \geq r_G\right) = P\left(W_1 \geq \frac{(r_G - (b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}))}{b \cdot v}\right) \\ &= 1 - N\left(\frac{(r_G - (b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}))}{b \cdot v}\right), \end{aligned}$$

wenn wie üblich  $N(\cdot)$  die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung  
 ist.

Nun ist bei den hier vorliegenden konkreten Werten  $\frac{(r_G - (b\mu + (1-b)r - \frac{b^2v^2}{2}))}{b \cdot v} =$   
 $= -0,3225$  und damit ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu  
 $\approx 0,62645$ , d.h. zwar mehr als 50%, aber immer noch mit einem hohen Risiko,  
 die Zielrendite zu verfehlen.

### Aufgabe 3

Zu a)

Wie ist der mittlere (durchschnittliche) Rechnungszins grundsätzlich definiert? Wie verändert sich dieser Wert durch Bildung einer Zinszusatzreserve und Berücksichtigung dieser Zusatzreserve in der Definition? (5 Punkte)

Der mittlere Rechnungszins ist ein gewichtetes Mittel der tariflichen Rechnungszinssätze, die den einzelnen Tarifgenerationen jeweils für die Reservierung zu Grunde gelegt werden. Als Gewichtungsfaktor wird dabei jeweils das Verhältnis der Deckungsrückstellung einer einzelnen Rechnungszinsgeneration zur gesamten Deckungsrückstellung des Bestandes nach den Verhältnissen des letzten Bilanzstichtags angesetzt. In diesem Sinn ist der mittlere Rechnungszins primär ein Durchschnittswert von nominalen Kenngrößen (den Rechnungszinssätzen), nicht ein Quotient aus definierten Zinserträgen und einem definierten Zinsträger.

Wird eine Zinszusatzreserve nach den gesetzlichen Vorgaben der DeckRV gebildet, so wird jeweils das Minimum aus dem Referenzzinssatz und dem tariflichen Rechnungszins in der gewichteten Mittelung berücksichtigt. Die als Gewichtungsfaktoren verwendeten Deckungsrückstellungen sind dabei jeweils einschließlich einer ggf. gebildeten Zinszusatzreserve der Tarifgeneration bzw. des Gesamtbestandes anzusetzen. Der mittlere Rechnungszins ist damit primär ein Durchschnittswert der wo erforderlich auf den Referenzzinssatz abgesenkten Rechnungszinssätze.

Zu b)

Wie ist der mittlere (durchschnittliche) Zinsaufwand definiert? Wie geht eine ggf. zu bildende Zinszusatzreserve in diesen Wert ein? (5 Punkte)

Der mittlere Zinsaufwand ist definiert als das Verhältnis all derjenigen Aufwände in ihrer rechnungsmäßigen Abgrenzung auf das Bilanzjahr, die in der Gewinnanalyse (NW 219 S.1) der Ertragsquelle Zins zugeordnet werden, zur mittleren Deckungsrückstellung des Bilanzjahres (arithmetisches Mittel von Anfangs- und Endrückstellung).

Der Aufwand für die Bildung und den weiteren Aufbau einer ggf. erforderlichen Zinszusatzreserve geht gemäß NW 219 S.1 in den Zinsaufwand über die Position „Sonstiges“ ein. Zu diesem Zeitpunkt bereits in der Deckungsrückstellung gebildete Zinszusatzreserven gehen in den Anfangs- bzw. Endwert der Deckungsrückstellung und hierüber in die mittlere Deckungsrückstellung ein.

Zu c)

Worin unterscheiden sich beide Begriffe? Gehen Sie bitte insbesondere auf eine etwaige Zinszusatzreserve ein. (6 Punkte)

Der mittlere Rechnungszins ist ein statischer Begriff, der nur auf die Verhältnisse am Bilanzstichtag abstellt. Der Zeitpunkt der Entstehung bleibt konzeptionell unberücksichtigt, insbesondere findet keine Rechnungsabgrenzung auf das Bilanzjahr statt.

Der mittlere Zinsaufwand ist demgegenüber eine dynamische Größe, die alle innerhalb des Bilanzjahres entstehenden Zinsaufwände in Relation zur mittleren Deckungsrückstellung des Bilanzjahres durch einen Zinssatz ausdrückt.

Rein formal lässt sich der mittlere Rechnungszins auch ausdrücken als das Verhältnis des formalen Zinsaufwandes zur Fortschreibung der Deckungsrückstellung (ermittelt durch Anwendung des tariflichen Rechnungszinses auf die Bilanzdeckungsrückstellung der zugehörigen Rechnungszinsgeneration) zur gesamten Bilanzdeckungsrückstellung.

