

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen)

Klausur vom 20.10.2012

Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben, die mit insgesamt 180 Punkten bewertet werden. Um diese maximale Punktzahl erreichen zu können, müssen alle Aufgaben bearbeitet werden. Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 72 Punkte erforderlich.

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Zugelassenes Hilfsmittel: Taschenrechner

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (45 Punkte)

Bei einer aktienindexgebundenen Lebensversicherung mit Einmalbeitrag EB wird ein fester Prozentsatz $i(p)$ der jährlichen Steigerungen eines Index durch Cliquet-Optionen abgesichert.

Wenn $S(t)$ den Verlauf des betreffenden Index beschreibt, so wird die folgende Ablaufleistung AL für den Kunden bei Ablauf T des Vertrages versprochen:

$$AL = EB \cdot \prod_{t=1}^T \left\{ 1 + i(p) \left(\frac{S(t)}{S(t-1)} - 1 \right)^+ \right\} .$$

Es wird vorausgesetzt, dass $S(t)$ einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt:

$$(*) \quad dS(t) = \mu S(t) dt + \nu S(t) dw(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq T,$$

und dass der Zins wie in dem Black-Scholes-Modell konstant deterministisch ist mit exponentieller Zinsrate r . Der aktuelle Wert der Ablaufleistung AL berechnet sich dann zum heutigen Zeitpunkt $t = 0$ zu

$$\exp(-rT) E^*[AL] ,$$

wobei der Stern am Erwartungswert bedeutet, dass zur Berechnung des Erwartungswertes das äquivalente Martingalmaß, etwa Q benutzt wird.

a) Man berechne mit Hilfe der Black-Scholes-Formel $E^*[AL]$.

(Anleitung: Man beachte, dass nach Übergang zu dem neuen Maß Q $S(t)$ der folgenden stochastischen Differentialgleichung genügt:

$$dS(t) = r S(t) dt + \nu S(t) dw^*(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq T, \quad \text{mit einer } Q\text{- Brownschen Bewegung } w^* \text{ (Elimination des Driftterms).}$$

Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$S(t) = S(0) \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \nu^2 \right) t + \nu w^*(t) \right),$$

damit berechne man die Quotienten $S(t)/S(t-1)$. **(30 Punkte)**

b) Man vergleiche den Wert der obigen indexgebundenen Versicherung mit einer zweiten, bei der neben sonst gleichen Daten die folgende Ablaufleistung versprochen wird:

$$AL = EB \left(1 + i(p) \sum_{t=1}^T \left(\frac{S(t)}{S(t-1)} - 1 \right)^+ \right).$$

Welches der beiden Ablaufversprechen ist aus Sicht des Kunden mehr wert?
Wann gilt Gleichheit für die beiden Ablaufleistungen? **(15 Punkte)**

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Bei einer Versicherung gegen Einmalbeitrag EB wird das nicht für die Deckung des biometrischen Risikos und für die Verwaltungskosten benötigte Kapital EB - K in einen Aktienfonds investiert. Der Preisprozess $\{F_t \mid 0 \leq t \leq T\}$ dieses Fondsbetrages folge einer geometrischen Brownschen Bewegung, d.h. es ist

$$F_t = F_0 \cdot e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \quad \text{mit einem Wienerprozess } W_t.$$

Das Versicherungsunternehmen entscheidet sich für eine endfällige Garantie, das heißt, dem Kunden wird nur zum Ablauftermin T eine Ablaufleistung $AL = (EB - K) \cdot e^{r_G T}$ versprochen mit einem Garantiezins r_G . Bei vorzeitigem Rückkauf orientiert sich der Wert der Auszahlung an den Kapitalmarktverhältnissen.

Man berechne die Wahrscheinlichkeit $P(F_T < (EB - K) \cdot e^{r_G T})$ dafür, dass mit der Fondsanlage die geforderte Ablaufleistung nicht erreicht wird.

Aufgabe 3 (45 Punkte)

Nach dem Urteil des EuGH vom 01.03.2011 müssen Rentenversicherungsverträge, die ab dem 21.12.2012 neu abgeschlossen werden, geschlechtsneutral kalkuliert werden, d.h. „dass der Faktor Geschlecht bei der Berechnung von Prämien und Leistungen im Bereich des Versicherungswesens und verwandter Dienstleistungen nicht zu unterschiedlichen Prämien und Leistungen führen darf.“

Versetzen Sie sich bitte in die Lage, eine Unisex-Sterbetafel für Rentenversicherungen herleiten zu müssen und diskutieren Sie insbesondere die folgenden Gesichtspunkte, auch unter Berücksichtigung pragmatischer Aspekte:

- a) zentrale Anforderungen an die (Unisex-)Tafel(n) **(7 Punkte)**
- b) denkbare Reservierungsansätze (drei neue Möglichkeiten; kurze Diskussion; die im Seminar angesprochene vierte Variante „Wie bisher“ wird nicht hier, sondern ausführlich in Aufgabe 5 diskutiert) **(14 Punkte)**
- c) Einflussfaktoren auf den Geschlechtsmix (= Mischungsverhältnis von Männern und Frauen). **(14 Punkte)**
- d) Machen Sie abschließend einen Vorschlag, wie sich (nach Rentenbeginn) die Sterblichkeiten q_x einer Unisexbasistafel 1. Ordnung aus den Werten q_x^M und q_x^F entsprechender Basistafeln 1. Ordnung für Männer und Frauen ableiten lassen. Gehen Sie bitte auch kurz auf ggf. erforderliche neue Sicherheitszuschläge ein. **(10 Punkte)**

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Herr und Frau Krause werden als Ehepaar zusammen veranlagt. Beide Ehegatten sind als Angestellte beschäftigt, die rentenversicherungspflichtigen Einnahmen von Herrn Krause haben in 2011 40.000 € betragen, diejenigen von Frau Krause lagen bei 15.000 €. Im Jahr 2012 seien die Einnahmen jeweils um 3 % gestiegen. Das Ehepaar hat zwei Kinder (geboren 1989 und 1992), von denen eines gerade mit dem Studium begonnen hat und das andere nach Abschluss seiner Ausbildung als Kfz-Mechaniker arbeitet.

Jeder der beiden Ehegatten hat einen eigenen Riester-Vertrag abgeschlossen. Herr Krause habe in 2011 einen Altersvorsorgebeitrag von 600 € bezahlt, im Jahr 2012 werden es 700 € sein; seine Frau habe in beiden Jahren 250 € aufgewendet.

Berechnen Sie den Zulagenanspruch der Ehegatten für 2012.

Aufgabe 5 Unisex – Reservierung „Wie bisher“ (45 Punkte)

Sie arbeiten als Aktuar bei einem deutschen Lebensversicherer und unterstützen dessen Verantwortlichen Aktuar bei der Festlegung von Vorgaben zur Reservierung.

Es ist Herbst 2012, die Umstellung auf die Unisex – Kalkulation und eine dementsprechende Reservierung steht Ende Dezember 2012 bevor. Sie werden beauftragt, sich Gedanken über mögliche Reservierungsansätze zu machen und analysieren deshalb den entsprechenden Hinweis der DAV in seiner ersten Entwurfsfassung. Dort lesen Sie unter anderem:

„Ohne auf das Verhältnis der Kalkulationsgrundlagen für die Reservierung zu den bei Prämien- und Leistungsberechnung verwendeten Tafelwerken an dieser Stelle einzugehen, werden im Folgenden vier grundsätzliche Möglichkeiten einer Reservierung vor dem Hintergrund der Unisex-Thematik beschrieben. ...

2.4 „Wie bisher“

Die sich aus dem EuGH-Urteil ergebenden Erfordernisse beziehen sich originär zunächst einmal auf die geschlechtsunabhängige Kalkulation von Prämien und Leistungen. Grundsätzlich bestünde damit auch die Möglichkeit, im Rahmen der Reservierung wie heute zu verfahren und die bisherigen geschlechtsdifferenzierten Tafeln 1:1 in Ansatz zu bringen. ...

3.4 „Wie bisher“

Obwohl die Beibehaltung der bisherigen Reservierungsgrundlagen zunächst sehr nahe zu liegen scheint, erscheint dieser Weg schwer gangbar. Diese Reservierungsgrundlage kann aufgrund des EuGH-Urteils nicht Grundlage der Prämien- und Leistungsberechnung sein. ... Doch die durch Realisations- und Imparitätsprinzip, zusammen mit dem Einzelbewertungsgrundsatz bewirkten Konsequenzen machen dies praktisch unmöglich. Außerdem führen die in der Vorbemerkung angesprochenen Vorschriften des § 169 VVG in Verbindung mit § 25 Abs. 2 RechVersV dazu, dass ... „,

Sie haben zunächst durchaus Interesse, an der Reservierung möglichst wenig zu ändern, und analysieren deshalb die Variante „Wie bisher“ genauer, um sie im Detail zu verstehen und zu erkennen, warum Skepsis angebracht sein könnte.

In diesem Zusammenhang stellen Sie sich folgende Detailfragen zur Variante „*Wie bisher*“, deren Antwort Sie zur Information Ihrer Kollegen schriftlich festhalten:

- a) Was sagen das Realisations- und Imparitätsprinzip aus? Bitte erläutern Sie beide Prinzipien; jeweils ein bis zwei aussagekräftige Sätze reichen aus. **(4 Punkte)**
- b) Wie unterscheiden sich bei der Variante „*Wie bisher*“ die Rechnungsgrundlagen für die Prämien- und Leistungsberechnung einerseits und die Berechnung der handelsrechtlichen Deckungsrückstellung andererseits? Gehen Sie bitte auf die im Seminar erläuterten drei Standard-Rechnungsgrundlagen ein; jeweils ein aussagekräftiger Satz genügt als Antwort. **(3 Punkte)**

Im Folgenden bezeichne auf Ebene der gezillmerten Nettoprämien

- TP die Tarifprämie für 1 Euro Leistung,
- NP die Normprämie für 1 Euro Leistung sowie
- RP die Reserveprämie für 1 Euro Leistung, die definitionsgemäß bei der Berechnung der Deckungsrückstellung angesetzt wird.

