DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen)

Klausur vom 22.10.2011

Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben, die mit insgesamt 180 Punkten bewertet werden. Um diese maximale Punktzahl erreichen zu können, müssen alle Aufgaben bearbeitet werden. Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 72 Punkte erforderlich.

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Zugelassenes Hilfsmittel: Taschenrechner

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (40 Punkte)

Sie sind Aktuar(in) eines mittelgroßen Lebensversicherungsunternehmens. Neben anderen Produkten bietet Ihr Unternehmen auch die Berufsunfähigkeitsversicherung an, bisher allerdings nur genau einen Tarif. Die Rechnungsgrundlagen für die Kalkulation und Reservierung seien (selbstverständlich) ausreichend vorsichtig gewählt.

Der Vorstand hat nun die Entscheidung getroffen, weitere BU-Tarife in das Angebot aufzunehmen, und die zuständigen Stellen im Unternehmen um Vorschläge für die Produktgestaltung gebeten. Eine Reihe der Vorschläge für Produktvariationen landet auf Ihrem Schreibtisch, da sie sich auf die Rechnungsgrundlagen auswirken könnten.

Erläutern Sie also für jeden der Fälle a) – d) die zu erwartenden Auswirkungen und machen Sie gegebenenfalls Vorschläge, durch welche Anpassung der bislang verwendeten Rechnungsgrundlagen das bisherige Sicherheitsniveau aufrecht erhalten werden kann.

a) Einführung einer Option: Bei Heirat bis zum Alter 50 kann die versicherte BU-Rente ohne erneute Gesundheitsprüfung verdoppelt werden.
b) Leistungsverbesserung im Fall der Reaktivierung: Nach der Reaktivierung wird die laufende Berufsunfähigkeitsrente noch für 6 Monate weitergezahlt. Machen Sie in diesem Fall auch einen Vorschlag, wie sich der Barwert der laufenden Invalidenrente durch die Leistungsverbesserung ändern würde.
c) Lebenslängliche Rentenzahlung: Alternativ zu der bislang maximal möglichen Rentenlaufzeit bis zum Alter 65 kann zukünftig auch eine lebenslängliche Zahlung der Berufsunfähigkeitsrente vereinbart werden.
d) Einführung einer Todesfallleistung: Auszahlung des vorhandenen Deckungskapitals zur Hinterbliebenenversorgung bei Tod des Invaliden; bei Tod im Zustand der Aktivität soll keine Leistung fällig werden.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Ein lediger Selbständiger leiste im Jahr 2011 folgende Aufwendungen für seine Zukunftssicherung:

Lebensversicherung (Vertragsabschluss 1999):	3.600 €
Private Krankenversicherung:	5.100 €
(davon Basisversorgung 84,3 %)	
Pflegeversicherung (Basisversorgung)	965 €
Haftpflichtversicherungen:	940 €
Basisrente:	2.000 €

Welchen Betrag kann er in der Einkommensteuererklärung für 2011 steuerlich geltend machen unter Einbeziehung der Günstigerprüfung?
(Hinweis: In 2004 betrug der Grundhöchstbetrag für einen Ledigen 1334 €, der maximale Vorwegabzug kann in 2011 noch mit 2700 € angesetzt werden.)

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Bei einer Versicherung gegen Einmalbeitrag EB wird das nicht für die Deckung des biometrischen Risikos und für die Verwaltungskosten benötigte Kapital EB-Ko in einen Aktienfonds investiert. Der Preisprozess $\{F_t | 0 \leq t \leq T\}$ dieses Fondsbetrages folge einer geometrischen Brownschen Bewegung.

Das Versicherungsunternehmen A entscheidet sich für eine endfällige Garantie, das heißt, dem Kunden wird nur zum Ablauftermin T eine Ablaufleistung (EB-Ko)$\cdot e^{r_G T}$ versprochen mit einem Garantiezins r_G. Bei vorzeitigem Rückkauf orientiert sich der Wert der Auszahlung an den Kapitalmarktverhältnissen.

Das Versicherungsunternehmen B gibt bei sonst gleichen Daten eine durchgängige Garantie, wie dies nach deutschem Aufsichtsrecht vorgeschrieben ist, das heißt, zu vorgegebenen Zeitpunkten

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = T$$

wird die Leistung (EB-Ko)$\cdot e^{r_G t_i}$ für i=1, 2,…, n garantiert.

Man betrachte die Shortfall-Wahrscheinlichkeiten für beide Produkte. Dabei tritt ein Shortfall per definitionem genau dann ein, wenn für die entsprechende Kapitalanlage

$$F_T < (EB - Ko) \cdot e^{r_G T} \text{ im Fall A}$$

bzw. $$F_{t_i} < (EB - Ko) \cdot e^{r_G t_i} \text{ für ein i} \in \{1, 2,.., n\} \text{ im Fall B eintritt.}$$

Warum ist die Shortfall-Wahrscheinlichkeit für das Unternehmen A in jedem Fall nicht größer als die, die sich für das Unternehmen B ergibt? Begründung?