Diese alternative Definition macht deutlich, dass der Unterschied genau in zwei Punkten liegt:

- Verwendung nominaler Bilanzwerte beim mittleren Rechnungszins vs. Berücksichtigung der über die 12 Monate eines Jahres zu definierten Zeitpunkten anfallenden abgegrenzten Werte beim mittleren Zinsaufwand
- Berücksichtigung aller Aufwände, die in der Rechnungslegung der Quelle Zins zugeordnet werden, also nicht nur der nominalen Aufwände aus der Anwendung des tariflichen Rechnungszinses auf die Bilanzdeckungsrückstellung der zugehörigen Rechnungszinsgeneration, sondern z.B. auch der Rechnungszinsen auf Risikobeiträge, der Zinsen auf Pensionsrückstellungen und insbesondere auch der Aufwände für eine Zinszusatzreserve.

Hier wird deutlich, dass die Aufwände zur Bildung einer Zinszusatzreserve nicht in den mittleren Rechnungszins, wohl aber in den mittleren Zinsaufwand (erhöhend) eingehen.

Die Entlastungswirkung einer bereits bilanziell vorhandenen Zinszusatzreserve geht dagegen in beide Größen ein, explizit durch Ansatz des Minimums aus Referenzzins und Rechnungszins beim mittleren Rechnungszins, implizit durch einen negativen Teilaufwand innerhalb der Position Sonstiges beim mittleren Zinsaufwand.

Zu d)

Wie ist die Nettoverzinsung definiert? (4 Punkte)

Die Nettoverzinsung ist definiert als das Verhältnis der Differenz aus Erträgen und Aufwänden innerhalb des Bilanzjahres im Zähler zur mittleren Deckungsrückstellung im Nenner.

Als Erträge werden alle Erträge aus Kapitalanlagen berücksichtigt, sowohl ordentliche Erträge als auch außerordentliche Erträge wie z.B. Zuschreibungen und Gewinne aus dem Abgang von Kapitalanlagen.

Als Aufwände werden alle Aufwände für Kapitalanlagen berücksichtigt, insbesondere auch Abschreibungen und Verluste aus dem Abgang von Kapitalanlagen.

Die mittlere Deckungsrückstellung des Bilanzjahres ist das arithmetische Mittel von Anfangs- und Endwert der Bilanzdeckungsrückstellung.

Zu e)

Wie sind die laufende Durchschnittsverzinsung und die bereinigte laufende Durchschnittsverzinsung definiert? (5 Punkte)

Die laufende Durchschnittsverzinsung ist wie die Nettoverzinsung definiert als das Verhältnis der Differenz aus Erträgen und Aufwänden innerhalb des Bilanzjahres im Zähler zur mittleren Deckungsrückstellung im Nenner.

Allerdings werden hierbei nur ordentliche Erträge und die zugehörigen Aufwände betrachtet. Ordentliche Erträge sind beispielsweise insbesondere Kuponzahlungen von Standardbonds, Mietzahlungen aus Immobilien, Dividenden von Aktien und Ausschüttungen von Investmentfonds. Ordentliche Aufwände sind z.B. Aufwände für die Verwaltung von Kapitalanlagen.

Bei der laufenden Durchschnittsverzinsung sind alle Fondsausschüttungen in voller Höhe ordentlicher Ertrag. Im Unterschied dazu werden bei der Ermittlung der bereinigten Durchschnittsverzinsung innerhalb von Fondsausschüttungen diejenigen Erträge nicht angesetzt, die materiell aus außerordentlichen Erträgen des Fonds gespeist werden.

Zu f)

Welche Nettoverzinsung hätte sich ohne die beiden in der Mail genannten außerordentlichen Effekte ergeben? (5 Punkte)



In der Mail genannt werden zwei außerordentliche Effekte (als Aufwandspositionen):

- Aufwände für die Zinszusatzreserve in Höhe von 0,95% der mittleren Deckungsrückstellung und
- Aufwände für die Beteiligung der Kunden an den Bewertungsreserven in Höhe von 0,55% der mittleren Deckungsrückstellung.

Dies sind passivische Aufwandspositionen, insbesondere keine Aufwände für Kapitalanlagen.

In der Mail wird aber ausdrücklich erwähnt, dass zur Finanzierung dieser Aufwände in entsprechendem Umfang Bewertungsreserven realisiert werden mussten, so dass Gewinne aus dem Abgang von Kapitalanlagen in Höhe von  $0,95\% + 0,55\% = 1,50\%$  der mittleren Deckungsrückstellung als außerordentliche Erträge in die Nettoverzinsung eingeflossen sind. Da diese Erträge als Teil der Nettoverzinsung ebenfalls auf die mittlere Deckungsrückstellung bezogen werden, kann man den Wert von 1,50% direkt von der Nettoverzinsung abziehen und erhält  $5,0\% - 1,5\% = 3,5\%$  als denjenigen Wert der Nettoverzinsung, den diese ohne die beiden außerordentlichen Effekte angenommen hätte.