Kennzeichnen Sie für die Tarifprämie TP mit dem dritten Buchstaben, ob Männer-, Frauen-, Geschlechtsspezifische oder Unisex – Grundlagen verwendet werden: TPU bezeichnet also z.B. die Tarifprämie nach der Unisextafel, TPG die Tarifprämie nach der nicht näher spezifizierten Männer- oder Frauentafel, TPF (TPM) die Tarifprämie nach der Frauentafel (Männertafel).

- c) Sie verwenden für die Unisexkalkulation nicht einfach die Rechnungsgrundlagen für eines der Geschlechter (für Männer oder für Frauen), sondern eine echte Mischung aus beiden möglichen Wahlen. In welcher Relation stehen dann TPM, TPF und TPU, wenn die Versicherung Todesfall- bzw. Erlebensfallcharakter hat? Als Antwort reicht jeweils eine Ungleichung. **(2 Punkte)**

Für den Rest dieser Aufgabe unterstellen wir der Einfachheit halber stets, dass die Versicherung Erlebensfallcharakter hat.

- d) Wie berechnet sich unter Beachtung des Realisations- und Imparitätsprinzips bei der Variante „*Wie bisher*“ die Reserveprämie jeweils für den Fall eines Mannes und einer Frau? **(6 Punkte)**
- e) Wie sieht bei der Variante „*Wie bisher*“ die generische Formel für die Berechnung der Deckungsrückstellung einer prämienpflichtigen Versicherung

gegen laufende Prämienzahlung mit Erlebensfallcharakter jeweils für den Fall eines Mannes und einer Frau aus? Berücksichtigen Sie bitte in Ihrer Antwort im ersten Schritt zunächst nur die Konsequenzen des Realisations- und Imparitätsprinzips und machen jeweils deutlich, ob die Deckungsrückstellung gegenüber bisher unverändert bleibt oder steigt bzw. fällt. **(16 Punkte)**

Gehen Sie dann im abschließenden zweiten Schritt auf die Rechnungsgrundlagen für den Rückkaufswert und die Auswirkungen von § 25 RechVersV (Vergleich mit dem Rückkaufswert) ein (verbale Erläuterung; Formel ist nicht erforderlich). **(4 Punkte)**

f) Nach welchen Rechnungsgrundlagen richtet sich die Überschussbeteiligung? Insbesondere: Welche Tarifprämie geht ein in die Berechnung des Zinsträgers für die Zinsüberschussbeteiligung? (Jeweils ein aussagekräftiger Satz mit Begründung reicht als Antwort). **(4 Punkte)**

g) Im Entwurf des DAV – Hinweises lesen Sie folgenden Satz: *„Auf teilkollektiver oder gegebenenfalls verdichteter Basis wird die Deckungsrückstellung mit geschlechtsabhängigen Tafeln berechnet (ohne Anwendung des Realisationsprinzips) ...“*.

Welche Reserveprämie soll hier in Folge der Vorgabe *„ohne Anwendung des Realisationsprinzips“* angesetzt werden?

Wie sieht damit die generische Formel zur Berechnung dieses speziellen Deckungskapitals aus? **(6 Punkte)**

Aufgabe 6 Reservierung einer Abschnittsgarantie (15 Punkte)

Sie arbeiten immer noch als Aktuar bei einem deutschen Lebensversicherer und unterstützen dessen Verantwortlichen Aktuar bei der Festlegung von Vorgaben zur Reservierung.

Aus der Abteilung Produktentwicklung erhalten Sie folgende E-Mail von einem befreundeten Kollegen:

„Wir untersuchen wegen einiger Presseveröffentlichungen gerade für unseren Vorstand mögliche Produkte mit Abschnittsgarantie, d.h. in den ersten s Jahren soll bei der Prämien- und Leistungskalkulation ein Rechnungszins $i > 0$ garantiert werden und danach bis zum Ablauf nur ein Rechnungszins von Null. Gemeint ist hier eine neuartige Abschnittsgarantie für alle Versicherungen, nicht die Ausnahmeregelung der DeckRV für kurzlaufende Einmalprämien- und fällige Rentenversicherungen.

Das Produktmanagement hat uns sehr deutlich erklärt, diese Produkte seien unverkäuflich, weil die garantierten Leistungen zu klein seien und gegenüber heutigen Tarifen zu stark absinken.