Aufgabe 4 (45 Punkte)

Für eine Lebensversicherung gegen Einmalbeitrag wird eine endfällige Garantieleistung versprochen (GMMB, Guaranteed Minimum Maturity Benefit). Die Anlagestrategie des Versicherungsunternehmens sieht nur Investments in einen Aktienfonds vor.

Zur Abschätzung der Garantiekosten soll das Black-Scholes-Modell angewendet werden Dabei geht der Aktuar des Unternehmens davon aus, dass der Kursverlauf des Aktienfonds einer geometrischen Brownschen Bewegung mit einer Volatilität von 20 Prozent folgt, und es wird eine risikolose Zinsrate von 6 % pro Jahr unterstellt. Ferner ist zu berücksichtigen, dass Jahr für Jahr für die Vermögensverwaltung eine Management Charge von 3 % nachschüssig erhoben wird.

Welche Absicherungskosten oder Garantiekosten ergeben sich bei diesem Ansatz für eine nach Ablauf von zehn Jahren endfällige Garantieleistung G in Höhe von 100 % des Anfangsbetrags?

Hierbei wird nur der Anfangsbetrag berücksichtigt, der für die Vermögensanlage nach Abzug der Kosten für Biometrie zur Verfügung steht, außerdem lässt man zunächst Stornowahrscheinlichkeiten und Überlebenswahrscheinlichkeiten bei der Berechnung der Garantiekosten außer Acht.

(Anleitung: Nach Voraussetzung folgt der Preisprozess S_t des Aktienfonds einer geometrischen Brownschen Bewegung, d.h. es ist $\mathrm{S_t = S_0 \cdot e^{(\mu - \frac{v^2}{2})\cdot t + v \cdot W_t}}$ mit einem Wienerprozess W_t.
Die Black-Scholes-Formel für eine Europäische Put-Option auf das Basispapier S mit Ausübungspreis K und Ausübungszeitpunkt T ergibt dann als Preis im Zeitpunkt t = 0:

$$P = K \cdot e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

Hierbei sind $d_1 = \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{v^2}{2})T}{v \cdot \sqrt{T}}$, $d_2 = d_1 - v \cdot \sqrt{T}$, und N(.) bezeichnet die Verteilungsfunktion der Normalverteilung. Für die Entwicklung des maßgeblichen Fondsvermögens gilt dann $F_T = F_0 \frac{S_T}{S_0}(1-m)^T$, wenn m die jährliche Management Charge bezeichnet. Man berechne die Garantiekosten mit einer passenden Modifikation der Black-Scholes-Formel).

Aufgabe 5 (Abschätzung der Zinszusatzreserve, 60 Punkte)

Mit der Änderung der DeckRV im März 2011 wurden erstmals konkrete Vorschriften für die Stellung einer Zinszusatzreserve etabliert. Sie arbeiten als Aktuar bei einer deutschen Lebensversicherung und machen sich erste Gedanken über die mögliche Höhe der Zinszusatzreserve. Da im Vordergrund Fragen der Versicherungstechnik, nicht aber der betriebswirtschaftlichen Kosten stehen, betrachten Sie im weiteren Verlauf ausschließlich Barwerte mit Ansatz biometrischer Eintrittswahrscheinlichkeiten, aber ohne Ansatz von Kosten (Nettobarwerte). Sowohl für interne Planungszwecke als auch zur Beantwortung einer Anfrage der Aufsicht benötigen Sie die Werte der Zinszusatzreserve für bis zu 20 Jahre im Voraus und für mehrere Planungsvarianten, so dass Sie sich Gedanken über ein Näherungsverfahren machen. Im Folgenden sei

ω	das Schlussalter der Rentensterbetafel,
x	das Alter der versicherten Person mit $x < \omega - 15$,
$p_x = {}_1p_x$	die Wahrscheinlichkeit für die x-jährige versicherte Person, das Alter $x+1$ zu erleben,
${}_np_x$	die Wahrscheinlichkeit für die x-jährige versicherte Person, das Alter $x+n$ zu erleben,
$\vec{i} = (i_1, i_2, ..., i_k, ..., i_\omega)$	ein Vektor von Zinssätzen $i_k > 0$, der i.a. als Variable aufgefasst wird,
$\vec{z} = (z_1, z_2, ..., z_k, ..., z_\omega)$	ein Vektor von Zinssätzen $z_k > 0$, der i.a. als Konstante aufgefasst wird,

Dabei bezeichnen i_k und z_k jeweils den einjährigen Zinssatz, der innerhalb des ganzen k- ten Jahres gilt ($1 \le k \le \omega$), d.h. $\vec{i}$ und $\vec{z}$ sind Vektoren von einjährigen Terminzinssätzen. Sei weiter

i	ein Zinssatz i > 0, der i.a. als Variable aufgefasst wird,
z	ein Zinssatz z > 0, der i.a. als Konstante aufgefasst wird.

