DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen)

Klausur vom 23.10.2010

Die Klausur besteht aus 3 Aufgaben, die mit insgesamt 180 Punkten bewertet werden. Um diese maximale Punktzahl erreichen zu können, müssen alle Aufgaben bearbeitet werden. Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 72 Punkte erforderlich.

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Zugelassenes Hilfsmittel: Taschenrechner

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (60 Punkte)

a) *Erläutern Sie in Stichworten, warum die VVG-Reform aus dem Jahr 2008 Einfluss auf die Schadenhäufigkeiten in der Berufsunfähigkeitsversicherung und damit auf die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten hat.*

b) Ein gesunder 32-jähriger Tankwart möchte eine selbständige Berufsunfähigkeitsversicherung abschließen mit

- n = Versicherungsdauer = Beitragszahlungsdauer = 3 Jahre
- Leistungsdauer bei Eintritt der Berufsunfähigkeit: ebenfalls bis zum Alter 35
- jährliche Zahlweise der Berufsunfähigkeitsrente
- R = Jahresrente = 3600 €.

Da er einer Berufsgruppe mit erhöhtem Gefährdungsgrad angehört, sind die unten angegebenen Invalidisierungswahrscheinlichkeiten der Tafel DAV 1997 I mit dem Faktor 1,8 zu multiplizieren.

Berechnen Sie die Jahresnettoprämie für diesen Vertrag, wenn der Zins mit i = 2,25 % angesetzt wird, die Invalidisierung immer in der Mitte eines Lebensjahres eintritt, die Rentenzahlung dann einen Monat später einsetzt und wenn folgende biometrischen Daten vorliegen:

Alter	q_x^{aa} **aus DAV 2008 TM (in ‰)**	i_x **aus DAV 1997 I (in ‰)**
32	0,79	2,28
33	0,82	2,28
34	0,86	2,28
35	0,90	2,30

Alter	**Invalidensterblichkeit (in ‰)**					
	N = 1	N = 2	N = 3	N = 4	N = 5	N = 6
32	17,00	14,59	12,14	9,68	7,18	4,63
33	18,12	15,56	12,95	10,33	7,68	5,01
34	19,23	16,53	13,76	10,98	8,19	5,39
35	20,33	17,49	14,55	11,62	8,68	5,78

Die Spaltenwerte zu N bezeichnen die Ausscheidewahrscheinlichkeit eines x-Jährigen in der N - ten Selektionsperiode.

Alter	**Reaktivierungswahrscheinlichkeit (in ‰)**					
	N = 1	N = 2	N = 3	N = 4	N = 5	N = 6
32	69,11	72,76	111,83	114,27	111,64	60,58
33	68,82	70,37	104,57	104,67	101,89	54,20
34	68,04	67,36	96,78	94,57	92,21	48,05
35	66,88	63,99	88,83	84,51	82,85	42,26

Aufgabe 2 (60 Punkte)

Ein 60-jähriger Mann kauft eine zweijährige reine Erlebensfallversicherung, die zwei gleich hohe Jahresprämien zu € 50 000,- vorsieht. Es sind folgende Daten bekannt: Die ein- bzw. zweijährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines 60-jährigen Mannes betragen nach der DAV-Sterbetafel 2004 RM : $p_{60} = 0.9972$, ${}_2p_{60} = 0.99427$.

a) *Mit diesen Daten berechne man die Ablaufleistung im Erlebensfall bei einem Garantiezins von 2.25% bzw. alternativ von 4% .*
(es werden keine Abschluss-- oder Verwaltungskosten berücksichtigt) (10 Punkte)

Die Anlagestrategie des Versicherungsunternehmens sieht nur Investments in Zerobonds mit dem gleichen Ablaufdatum wie die entsprechende Versicherung vor.
Die Vorgabe an den Aktuar lautet, dass nur solche Garantiezinsen bei der Kalkulation verwendet werden dürfen, die für diese Versicherungen keine Absicherung des Zinsversprechens etwa über Europäische Call-Optionen auf Zerobonds benötigen. Hierbei wird unterstellt, dass auch nach einem Jahr die Preise für Zerobonds stets unter 1 liegen, d.h. dass auch in einem Jahr die Kapitalmärkte keine negativen Zinsen ausweisen.