Ich habe deshalb jetzt mal ausprobiert, ob man nicht den anfänglichen Rechnungszins i so anheben kann, dass sich bei einem Mustervertrag genau die gleiche garantierte Leistung ergibt wie beim durchgängigen Ansatz von 1,75% für alle Jahre. Das geht im Beispiel tatsächlich: Wenn ich in den ersten s Jahren $i = 3,3\%$ wähle und danach in den letzten Jahren auf 0% heruntergehe, kommen in meinem Standardbeispiel die gleiche gezillmerte Nettoprämie und die gleiche Leistung heraus wie wenn ich in allen Jahren 1,75% ansetze. Ob man derzeit überhaupt einen Ertrag von 3,3% erzielen kann, brauchst du dir nicht zu überlegen – ich habe unsere Kapitalanleger mal gebeten, dies zu prüfen.

Das Produktmanagement findet das Ganze klasse – aber was meinst du? Wie reserviert man eigentlich einen solchen Vertrag nach heutigem Recht?“

Bitte antworten Sie Ihrem Kollegen. (15 Punkte)

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

zu a) :

Da die Zufallsvariablen $S(t)/S(t-1)$ unabhängig und gleichverteilt sind für $t = 1, 2, \dots, T$, ist

$$\exp(-rT) E^* \left[EB \cdot \prod_{t=1}^T \left\{ 1 + i(p) \left(\frac{S(t)}{S(t-1)} - 1 \right)^+ \right\} \right] =$$

$$EB \cdot \prod_{t=1}^T \left\{ e^{-r} + i(p) E^* \left[e^{-r} \left(\frac{S(t)}{S(t-1)} - 1 \right)^+ \right] \right\}.$$

Nun ist $E^* \left[e^{-r} \left(\frac{S(t)}{S(t-1)} - 1 \right)^+ \right] = \exp(-r) E^* \left[\left(\exp\left(r - \frac{1}{2}v^2\right) + v w^*(1) \right) - 1 \right]^+$

gerade der Black-Scholes-Preis $C(1,1)$ einer Europäischen Call Option mit Ausübungszeitpunkt 1, Ausübungspreis 1 und momentanem Preis 1 des zugrunde liegenden Basispapiers. Damit folgt dann:

$$\exp(-rT) E^*[AL] = EB \cdot \{e^{-r} + i(p)C(1,1)\}^T$$

Wenn man will, kann man hier auch noch die explizite Black-Scholes-Formel für $C(1,1)$ einsetzen.

zu b):

Für nichtnegative reelle Zahlen x_i gilt offenbar

$$1 + \sum_{i=1}^n x_i \leq \prod_{i=1}^n (1 + x_i) = 1 + \sum_{i=1}^n x_i + \text{Terme höherer Ordnung in den } x_i, \quad ,$$

und daher ist das Ablaufversprechen der nach a) gestalteten Indexgebundenen Versicherung sicher mehr wert als das der Versicherung nach Typ b), und die Gleichheit gilt nur, wenn alle x_i bis auf eines verschwinden.

Aufgabe 2

Es geht um die Wahrscheinlichkeit $P(F_T < (EB - K) \cdot e^{r_G T})$ im Fall einer geometrischen Brownschen Bewegung für den Preisprozess des Aktienfonds.

Wegen $F_t = F_0 \cdot e^{(\mu - \frac{v^2}{2})t + vW_t}$ und $AL = (EB - K) \cdot e^{r_G T}$ ist dann

$$\begin{aligned} & P(F_T < (EB - K) \cdot e^{r_G T}) \\ &= P(\exp((\mu - \frac{v^2}{2})T + v \cdot W_T) < \frac{AL}{F_0}) = P(W_T < (\log(\frac{AL}{F_0}) - (\mu - \frac{v^2}{2})T) / v) \\ &= N\left(\frac{\log(AL) - \log(F_0) - (\mu - \frac{v^2}{2})T}{v \cdot \sqrt{T}}\right) \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $N(\cdot)$ die Standardnormalverteilung. Für konkrete Werte der eingehenden Parameter lässt sich damit von $P(F_T < (EB - K) \cdot e^{r_G T})$ explizit berechnen.

Bei dem letzten Übergang beachte man, dass W_T normalverteilt ist mit Mittelwert 0 und Varianz T .

Aufgabe 3:

zu a)

zentrale Anforderungen:

- hinreichende Sicherheitszuschläge für die Bildung ausreichend hoher (aber nicht überhöhter) Deckungsrückstellungen in jedem Teilbestand
- Eignung für die Beitragskalkulation
- Wettbewerbsfähigkeit

zu b)

denkbare Reservierungsansätze:

1. Aggregattafel

Die bisher getrennten Herleitungsbestände von Männern und Frauen werden zusammengefügt, aus diesem aggregierten Bestand werden „Uni-sex“-Rechnungsgrundlagen hergeleitet.

Anmerkungen:

- Das Mischungsverhältnis bleibt implizit ein Teil der Rechnungsgrundlage Biometrie, so dass neue Sicherheitszuschläge erforderlich werden, die dazu führen, dass die Deckungsrückstellungen auf Aggregatbasis im Vergleich zu den Deckungsrückstellungen auf der Grundlage der bisherigen Rechnungsgrundlagen auch bei gleichem Mix steigen werden.
- Übertragung der ermittelten Unisex-Rechnungsgrundlagen auf einzelne Tarife oder Teilbestände nicht problemlos möglich
- Aus methodischen und zeitlichen Gründen werden unternehmensübergreifende Aggregattafeln nicht rechtzeitig bis zum 21.12.2012 vorliegen, die unternehmensindividuellen Bestände werden in der Regel zu klein sein, um signifikante Tafelwerke abzuleiten.