Zur Abkürzung seien die zugehörigen Diskontfaktoren bezeichnet mit

$v_k = \frac{1}{1+i_k} \quad (v = \frac{1}{1+i})$	der zum Zinssatz i_k (i) gehörige einjährige Diskontfaktor,
$w_k = \frac{1}{1+z_k} \quad (w = \frac{1}{1+z})$	der zum Zinssatz z_k (z) gehörige einjährige Diskontfaktor.

Darüber hinaus bezeichne

${}^{\vec{i}}E_{x:n}$ $({}^{i}E_{x:n},\ {}^{z}E_{x:n})$	den rechnungsmäßigen Barwert der Erlebensfallleistung 1 nach genau n voll abgelaufenen Jahren, berechnet mit dem Zinsvektor $\vec{i}$ bzw. dem Zins i, z,
${}^{\vec{i}}a_{x}$ $({}^{i}a_{x},{}^{z}a_{x})$	den Barwert der lebenslangen Leibrente mit jährlich nachschüssigen Zahlungen der konstanten Höhe 1, berechnet mit dem Zinsvektor $\vec{i}$ bzw. dem Zins i, z,
${}^{\vec{i}}a_{x:n}$ $({}^{i}a_{x:n},{}^{z}a_{x:n})$	den Barwert der temporären Leibrente mit höchstens n jährlich nachschüssigen Zahlungen der Höhe 1 berechnet mit dem Zinsvektor $\vec{i}$ bzw. dem Zins i, z.
${}^{i}(Ia)_{x:n}$	den Barwert der temporären Leibrente mit höchstens n jährlich nachschüssigen Zahlungen, deren erste Zahlung den Betrag 1 hat und die jährlich jeweils um den Betrag 1 steigt, berechnet mit dem Zins i.

a) Geben Sie eine explizite Formel für den mit dem Zinsvektor $\vec{i}$ berechneten Barwert ${}^{\vec{i}}E_{x:n}$ an. *(4 Punkte)*

b) Geben Sie eine explizite Formel für die mit dem Zinsvektor $\vec{i}$ berechneten Barwerte ${}^{\vec{i}}a_{x}$ und ${}^{\vec{i}}a_{x:n}$ an. *(je 3 Punkte, zusammen 6 Punkte)*

c) Betrachten Sie nun im Kontext der gesetzlichen Regelungen für die Zinszusatzreserve konkret den Spezialfall $i_1 = i_2 = \ldots = i_k = \ldots = i_{15} = i$, $v = \frac{1}{1+i}$ und $i_{16} = i_{17} = \ldots = i_n = z$, $w = \frac{1}{1+z}$. Zeigen Sie hierfür, dass

$$ {}^{\vec{i}}a_{x} = {}^{i}a_{x:15} + {}^{i}E_{x:15} \cdot {}^{z}a_{x+15}. $$

(10 Punkte)

d) Beschreiben Sie die Vorschriften zur Stellung einer Zinszusatzreserve in drei Sätzen, und zwar jeweils einem Satz zu
   - dem Referenzzinssatz, *(2 Punkte)*
   - der Ermittlung der Zinszusatzreserve *(2 Punkte)* und
   - dem Vorgehen im Altbestand. *(2 Punkte)*

e) Betrachten Sie a_x als Deckungsrückstellung einer fälligen lebenslänglichen Leibrente. Sei z der vertraglich vereinbarte Rechnungszins und $0 < i < z$ der zum Bilanzstichtag gültige Referenzzinssatz der DeckRV zur Ermittlung der Zinszusatzreserve $ZZR(i, z, x)$ dieses Vertrags. Zeigen Sie

$$ZZR(i,z,x) = ({}^{i}a_{x:15} - {}^{z}a_{x:15}) + ({}^{i}E_{x:15} - {}^{z}E_{x:15}) \cdot {}^{z}a_{x+15}\ .$$ *(4 Punkte)*

f) Zeigen Sie, dass für die modifizierte Duration D_2 von ${}^{i}E_{x:15}$ gilt $D_2 = 15 \cdot v$. *(5 Punkte)*

g) Zeigen Sie, dass für die modifizierte Duration D_1 von ${}^{i}a_{x:15}$ gilt $D_1 = v \cdot \frac{{}^{i}(Ia)_{x:15}}{{}^{i}a_{x:15}}$. *(10 Punkte)*

h) Beweisen Sie die nachfolgend angegebene lineare Näherung für die Zinszusatzreserve $ZZR(i,z,x)$, indem sie $i = z + \Delta$ für kleines (negatives) Δ wählen und die modifizierten Durationen D_1 bzw. D_2 von ${}^{i}a_{x:15}$ bzw. ${}^{i}E_{x:15}$ verwenden:

$$ZZR(z+\Delta, z, x) \approx -\Delta \cdot w \cdot ({}^{z}(Ia)_{x:15} + 15 \cdot {}^{z}E_{x:15} \cdot {}^{z}a_{x+15})\ .$$ *(10 Punkte)*