Aufgrund der gültigen Zinsstrukturkurve kennt man die aktuellen Preise von ein- bzw. zweijährigen Zerobonds: P(0,1) = 0,963 P(0,2) = 0,93 sowie den Preis eines Europäischen Calls auf einen Zerobond mit Ausübungspreis 0,9557:

$$C_P(0,\ 1,\ 2,\ 0{,}9557) = 0{,}04 .$$

Hierbei bezeichnen wie üblich:

- P(t,T) den Preis eines Zerobonds zum Zeitpunkt t und Ablaufdatum T , so dass also zum Ablaufdatum T gilt P(T,T) = 1;
- $C_P(t,T,T_B,X)$ den Preis einer Europäischen Call-Option zum Zeitpunkt t mit Ausübungspreis X, Laufzeit T auf einen Zerobond, der zu einem Zeitpunkt $T_B \geq T$ fällig wird, so dass z.B. der Wert der Call-Option zum Zeitpunkt T gerade $C_P(T,T,T_B,X) = (P(T,T_B) - X)^+ = \max(P(T,T_B) - X, 0)$ ist.

b) *Wie kann generell für die genannte Versicherung eine Absicherung eines Garantiezinses mit Call-Optionen auf Zerobonds vorgenommen werden?* (15 Punkte)

c) *Man prüfe nach, ob bei einem Garantiezins von 2.25 % bzw. 4 % eine solche Absicherung in dem hier vorliegenden Fall wirklich benötigt wird.* (15 Punkte)

d) *Falls eine Absicherung notwendig ist, was wäre dann der Preis der Absicherung bei den hier vorliegenden numerischen Daten mittels Call-Optionen auf Zerobonds ?*
(10 Punkte)

Dem Kunden wird auch die Möglichkeit eingeräumt, beide Prämien in einer Einmalzahlung zu leisten; die zunächst nicht benötigte zweite Prämie wird dann in einem Prämiendepot für ein Jahr zu 2 % verzinst und steht dann für die zweite fällige Zahlung zur Verfügung.

e) *Lässt sich bei der Konstruktion mit dem Prämiendepot in jedem der beiden Fälle eine Absicherung durch Call-Optionen vermeiden, bzw. welchen Einjahreszins muss man dann in dem zweiten Jahr für das aus dem Prämiendepot stammende Geld erzielen?* (10 Punkte)

Anleitung: Hierbei gehe man wie im Seminar von einem deterministischen Ansatz für die Biometrie aus, die einzige Unsicherheit besteht also hier in der zukünftigen Zinsentwicklung. Außerdem werden Abschluss- und Verwaltungskosten in dieser Betrachtung komplett außen vor gelassen.

Aufgabe 3 Beteiligung an den Bewertungsreserven (60 Punkte)

Mit der VVG-Reform wurde in Gestalt des §153 VVG die Beteiligung der Kunden an den Bewertungsreserven eines Lebensversicherers gesetzlich verbindlich geregelt. Auf diesem Hintergrund analysieren Sie als Aktuar eines deutschen Lebensversicherers verschiedene Verfahren zur konkreten Ausgestaltung dieser Beteiligung an den Bewertungsreserven Ihres Unternehmens.

a) *Erläutern Sie die drei Begriffe*
   - *Überschussbeteiligung*
   - *Beteiligung am (handelsrechtlichen) Überschuss*
   - *Beteiligung an den Bewertungsreserven*

   und ihr Verhältnis untereinander jeweils im Kontext des §153 VVG. (3 Punkte) (Drei angemessene aussagekräftige Sätze reichen)

Für die Entscheidungsfindung im Unternehmen erstellen Sie einen Vergleich von vier Verfahren (nachfolgend bezeichnet mit V1, V2a, V2b, V3) für die Beteiligung der anspruchsberechtigten Verträge an den diesen zuzuordnenden Bewertungsreserven, wobei Sie sich auf Kapital bildende Versicherungen in der Ansparphase beschränken und alle Sonderfälle wie z.B. fällige Rentenversicherungen, Teilauszahlungsversicherungen etc. bewusst nicht berücksichtigen. Der Einfachheit halber betrachten Sie durchgängig nur voll abgelaufene Versicherungsjahre. Alle vier Verfahren teilen die zuzuordnenden Bewertungsreserven den anspruchsberechtigten Verträgen mittels einer Schlüsselung zu. Der Schlüsselwert S_j des *j*-ten Versicherungsvertrags basiert stets u.a. auf dem zu diesem Vertrag gehörigen Kapital K_j (das ist i.w. die Summe aus konventioneller Deckungsrückstellung und Ansammlungsguthaben) und ergibt sich bei den einzelnen Verfahren im Detail wie folgt:

V1 Der Schlüsselwert $S_j(m)$ des *j*-ten Vertrags zum Bewertungsstichtag nach *m* voll abgelaufenen Versicherungsjahren ist das zu diesem Vertrag gehörige Kapital $K_j(m)$ zum Bewertungsstichtag nach *m* voll abgelaufenen Versicherungsjahren,

V2 Der Schlüsselwert $S_j(m)$ des *j*-ten Vertrags zum Bewertungsstichtag nach *m* voll abgelaufenen Versicherungsjahren ist das zu diesem Vertrag gehörige Kapital $K_j(m)$ zum Bewertungsstichtag nach *m* voll abgelaufenen Versicherungsjahren, multipliziert mit der abgelaufenen Dauer in vollen Jahren seit Beginn, wobei prämienfreie Jahre doppelt gezählt werden.