2. Unternehmensindividuelle Mischungsverhältnisse

Ausgangspunkt für die (Erst-) Bewertung in einem zu bewertenden Teilbestand sind getrennte Sterbetafeln für Männer und Frauen und das aktuariell als sinnvoll erachtete Mischungsverhältnis der Geschlechter im Neugeschäft. Dabei ist zwischen Teilbeständen zu differenzieren.

Anmerkungen:

- Der Herleitungsaufwand wird geringer, da die bestehenden DAV-Tafeln als Basis herangezogen werden können.
- Das Mischungsverhältnis wird ein unmittelbarer Bestandteil der Rechnungsgrundlage Biometrie.
- Sicherheitsmargen für den Geschlechtsmix im Neugeschäft werden erforderlich.

3. „Vorsichtige Seite“

Für die Reservierung wird die heutige Männer- oder Frauentafel genutzt, je nachdem, welche gerade bezogen auf den Tarif die größere Sicherheit bietet. Im Bereich der Rentenversicherung wäre dies durchweg die Frauentafel.

Anmerkungen:

- Die Reservierung ist immer ausreichend.
- Die Beiträge werden bei vorgegebener Leistung zumindest für ein Geschlecht im Regelfall höher ausfallen als bei den Wettbewerbern.

4. „Wie bisher“

Vgl. Hinweis in der Aufgabenstellung

Zu c)

Einflussfaktoren auf den Geschlechtsmix:

- Gewichtungsfaktoren für die Bestandszusammensetzung (sinnvoll sind volumengewichtete Mischungsverhältnisse, wie z.B. Leistungs- oder Beitragssummengewichtung)
- Zusammensetzung des Neuzugangs (Anhaltspunkt: Zusammensetzung des Neuzugangs der letzten 3-5 Jahre, der Geschlechtsmix im Bestand kann nur Anhaltspunkte geben)
- Künftige Änderungen im Neuzugang (z.B. Änderungen aus dem gesellschaftlichen Umfeld, der gesetzlichen Rahmenbedingungen, der steuerlichen Rahmenbedingungen, der Unternehmensstrategie, der Zusammensetzung des Neuzugangs etc.)
- Kurzfristige Selektionseffekte im Zusammenhang mit der Einführung der neuen Tarife
- Produktgestaltung (eher auf Männer oder auf Frauen als Zielgruppe abgestellt)
- Berücksichtigung von Vertriebswegespezifika in der Geschlechterverteilung des Neuzugangs
- Änderung der Geschlechterverteilung durch das Versicherungsverhalten (Storno/Rückkauf/ Beitragsfreistellung, Erhöhungsoptionen/Dynamiken, Zuzahlungen, Ausübung des Kapitalwahlrechts); relevant vor allem in der Aufschubzeit
- Einfluss durch natürliche Entmischung: Der anfängliche Geschlechtermix ändert sich auch aufgrund der zu erwartenden unterschiedlichen Sterblichkeit von Männern und Frauen im jeweiligen Kollektiv; insbesondere reduziert sich der Männeranteil aufgrund der höheren Sterblichkeit. Insbesondere bei Tafeln, die bei lebenslangen Versicherungen zum Einsatz kommen, ist dieser Einfluss wesentlich und damit gezielt zu untersuchen.

Zu d)

Sterblichkeiten einer Unisexbasistafel 1. Ordnung im Rentenbezug

Vorschlag für die Bestimmung von q_x^{Unisex} für $x \geq 60$:

Geht man im Alter 60 von einem (evtl. normierten) Anfangsbestand $I_{60}^M + I_{60}^F$ aus mit dem für dieses Alter gefundenen Mischungsverhältnis (unter Berücksichtigung der Entwicklungen der Aufschubzeit) und unterstellt man, dass sich Männer- und Frauenteilbestände jeweils mit den geschlechtsspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten aus geeigneten Basissterbetafeln 1. Ordnung abbauen (z.B. DAV 2004 RM/RF), so könnte ein Ansatz lauten:

$$q_x^{\text{Unisex}} = 1 - \frac{l_{x+1}^M + l_{x+1}^F}{l_x^M + l_x^F} = \frac{l_x^M}{l_x^M + l_x^F} \cdot q_x^M + \frac{l_x^F}{l_x^M + l_x^F} \cdot q_x^F,$$

woraus auch deutlich wird, dass der Einfluss der Männersterblichkeit auf die Unisex- Sterblichkeit mit wachsendem Alter zurückgeht.