(Beachte: Mit $i = z + \Delta$ und $0 < i < z$ ist offenbar $\Delta < 0$, d.h. $ZZR(i, z, x)$ wie erwartet positiv).

i) Bestimmen Sie daraus eine Konstante $const(z) > 0$, so dass für einen Bestand fälliger lebenslanger Leibrenten mit verschiedenen Altern x und einheitlichem Rechnungszins z näherungsweise gilt

$$ZZR(z+\Delta, z) = \sum_x ZZR(z+\Delta, z, x) \approx -\Delta \cdot const(z)\ .$$ *(5 Punkte)*

Lösungsvorschläge

<u>zu Aufgabe 1</u>

a) Grundsätzlich gilt, dass Optionen einen Wert haben und eingepreist werden sollten. Im vorliegenden Fall wird allerdings kaum jemand gezielt heiraten, um die Option in Anspruch zu nehmen. Außerdem sind nur wenige Menschen zum Zeitpunkt ihrer Heirat schwer krank. Dennoch ist damit zu rechnen, dass es einzelne Versicherte geben wird, deren Gesundheitszustand sich zwischen Vertragsabschluss und Eheschließung mehr als normal verschlechtert hat, und gerade diese werden sich für die Ausübung der Option entscheiden. Für die zusätzlich hinzukommende Versicherungsleistung ist also mit etwas höheren Invalidisierungswahrscheinlichkeiten, geringfügig höheren Invaliden- und Aktivensterblichkeiten und tendenziell geringeren Reaktivierungswahrscheinlichkeiten zu rechnen. Bei der Prämiengestaltung wird man dies möglicherweise aus Wettbewerbsgründen und wegen der Intention des Leistungsversprechens nicht umsetzen können (obwohl es technisch bei hinreichender Schadenerfahrung möglich wäre), aber bei der Reservierung sollte aus Vorsichtsgründen zumindest mit erhöhten i_x gerechnet werden. Die Änderung der anderen Rechnungsgrundlagen dürfte allerdings kaum quantifizierbar sein und numerisch nicht sehr ins Gewicht fallen, so dass es vertretbar erscheint, mit den alten q_x^{aa}, q_x^i und r_x weiter zu arbeiten.

b) Eine Auswirkung auf die Rechnungsgrundlagen ist nicht erkennbar. Zu der Formel:
Der Barwert der Invalidenrente wird ergänzt um eine Anwartschaft des Invaliden auf eine 6 Monate zahlbare Aktivenrente nach Reaktivierung. Also gilt für den neuen Invalidenrentenbarwert ${}^{(12)}\tilde{\ddot{a}}_x^i$ (monatliche Zahlweise unterstellt):

$$
{}^{(12)}\tilde{\ddot{a}}_x^i = {}^{(12)}\ddot{a}_x^i + {}^{(12)}\ddot{a}^{ia}_{x,65-x,\overline{\frac{1}{2}|}}
$$

$$
= \frac{\mathrm{N}_\mathrm{x}^\mathrm{i}}{\mathrm{D}_\mathrm{x}^\mathrm{i}} - k^{(12)} + \frac{1}{D_x^i} \sum_{k=0}^{z-x-1} D_{x+k}^i \cdot r_{x+k} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot q_{x+k}^i\right) \cdot \frac{1}{12} \cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{aa}_{x+k+\frac{1}{2}:\overline{\frac{1}{2}|}} \cdot v^{\frac{1}{2}}
$$

Hierbei wird unterstellt, dass die Reaktivierung immer in der Mitte eines Versicherungsjahres eintritt.

Variationen dieses Formelansatzes sind möglich und zulässig. Insbesondere ist die numerische Abweichung gering, wenn man den Aktivenrentenbarwert durch einen Zeitrentenbarwert oder einfach den Wert $\frac{1}{2}$ ersetzt.

c) Die q_x^{aa} und i_x sind bis zum Alter 65 grundsätzlich unverändert zu wählen, allerdings müssten die i_x für Alter knapp unter 65 möglicherweise erhöht werden, um Selektionseffekte zu vermeiden (lebenslängliche Zahlung der BU-Rente !)