Zu g)

Was bedeutet das für die laufende Durchschnittsverzinsung? Welche Marge zwischen laufender Durchschnittsverzinsung und mittlerem Rechnungszins ergibt sich dabei konkret (in %)? Wie kam Ihr Chef zu der Einschätzung, in den nächsten Jahren sei vermutlich mit einer lfd. Durchschnittsverzinsung von nur wenig über 3,0% zu rechnen? (7 Punkte)

Geht man davon aus, dass der Saldo aus außerordentlichen Erträgen und außerordentlichen Aufwänden aus der Kapitalanlage zumindest im Mittel eher positiv ist, deutet das Ergebnis aus Teil f) darauf hin, dass die laufende Durchschnittsverzinsung in einer Größenordnung von höchstens 3,5% liegen dürfte. Die Marge zwischen laufender Durchschnittsverzinsung von höchstens 3,5% und mittlerem Rechnungszins von 3,0% liegt damit bei höchstens 0,5%. Wegen der im Vergleich zum letzten Halbjahr um  $3,5\% - 3,1\% = 0,4\%$  gesunkenen Wiederanlage wird die laufende Durchschnittsverzinsung bei unveränderten Verhältnissen tendenziell Richtung 3,1% sinken und damit die Marge tendenziell bis auf 0,1% absinken. Das beschreibt einen konkreten Verzehr der Sicherheitsmarge oberhalb des durchschnittlichen Rechnungszinses und macht die Einschätzung Ihres Chefs plausibel.

Zu h)

Wo liegt der Fehler in dem explizit genannten Argument des Vorstandes? (3 Punkte)

Der Fehler liegt im Vergleich der Nettoverzinsung mit dem mittleren Rechnungszins: Die Nettoverzinsung enthält außerordentliche Erträge, die außerordentliche Aufwände wie z.B. den Aufbau einer Zinszusatzreserve und die Beteiligung der Kunden an den Bewertungsreserven finanzieren und deshalb nicht zur Deckung des laufenden Aufwands in Höhe der tariflichen Verzinsung der Deckungsrückstellung zur Verfügung stehen. Damit werden in der Nettoverzinsung Erträge abgebildet, denen keine in der Vergleichsposition mittlerer Rechnungszins berücksichtigten Aufwände entsprechen. In diesem Sinn ist die Zinsmarge „falsch berechnet“.

#### Aufgabe 4

Zu a)

Geben Sie mit den oben eingeführten Notationen eine Formel für den mittleren Rechnungszins  $mz$  an, ohne dabei ggf. bereits gebildete Zinszusatzreserven zu berücksichtigen. (5 Punkte)

Nach Definition ist der mittlere Rechnungszins das gewichtete Mittel der oben definierten sieben Rechnungszinssätze (von denen nach Voraussetzung keiner auf den aktuellen Referenzzinssatz abgesenkt ist), wobei der Anteil der jeweiligen Deckungsrückstellung an der Gesamtdeckungsrückstellung (nach Voraussetzung immer ohne bereits gebildete Zinszusatzreserven) dem jeweiligen Gewicht entspricht. In Formeln heißt das:

$$mz = \sum_{k=1}^7 \frac{DR_k}{DR} \cdot z_k = \sum_{k=1}^7 \alpha_k \cdot z_k .$$

Der mittlere Rechnungszins ist also eine konvexe Kombination der sieben nominalen Rechnungszinssätze mit den Werten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7$  als Gewichten. Offen-

bar gilt deshalb  $\sum_{k=1}^7 \alpha_k = 1$ .

Zu b)

Formen Sie die angegebene Gleichung für den Sicherungsbedarf so um, dass Sie der von Ihrem Chef in der obigen E-Mail verwendeten Formel von der Struktur her entspricht. (10 Punkte)

Durch Einsetzen der linearen Näherung („Durationsnäherung“) für die ZZR der einzelnen Tarifgenerationen ergibt sich zunächst wegen  $0 < 1,5\% < z_k$  für alle  $k = 1, \dots, 7$

$$SichB(1,5\%) = \sum_{k=1}^7 ZZR_k(1,5\%) = \sum_{k=1}^7 (z_k - 1,5\%) \cdot D_k \cdot DR_k$$