Hinweis auf eventuell erforderliche zusätzliche Sicherheitszuschläge: Der anfängliche Geschlechtsmix im Alter 60 kann durch das Versicherungsnehmerverhalten in der Aufschubzeit ungünstiger ausfallen (vgl. Lösung zu c) als geplant; der Trend zur Sterblichkeitsverbesserung könnte sich vor allem ab dem Alter 60 bei Frauen relativ stärker auswirken als bei Männern.

zu Aufgabe 4

Maßgeblich sind im Weiteren die Einnahmen von 2011 und die Altersvorsorgebeiträge von 2012.

Mindesteigenbeitrag für Herrn A

Bruttoeinkommen 2011	=	40.000 €	
davon 4 %:	=	1.600 €	(max. 2.100 €)
abzgl. Grundzulage	∕	154 €	
Mindesteigenbeitrag	=	<u>1.446 €</u>	

Herr A zahlt also nicht den vollständigen Mindesteigenbeitrag.

Mindesteigenbeitrag für Frau B

Bruttoeinkommen 2011	=	15.000 €	
davon 4 %:	=	600 €	(max. 2.100 €)
abzgl. Grundzulage	∕	154 €	
abzgl. Kinderzulagen	∕	1×185 €	
Mindesteigenbeitrag	=	<u>261 €</u>	

Hierbei sei erwähnt, dass nur das studierende Kind noch kindergeldberechtigt ist. Frau B unterschreitet also ebenfalls den erforderlichen Mindesteigenbeitrag.

Zulagenanspruch von Herrn A und Frau B:

$$\frac{700}{1446} \cdot 154 + \frac{250}{261} \cdot (154 + 185) = 74,55 + 324,71 = 399,26.$$

zu Aufgabe 5 (Unisex – Reservierung „wie bisher“)

zu a)

Was sagen das Realisations- und Imparitätsprinzip aus? Bitte erläutern Sie beide Prinzipien; jeweils ein bis zwei aussagekräftige Sätze reichen aus. (**4 Punkte**)

Das *Realisationsprinzip* besagt, dass sämtliche Gewinne aus der laufenden Geschäftstätigkeit periodengerecht zu bilanzieren sind und immer erst dann bilanziert werden dürfen, wenn sie auch tatsächlich realisiert wurden. Die bloße Annahme eines zukünftigen Ertrages, sei er auch noch so sicher, ist deshalb als Anlass der Aufnahme in die Bilanz nicht ausreichend, sondern allein die finale Realisierung dieses Ertrags,

Das Imparitätsprinzip schränkt das Realisationsprinzip durch die Verpflichtung zum Ausweis unrealisierter Verluste ein. Damit werden unrealisierte Gewinne und unrealisierte Verluste ungleich („imparitatisch“) behandelt: Vorhersehbare Verluste müssen sofort ausgewiesen werden, sobald diese auch nur annähernd vermutet werden; unrealisierte Gewinne dürfen nicht sofort ausgewiesen werden, sondern erst nach erfolgter finaler Realisierung.

zu b)

Wie unterscheiden sich bei der Variante „*Wie bisher*“ die Rechnungsgrundlagen für die Prämien- und Leistungsberechnung einerseits und die Berechnung der handelsrechtlichen Deckungsrückstellung andererseits? Gehen Sie bitte auf die im Seminar erläuterten drei Standard-Rechnungsgrundlagen ein; jeweils ein aussagekräftiger Satz genügt als Antwort. (**3 Punkte**)

Es gibt keinen aus der Aufgabenstellung ersichtlichen Grund, warum ein unterschiedlicher Rechnungszins für die Prämien- und Leistungsberechnung einerseits und die Berechnung der handelsrechtlichen Deckungsrückstellung andererseits angesetzt werden sollte; deshalb wird der Rechnungszins für beide Zwecke gleich gewählt.

Es gibt ebenso keinen aus der Aufgabenstellung ersichtlichen zusätzlichen Grund, warum unterschiedliche Kostensätze für die Prämien- und Leistungsberechnung einerseits und die Berechnung der handelsrechtlichen Deckungsrückstellung andererseits angesetzt werden sollte; deshalb werden die Kostensätze grundsätzlich für beide Zwecke gleich gewählt, d.h. sie unterscheiden sich nur

dort, wo z.B. auf Grund gesetzlicher Vorgaben die gleichen Unterschiede bereits vor dem Übergang auf eine Unisex – Kalkulation bestanden.

Als biometrische Rechnungsgrundlage wird der Prämien- und Leistungsberechnung ein Unisex – Tafelwerk zu Grunde gelegt, während der Berechnung der handelsrechtlichen Deckungsrückstellung gemäß Aufgabenstellung die bisherigen geschlechtsspezifischen Tafelwerke zu Grunde gelegt werden.