   Die Grundlagen q_x^i und r_x liegen für die Alter über 65 nicht vor und müssen ggf. geschätzt werden. Dabei ist es sinnvoll, die Reaktivierungswahrscheinlichkeiten auf 0 zu setzen. Die Invalidensterblichkeit könnte zum einen mit der „normalen“ Rentnersterblichkeit (DAV 2004 R; sehr vorsichtig) gleichgesetzt oder aber durch geeignete Fortschreibung der q_x^i für $x < 65$ gewonnen werden.

d) Die Ausscheideursache Tod entfällt für Invalide nach dem Satz von Cantelli; daher muss die Ausscheideordnung für Invalide modifiziert werden.

zu Aufgabe 2

a) Altes Recht mit Basisrente

grundsätzlich als Vorsorgeaufwendungen zu berücksichtigen:

- LV	(0,88·3600)	3.168
- PKV		5.100
- Pflegeversicherung		965
- Haftpflicht		940
- Basisrente		2.000
		12.173

Grundhöchstbetrag	1.334
Vorwegabzug (ungekürzt im Jahr 2011)	2.700
hälftiger Höchstbetrag	667
	4.701

Nach altem Recht könnte der Steuerpflichtige einen Betrag von 4.701 € absetzen.

b) Neues Recht mit Basisrente

abzugsfähig in 2011: 0,843·5100 € + 965 + 0,72·2.000 = 6.704,30

c) altes Recht (ohne Basisrente) + Erhöhungsbetrag

Die Berechnung unter a) zeigt, dass das alte Recht (mit abgesenktem Vorwegabzug) auch ohne die Basisrente zu einem Abzugsbetrag von 4.701 € geführt hätte. Damit ergibt sich für c) ein Betrag von

4.701 + 0,72·2.000 = 6.141

Im Ergebnis sind folgende Beträge zu vergleichen:

- altes Recht (mit Basisrente)	4.701
- neues Recht (mit Basisrente)	6.704
- altes Recht (ohne Basisrente) + Erhöhungsbetrag	6.141

Daher konnte der Steuerpflichtige im vorliegenden Fall im Jahr 2011 den Betrag von 6.704 € abziehen.

zu Aufgabe 3:

Es geht um die Wahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}(F_T < (EB - Ko) \cdot e^{r_G T})$ im Fall A bzw.

$$\mathrm{P}(\{F_{t_1} < (EB - Ko) \cdot e^{r_G t_1}\} \cup \ldots \cup \{F_{t_i} < (EB - Ko) \cdot e^{r_G t_i}\} \cup \ldots \cup \{F_{t_n} < (EB - Ko) \cdot e^{r_G t_n}\})$$

im Fall B, und damit ist offensichtlich die Wahrscheinlichkeit im Fall B mindestens so groß wie im Fall A.

zu Aufgabe 4

Zweckmäßigerweise normiert man zunächst $F_0 = S_0$, dann ist das maßgebliche Fondsvermögen bei Ablauf des Vertrages

(1) $F_T = S_T \cdot (1-m)^T$,

und man kann in dem Black-Scholes-Modellrahmen die Garantiekosten (GMMB) für die garantierte Leistung G bei Ablauf so berechnen: $e^{-rT} E^*[(G - F_T)^+]$, wobei der Stern am Erwartungswert bedeutet, dass zur Berechnung des Erwartungswertes das äquivalente Martingalmaß benutzt wird, unter dem der Driftparameter eliminiert ist. Um für $G = S_0 = F_0$ den Wert $e^{-rT} E^*[(G - F_T)^+]$ mit der Put-Optionspreis-Formel zu berechnen, hat man nach Gleichung (1)

$$e^{-rT}E*[(G-F_T)^+]=\ e^{-rT}E*[(G-S_T(1-m)^T)^+]=(1-m)^T e^{-rT}E*[G(1-m)^{-T}-S_T)^+]$$

zu berechnen; das ist aber gerade bis auf den Faktor $(1-m)^T$ die Preisformel für eine Put-Option auf das Basispapier S mit Ausübungspreis $K=G\cdot(1-m)^{-T}$.
Mit der in der Anleitung gegebenen Formel erhält man dann:

$$e^{-rT}E*[(G-F_T)^+]=\ G\cdot e^{-rT}N(-d_2)-(1-m)^T S_0 N(-d_1) \quad \text{mit}$$

$$d_1=\frac{\log(\frac{S_0}{G}(1-m)^T)+(r+\frac{v^2}{2})T}{v\cdot\sqrt{T}}=\frac{\log(\frac{S_0}{G})+(r+\log(1-m)+\frac{v^2}{2})T}{v\cdot\sqrt{T}} \quad \text{und}$$