Mit der per definitionem geltenden Beziehung  $DR_k = \alpha_k \cdot DR$  ergibt sich durch Einsetzen

$$SichB(1,5\%) = \sum_{k=1}^7 (z_k - 1,5\%) \cdot D_k \cdot \alpha_k \cdot DR = DR \cdot \sum_{k=1}^7 (z_k - 1,5\%) \cdot D_k \cdot \alpha_k$$

und daraus

$$SichB(1,5\%) = DR \cdot \left( \sum_{k=1}^7 D_k \cdot z_k \cdot \alpha_k - 1,5\% \cdot \sum_{k=1}^7 D_k \cdot \alpha_k \right)$$

Wäre  $D_k \equiv D$  für alle  $k = 1, \dots, 7$ , so könnte man ausklammern und es ergäbe sich

$$\begin{aligned} SichB(1,5\%) &= DR \cdot D \cdot \left( \sum_{k=1}^7 z_k \cdot \alpha_k - 1,5\% \cdot \sum_{k=1}^7 \alpha_k \right) = DR \cdot D \cdot (mz - 1,5\%) \\ &= DR \cdot D \cdot (3,0\% - 1,5\%) \end{aligned}$$

wobei die definitionsgemäß geltende Beziehung  $\sum_{k=1}^7 \alpha_k = 1$  benutzt wurde.

In % der gesamten Deckungsrückstellung ergäbe sich also ein Sicherungsbedarf von  $D \cdot (3,0\% - 1,5\%)$ .

Umgekehrt kann man für nicht konstante  $D_k$  die letzte Gleichung als Bestimmungsgleichung für  $D$  auffassen und erhält durch nachfolgende Umformung

$$D = \frac{SichB(1,5\%)}{DR \cdot (mz - 1,5\%)} = \frac{DR \cdot \sum_{k=1}^7 (z_k - 1,5\%) \cdot D_k \cdot \alpha_k}{DR \cdot (mz - 1,5\%)} = \sum_{k=1}^7 \frac{z_k - 1,5\%}{mz - 1,5\%} \cdot \alpha_k \cdot D_k$$

$D$  erweist sich damit als wie angegeben gewichtetes Mittel der modifizierten Durationen  $D_k$ . Mit dem definitionsgemäß so gewählten Wert für  $D$  gilt dann  $SichB(1,5\%) = D \cdot (3,0\% - 1,5\%) \cdot DR$ .

Die von Ihrem Chef intuitiv ohne nachzudenken verwendete Formel ist also eine über den Gesamtbestand aggregierte Durationsnäherung für die einzelnen Tarifgenerationen, die zu dem Ansatz einer in diesem Sinne „durchschnittlichen“ Duration und deren Schätzung führt.

Man beachte dass diese Formel nur für einen Basiszinssatz gilt, der wie die hier getroffene Wahl von 1,5% kleiner als alle sieben Rechnungszinsen ist. Das wird auch offenbar, wenn man z.B. 1,5% durch 3,0% ersetzt: Dann ergibt die Näherungsformel 0, obwohl bereits ZZR für die i.a. im Bestand vorhandenen Rechnungszinssätze oberhalb 3,0% zu bilden ist und der Sicherheitsbedarf deshalb i.a. strikt positiv ist.

Zu c)

Was entspricht dem von Ihrem Chef ad hoc verwendeten Faktor 10 in Ihrer Umformung? Wovon hängt es ab, ob dieser Wert 10 eine mehr oder wenige gute Näherung ist? Wie ist Ihre Einschätzung? (5 Punkte)

Der Faktor 10 entspricht einer über alle Rechnungszinsgenerationen wie angegeben gemittelten „durchschnittlichen“ Duration. Wie im Seminar explizit diskutiert sind modifizierte Durationen von 10 – 12 für die Tarifgeneration der 4%er durchaus typisch für die meisten Bestände. Ob der Wert von 10 dann insgesamt eine gute oder eher eine schlechte Näherung ist hängt davon ab inwieweit die für den Bestand materiell relevanten Rechnungszinsgenerationen in ihrer durchschnittlichen Restlaufzeit (oder modified duration) schwanken. Häufig dürfte der Wert von 10 nicht allzu schlecht sein, obwohl deutliche Abweichungen im Einzelfall immer zu erwarten sind.

Der Faktor 10 ist i.a. auch kein schlechter Schätzer, wenn man die intuitive Formel nicht wie hier ausgehend von der Duration der einzelnen Tarifgenerationen zu begründen versucht, sondern ausgehend von der gesuchten Struktur der Formel direkt die modifizierte Duration des Sicherheitsbedarfs zu schätzen versucht. Dieser direkte Durationsansatz liefert allerdings nicht den durchschnittlichen Rechnungszins von 3,0% als Abzugsterm, denn die Formel Ihres Chefs

ergäbe eine Näherung für die Differenz von  $\text{SichB}(3,0\%)$  und  $\text{SichB}(1,5\%)$ , und  $\text{SichB}(3,0\%)$  ist i.a. wie oben erläutert nicht Null.