Die Rechnungsgrundlagen für die Prämien- und Leistungsberechnung einerseits und die Berechnung der handelsrechtlichen Deckungsrückstellung andererseits unterscheiden sich also grundsätzlich nur im verwendeten Tafelwerk, das einerseits Unisex und andererseits wie bisher geschlechtsspezifisch gewählt wird.

zu c)

Sie verwenden für die Unisexkalkulation nicht einfach die Rechnungsgrundlagen für eines der Geschlechter (für Männer oder für Frauen), sondern eine echte Mischung aus beiden möglichen Wahlen. In welcher Relation stehen dann TPM, TPF und TPU, wenn die Versicherung Todesfall- bzw. Erlebensfallcharakter hat? Als Antwort reicht jeweils eine Ungleichung. (2 Punkte)

Wenn die Versicherung Todesfallcharakter (Erlebensfallcharakter) hat, sinken (steigen) die Beiträge mit sinkenden Sterbewahrscheinlichkeiten; deshalb ist $TPF < TPM$ ($TPM < TPF$). Da die Unisexprämie nach Voraussetzung eine strikt konvexe Mischung beider Tarifprämien ist, folgt $TPF < TPU < TPM$ ($TPM < TPU < TPF$).

zu d)

Wie berechnet sich unter Beachtung des Realisations- und Imparitätsprinzips bei der Variante „Wie bisher“ die Reserveprämie jeweils für den Fall eines Mannes und einer Frau? (6 Punkte)

Die Tarifprämie TP wird nach den Rechnungsgrundlagen für die Prämien- und Leistungsberechnung ermittelt; daher wird stets $TP = TPU$ mit der hierfür festgelegten Unisex – Tafel gerechnet. Bei der Variante „Wie bisher“ wird die definitionsgemäß nach den Rechnungsgrundlagen für die handelsrechtliche Deckungsrückstellung berechnete Normprämie weiterhin mit den auch bisher hierfür festgelegten tarifspezifischen Tafeln gerechnet, d.h. es ist $NP = TPG$.

Wie im Spezialwissenseminar erläutert führen das Realisations- und Imparitätsprinzip zu der Formel für die Reserveprämie

$$RP = \text{Min} (TP, NP) = \text{Min} (TPU, TPG).$$

Für den Fall eines Mannes ist damit wegen der aus dem unterstellten Erlebensfallcharakter folgenden Ungleichung $TPM < TPU < TPF$ offenbar

$$RP = \text{Min} (TP, NP) = \text{Min} (TPU, TPM) = TPM,$$

während für den Fall einer Frau auf Grund derselben Ungleichung gilt

$$RP = \text{Min} (TP, NP) = \text{Min} (TPU, TPF) = TPU.$$

Damit stimmen für Frauen die Tarif- und Reserveprämie überein und sind beide nach Unisex-Grundlagen gerechnet, während für Männer die Deckungsrückstellung mit der im Vergleich zur Unisexprämie kleineren Männerprämie gerechnet wird.

zu e)

Wie sieht bei der Variante „*Wie bisher*“ die generische Formel für die Berechnung der Deckungsrückstellung einer prämienpflichtigen Versicherung gegen laufende Prämienzahlung mit Erlebensfallcharakter jeweils für den Fall eines Mannes und einer Frau aus?

Berücksichtigen Sie bitte in Ihrer Antwort im ersten Schritt zunächst nur die Konsequenzen des Realisations- und Imparitätsprinzips und machen jeweils deutlich, ob die Deckungsrückstellung gegenüber bisher unverändert bleibt oder steigt bzw. fällt. **(16 Punkte)**

Gehen Sie dann im abschließenden zweiten Schritt auf die Rechnungsgrundlagen für den Rückkaufswert und die Auswirkungen von § 25 RechVersV (Vergleich mit dem Rückkaufswert) ein (verbale Erläuterung; Formel ist nicht erforderlich). **(4 Punkte)**

Im ersten Schritt folgt zunächst allgemein

$$DR = \frac{\text{(Leistung in Euro)} * \text{(Leistungsbarwert für 1 Euro Leistung)}}{\text{(Reserveprämie in Euro)} * \text{(Beitragszahlungsbarwert für 1 € Beitrag)}}$$

und dann mit der Reserveprämie aus b) für Frauen

$$DR = \frac{\text{(Leistung in Euro)} * \text{(Leistungsbarwert für 1 Euro Leistung)}}{\text{(TPU in Euro)} * \text{(Beitragszahlungsbarwert für 1 Euro Beitrag)}}$$

wobei beide Barwerte wie bisher mit der Frauentafel zu rechnen sind, so dass im Endergebnis offenbar nur die Frauenprämie gegen die kleinere Unisex-Prämie als Reserveprämie auszutauschen ist, so dass die Deckungsrückstellung für Frauen gegenüber bisher in diesem Schritt steigt.

Entsprechend ergibt sich für Männer

$$DR = \frac{\text{(Leistung in Euro)} * \text{(Leistungsbarwert für 1 Euro Leistung)}}{\text{(TPM in Euro)} * \text{(Beitragszahlungsbarwert für 1 Euro Beitrag)}}$$

wobei beide Barwerte wie bisher mit der Männertafel zu rechnen sind, so dass im Endergebnis die Deckungsrückstellung für Männer gegenüber bisher unverändert bleibt.