$$d_2=d_1-v\cdot\sqrt{T}\ .$$

Nun berechnen sich diese Werte für r = 0.06, m =0.03 , T = 10 und v = 0.2 zu

$d_1=0.783308707..$ und $d_2=0.150853175..$

Mit der beigefügten Tabelle der Normalverteilung

ergibt dies $N(-d_1)=0.2167..$ sowie $N(-d_2)=0.4400..$

und damit berechnet man den gesuchten Wert $e^{-rT}E*[(G-F_T)^+]$ zu ~ 0.082… , d.h. die endfälligen Garantiekosten betragen vor Berücksichtigung von Storno- und Überlebenswahrscheinlichkeiten etwas mehr als 8 % des Anfangsbetrages.

<u>zu Aufgabe 5</u>

a) Geben Sie eine explizite Formel für den mit dem Zinsvektor $\vec{i}$ berechneten Barwert ${}^{\vec{i}}E_{x:n}$ an.

Im *n*-ten Jahr gilt der Zinssatz i_n, im *k*-ten Jahr gilt der Zinssatz i_k, im ersten Jahr gilt der Zinssatz i_1; hierzu gehören jeweils die einjährigen Diskontfaktoren v_n, v_k und v_1. Diskontiert man nun beginnend mit dem Ende des *n*-ten Jahres sukzessive jeweils ein Jahr zurück mit dem jeweils gültigen Diskontfaktor bis zum Beginn, erhält man den Diskontfaktor $v_n\cdot v_{n-1}\cdot\ldots\cdot v_k\cdot\ldots\cdot v_1=\prod_{k=1}^{n}v_k$.

DAV
DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Mit der n-jährigen Überlebenswahrscheinlichkeit ${}_n p_x = \prod_{k=1}^{n} p_{x+k-1}$ ergibt sich dann

$${}^{\vec{i}}E_{x:n} = {}_n p_x \cdot v_n \cdot v_{n-1} \cdot \ldots \cdot v_k \cdot \ldots \cdot v_1 = {}_n p_x \cdot \prod_{k=1}^{n} v_k = \prod_{k=1}^{n} p_{x+k-1} \cdot v_k .$$

b) Geben Sie eine explizite Formel für die mit dem Zinsvektor $\vec{i}$ berechneten Barwerte ${}^{\vec{i}}a_x$ und ${}^{\vec{i}}a_{x:n}$ an.

Offenbar ergibt sich der lebenslange Leibrentenbarwert ${}^{\vec{i}}a_x$ als Summe der Barwerte ${}^{\vec{i}}E_{x:k}$ über $1 \le k \le \omega - x$. Also ist

$${}^{\vec{i}}a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} {}^{\vec{i}}E_{x:k} = \sum_{k=1}^{\omega-x} \prod_{j=1}^{k} p_{x+j-1} v_j = \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_k p_x \cdot \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1+i_j} .$$

Analog ergibt sich der temporäre Leibrentenbarwert ${}^{\vec{i}}a_{x:n}$ als Summe der Barwerte ${}^{\vec{i}}E_{x:k}$ über $1 \le k \le n$. Also ist

$${}^{\vec{i}}a_{x:n} = \sum_{k=1}^{n} {}^{\vec{i}}E_{x:k} = \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} p_{x+j-1} v_j = \sum_{k=1}^{n} {}_k p_x \cdot \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1+i_j} .$$

c) Betrachten Sie nun im Kontext der gesetzlichen Regelungen für die Zinszusatzreserve konkret den Spezialfall $i_1 = i_2 = \ldots = i_k = \ldots = i_{15} = i$, $v = \frac{1}{1+i}$ und $i_{16} = i_{17} = \ldots = i_n = z$, $w = \frac{1}{1+z}$. Zeigen Sie hierfür

$${}^{\vec{i}}a_x = {}^{i}a_{x:15} + {}^{i}E_{x:15} \cdot {}^{z}a_{x+15} .$$

Wir starten mit der definierenden Formel aus Teil b) und trennen zunächst die Summe und später auch das in der Summe stehende Produkt jeweils nach dem 15. Summanden (denn $x < \omega - 15$, also $15 < \omega - x$) bzw. dem 15. Faktor auf:

$${}^{\vec{i}}a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} {}^{\vec{i}}E_{x:k} = \sum_{k=1}^{15} {}^{\vec{i}}E_{x:k} + \sum_{k=16}^{\omega-x} {}^{\vec{i}}E_{x:k} = {}^{\vec{i}}a_{x:15} + \sum_{k=16}^{\omega-x} \prod_{j=1}^{k} \frac{p_{x+j-1}}{1+i_j} = {}^{\vec{i}}a_{x:15} + \sum_{k=16}^{\omega-x} \prod_{j=1}^{15} \frac{p_{x+j-1}}{1+i_j} \cdot \prod_{j=16}^{k} \frac{p_{x+j-1}}{1+i_j}$$

$$= {}^{\vec{i}}a_{x:15} + \prod_{j=1}^{15} \frac{p_{x+j-1}}{1+i_j} \cdot \sum_{k=1}^{\omega-(x+15)} \prod_{j=16}^{15+k} \frac{p_{x+j-1}}{1+i_j} = {}^{\vec{i}}a_{x:15} + {}^{\vec{i}}E_{x:15} \cdot \sum_{k=1}^{\omega-(x+15)} \prod_{j=1}^{k} \frac{p_{(x+15)+j-1}}{1+i_{15+j}}$$

Offenbar ist im Spezialfall ${}^{\bar{i}}a_{x:15} = {}^{i}a_{x:15}$ und ${}^{\bar{i}}E_{x:15} = {}^{i}E_{x:15}$ sowie $i_{15+j} = z$ für alle $1 \leq j \leq k$, so dass sich alles vereinfacht zu dem behaupteten Ergebnis:

$$ {}^{\bar{i}}a_x = {}^{i}a_{x:15} + {}^{i}E_{x:15} \cdot \sum_{k=1}^{\omega-(x+15)} \prod_{j=1}^{k} \frac{p_{(x+15)+j-1}}{1+z} = {}^{i}a_{x:15} + {}^{i}E_{x:15} \cdot \sum_{k=1}^{\omega-(x+15)} {}_k p_{x+15} w^k = {}^{i}a_{x:15} + {}^{i}E_{x:15} \cdot {}^{z}a_{x+15} \,. $$

d) Beschreiben Sie die Vorschriften zur Stellung einer Zinszusatzreserve in drei Sätzen, und zwar jeweils einem Satz zu

- dem Referenzzinssatz, *(2 Punkte)*
- der Ermittlung der Zinszusatzreserve *(2 Punkte)* und
- dem Vorgehen im Altbestand. *(2 Punkte)*

Der Referenzzinssatz wird berechnet als 10-Jahres-Mittel von 10jährigen Anleihen der AAA- gerateten Staaten des Euroraums gemäß einer Veröffentlichung der EZB, wobei im letzten Jahr nur die ersten 9 Monate berücksichtigt werden. Die Zinszusatzreserve ergibt sich jeweils als (positive) Differenz einer handelsrechtlichen Deckungsrückstellung, bei der für die ersten 15 Jahre der (höhere) Referenzzinssatz und danach der Rechnungszinssatz angesetzt werden, zu ihrem Ausgangswert. Im Altbestand ist grundsätzlich ein Sicherheitsniveau anzusetzen, das dasjenige des Neubestands nicht unterschreitet, demnach ist die Regelung der Zinszusatzreserve grundsätzlich durch entsprechende Geschäftsplaneingabe zu übertragen.

e) Betrachten Sie a_x als Deckungsrückstellung einer fälligen lebenslänglichen Leibrente. Sei *z* der vertraglich vereinbarte Rechnungszins und $0 < i < z$ der zum Bilanzstichtag gültige Referenzzinssatz der DeckRV zur Ermittlung der Zinszusatzreserve *ZZR(i, z ,x)* dieses Vertrags. Zeigen Sie

$$ ZZR(i,z,x) = ({}^{i}a_{x:15} - {}^{z}a_{x:15}) + ({}^{i}E_{x:15} - {}^{z}E_{x:15}) \cdot {}^{z}a_{x+15} \,. $$

Offenbar ist mit c) die alte Deckungsrückstellung

$$ DR_{alt} = {}^{z}a_x = {}^{z}a_{x:15} + {}^{z}E_{x:15} \cdot {}^{z}a_{x+15} $$

Die neue Deckungsrückstellung ergibt sich aus dem in c) betrachteten Spezialfall analog zu

$$ DR_{neu} = {}^{\bar{i}}a_x = {}^{i}a_{x:15} + {}^{i}E_{x:15} \cdot {}^{z}a_{x+15} $$

Die Zinszusatzreserve ergibt sich hieraus durch Einsetzen zu

$$ZZR(i,z,x) = \max(DR_{neu} - DR_{alt};0) = \max({}^{i}a_{x:15} + {}^{i}E_{x:15} \cdot {}^{z}a_{n-15} - {}^{z}a_{x:15} - {}^{z}E_{x:15} \cdot {}^{z}a_{n-15};0)$$
$$= ({}^{i}a_{x:15} - {}^{z}a_{x:15}) + ({}^{i}E_{x:15} - {}^{z}E_{x:15}) \cdot {}^{z}a_{x+15}$$

f) Zeigen Sie, dass für die modifizierte Duration D_2 von ${}^{i}E_{x:15}$ gilt $D_2 = 15 \cdot v$.