Im abschließenden zweiten Schritt wird die Deckungsrückstellung nach § 25 RechVersV mit dem gemäß § 169 VVG garantierten Rückkaufswert maximiert. Dabei basiert der Rückkaufswert auf einem Deckungskapital nach Prämiengrundlagen, das für beide Geschlechter einheitlich mit der Unisex-Tarifprämie als Reserveprämie und Unisex-Rechnungsgrundlagen für Leistungs- und Beitragszahlungsbarwert gerechnet wird.

zu f)

Nach welchen Rechnungsgrundlagen richtet sich die Überschussbeteiligung? Insbesondere: Welche Tarifprämie geht ein in die Berechnung des Zinsträgers für die Zinsüberschussbeteiligung? (Jeweils ein aussagekräftiger Satz mit Begründung reicht als Antwort). **(4 Punkte)**

Die Überschussbeteiligung ist Teil der Leistungsberechnung und erfolgt deshalb nach den für die Prämien- und Leistungsberechnung festgelegten Unisex-Rechnungsgrundlagen. Insbesondere ist die Berechnung des Zinsträgers für die Zinsüberschussbeteiligung Teil der Leistungsberechnung, so dass die Unisex-Tarifprämie in die Berechnung eingeht.

zu g)

Im Entwurf des DAV – Hinweises lesen Sie folgenden Satz: „Auf teilkollektiver oder gegebenenfalls verdichteter Basis wird die Deckungsrückstellung mit geschlechtsabhängigen Tafeln berechnet (ohne Anwendung des Realisationsprinzips) ...“.

Welche Reserveprämie soll hier in Folge der Vorgabe „ohne Anwendung des Realisationsprinzips“ angesetzt werden?

Wie sieht damit die generische Formel zur Berechnung dieses speziellen Deckungskapitals aus? **(6 Punkte)**

Die Vorgabe geschlechtsabhängige Tafeln zu verwenden wird durch die Formulierung in Klammern ausdrücklich auch auf die Reserveprämie erstreckt (deren Modifikation in Folge des Realisationsprinzips explizit nicht angesetzt wird). Damit sieht die generische Formel zur Berechnung dieses speziellen Deckungskapitals wie folgt aus:

$$\text{DR} = \begin{array}{l} \text{(Leistung in Euro)} \\ - \text{(TPG in Euro)} \end{array} \begin{array}{l} * \text{(Leistungsbarwert für 1 Euro Leistung)} \\ * \text{(Beitragszahlungsbarwert für 1 € Beitrag)} \end{array}$$

wobei beide Barwerte wie bisher mit der geschlechtsspezifischen Tafel zu rechnen sind.

zu Aufgabe 6 Reservierung einer Abschnittsgarantie

Sowohl ein abschnittsweise definierter Zins als auch ein Zins oberhalb des Höchstrechnungszinses für die Deckungsrückstellung sind für den Zweck der Beitragskalkulation grundsätzlich zulässig, wobei die Frage der zulässigen Höhe gemäß Aufgabenstellung nicht zu klären ist.

Das Realisations- und Imparitätsprinzip führen zunächst im ersten Schritt zu der Vorgabe

$$\text{RP} = \text{Min}(\text{TP}, \text{NP})$$

für die Reserveprämie, wobei TP mit den abschnittsweise definierten Zinsen von zunächst 3,3% und dann 0% berechnet wird und NP durchgehend mit 1,75% gerechnet ist.

Da laut Aufgabenstellung im Standardbeispiel gerade $TP = NP$ gilt, verändert sich die Reserveprämie und dementsprechend auch die Deckungsrückstellung im ersten Schritt nicht, d.h. beide entsprechen unverändert der Ausgangssituation einer durchgängigen Kalkulation mit 1,75%.

Abschließend ist die Deckungsrückstellung ggf. auf den garantierten Rückkaufswert anzuheben. Der Rückkaufswert wird nach Prämiengrundlagen und demzufolge in den ersten s Jahren mit dem auf 3,3% erhöhten und danach auf 0% abgesenkten Prämienzins gerechnet. Ohne Berücksichtigung etwaiger Stornoabschläge und ohne Berücksichtigung von Spezialfällen wie etwa Rentenversicherungen ohne Rückkaufswert oder mit auf die Todesfalleistung begrenztem Rückkaufswert steigt der als Deckungskapital nach Prämiengrundlagen berechnete Rückkaufswert damit in den ersten s Jahren deutlich stärker an als bisher, um dann in den Folgejahren zwar langsamer als bisher anzusteigen, aber immer noch oberhalb der bisherigen Werte zu liegen. Ohne Berücksichtigung etwaiger Stornoabschläge und ohne Berücksichtigung der genannten Spezialfälle ist die Deckungsrückstellung damit deutlich anzuheben. Da angemessene Stornoabschläge i.a. relativ gering ausfallen, dürfte die Berücksichtigung von Stornoabschlägen diesen Effekt kaum wesentlich verändern.

Gegenüber bisher dürfte die Reservierung also in vielen Fällen deutlich höher und damit „teurer“ als bisher ausfallen.