Mit der Definition der modifizierten Duration ergibt sich

$$D_2 \cdot {}^{i}E_{x:15} = -\frac{\partial}{\partial i}\,{}^{i}E_{x:15} = -\frac{\partial}{\partial i}({}_{15}p_x \cdot v^{15}) = -{}_{15}p_x \cdot 15 \cdot v^{14} \cdot \frac{\partial}{\partial i} v = -{}_{15}p_x \cdot 15 \cdot v^{14} \cdot (-v^2) = 15 \cdot v \cdot {}^{i}E_{x:15}$$

Nach Division beider Seiten durch ${}^{i}E_{x:15}$ folgt die Behauptung.

g) Zeigen Sie, dass für die modifizierte Duration D_1 von ${}^{i}a_{x:15}$ gilt

$$D_1 = v \cdot \frac{{}^{i}(Ia)_{x:15}}{{}^{i}a_{x:15}}$$

Mit der Definition der modifizierten Duration ergibt sich aus b)

$$D_1 \cdot {}^{i}a_{x:15} = -\frac{\partial}{\partial i}\,{}^{i}a_{x:15} = -\frac{\partial}{\partial i}\sum_{k=1}^{15} {}^{i}E_{x:k} = -\sum_{k=1}^{15}\frac{\partial}{\partial i}\,{}^{i}E_{x:k} = v \cdot \sum_{k=1}^{15} k \cdot {}^{i}E_{x:k} = v \cdot {}^{i}(Ia)_{x:15}$$

Nach Division beider Seiten durch ${}^{i}a_{x:15}$ folgt die Behauptung.

h) Beweisen Sie die nachfolgend angegebene lineare Näherung für die Zinszusatzreserve $ZZR(i, z, x)$, indem sie $i = z + \Delta$ für kleines (negatives) Δ wählen und die modifizierten Durationen D_1 bzw. D_2 von ${}^{i}a_{x:15}$ bzw. ${}^{i}E_{x:15}$ verwenden:

$$ZZR(z+\Delta, z, x) \approx -\Delta \cdot w \cdot ({}^{z}(Ia)_{x:15} + 15 \cdot {}^{z}E_{x:15} \cdot {}^{z}a_{x+15})$$

Wie in Teil d) gezeigt ist

$$ZZR(i,z,x) = ({}^{i}a_{x:15} - {}^{z}a_{x:15}) + ({}^{i}E_{x:15} - {}^{z}E_{x:15}) \cdot {}^{z}a_{x+15}$$

Mit $i = z + \Delta$ ist

$$ZZR(z+\Delta, z, x) = ({}^{z+\Delta}a_{x:15} - {}^{z}a_{x:15}) + ({}^{z+\Delta}E_{x:15} - {}^{z}E_{x:15}) \cdot {}^{z}a_{x+15}$$

Der erste und der zweite Summand lassen sich jeweils getrennt nähern durch Verwendung der modifizierten Durationen:

$$ZZR(z+\Delta, z, x) \approx -D_1 \cdot \Delta \cdot {}^{z}a_{x:15} - D_2 \cdot \Delta \cdot {}^{z}E_{x:15} \cdot {}^{z}a_{x+15} = -\Delta \cdot (D_1 \cdot {}^{z}a_{x:15} + D_2 \cdot {}^{z}E_{x:15} \cdot {}^{z}a_{x+15})$$

Einsetzen der Ergebnisse aus e) und f) ergibt wie behauptet

$$ZZR(z+\Delta, z, x) \approx -\Delta \cdot (w \cdot {}^{z}(Ia)_{x:15} + 15 \cdot w \cdot {}^{z}E_{x:15} \cdot {}^{z}a_{x+15}) = -\Delta \cdot w \cdot ({}^{z}(Ia)_{x:15} + 15 \cdot {}^{z}E_{x:15} \cdot {}^{z}a_{x+15})$$

.

i) Bestimmen Sie daraus eine Konstante *const*(z) > 0, so dass für einen Bestand fälliger lebenslanger Leibrenten verschiedener Alter *x* näherungsweise gilt

$$ZZR(z+\Delta, z) = \sum_x ZZR(z+\Delta, z, x) \approx -\Delta \cdot const(z)$$

Aus Teil g) erhält man durch Einsetzen

$$ZZR(z+\Delta, z) = \sum_x ZZR(z+\Delta, z, x) \approx -\Delta \cdot \sum_x w \cdot ({}^{z}(Ia)_{x:15} + 15 \cdot {}^{z}E_{x:15} \cdot {}^{z}a_{x+15}) = -\Delta \cdot const(z)$$

wobei die Summe offenbar eine von *z* abhängige Konstante *const*(*z*) > 0 definiert.