Das Verfahren V2 zerfällt in zwei Unterverfahren, die sich nur im Schlüsselwert für Einmalbeitragsversicherungen unterscheiden.

V2a Das zum Bewertungsstichtag nach m voll abgelaufenen Versicherungsjahren vorhandene Kapital $K_j(m)$ wird für Einmalbeitragsversicherungen mit dem Doppelten der abgelaufenen Dauer in vollen Jahren seit Beginn multipliziert (d.h. ein Vertrag gegen Einmalbeitrag wird als durchgängig beitragsfrei angesehen, die Beitragszahlungsdauer t wird also mit Null angesetzt).

V2b Eine Einmalbeitragsversicherung wird im ersten Jahr als beitragspflichtig und in allen Folgejahren als beitragsfrei angesehen, die Beitragszahlungsdauer t wird also mit einem Jahr angesetzt. Daher wird das erste Jahr einfach und alle Folgejahre doppelt gezählt.

V3 Der Schlüsselwert $S_j(m)$ des j-ten Vertrags zum Bewertungsstichtag nach m voll abgelaufenen Versicherungsjahren ist die Summe der zu diesem Vertrag gehörigen Kapitalien $K_j(\mu)$ über alle Bewertungsstichtage $\mu = 1,...,m$ Jahre nach Versicherungsbeginn.

b) *Geben Sie für jedes der vier Verfahren die Formel für den Schlüsselwert $S_j(m)$ des j-ten Vertrags zum Bewertungsstichtag nach m voll abgelaufenen Versicherungsjahren an ($1 \leq m \leq n$, n = Versicherungsdauer, t = Beitragszahlungsdauer).* (4 Punkte)

c) *Berechnen Sie die jeweiligen Schlüsselwerte $S_j(m)$ des j-ten Vertrags zum Bewertungsstichtag nach m voll abgelaufenen Versicherungsjahren nach den o.a. vier Verfahren für die als Anlage zur Verfügung gestellte Tabelle von sechs Verträgen der Beispielkunden K1, …, K6 und tragen Sie die Ergebnisse direkt in die Tabelle ein.* (je 1 Punkt, insgesamt 24 Punkte)

Berechnen Sie für alle vier Verfahren die Summe der Schlüsselwerte über alle 6 Verträge und tragen Sie das Ergebnis direkt in die Tabelle ein. (je 1 Punkt, insgesamt 4 Punkte)

Geben Sie für alle vier Verfahren den prozentualen Anteil der einzelnen Kunden K1, …, K6 an den zuzuordnenden Bewertungsreserven in der Tabelle an. (je 0,25 Punkte, insgesamt 6 Punkte)

Hinweis: Kontrollieren Sie ihre Rechnungen sorgfältig – da der Rechenweg nicht nachvollziehbar ist, zählt allein das richtige Ergebnis.

d) *Vergleichen und kommentieren Sie die unterschiedliche Wirkung der vier Zuteilungsverfahren innerhalb der jeweils genannten Teilgruppe von Kunden hinsichtlich des Einflusses der Dauer der Bestandszugehörigkeit:*
- *K1, K2, K3, K6* (2 Punkte)
- *K3, K4* (2 Punkte)
- *K5, K6* (2 Punkte)

e) *Welches Verfahren ist nicht verursachungsorientiert im Sinne des §153 VVG? Begründen Sie Ihre Einschätzung.* (3 Punkte) (Ein oder zwei aussagekräftige Sätze reichen)

f) *Begründen Sie (durch Angabe einer Beweisskizze), dass das Verfahren V2a eine grobe Näherung des Verfahrens V3 ist.* (10 Punkte)

Anlage zu Aufgabe 3 Beteiligung an den Bewertungsreserven

		Jahr					Schlüssel nach Verfahren (Stichtag 2016)			
Kunde		**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**V1**	**V2a**	**V2b**	**V3**
K1	*Zustand*	*ppfl.*	*ppfl.*	*ppfl.*	*ppfl.*	*ppfl.*				
	Beitrag	4	4	4	4	4				
	Kapital	4	8	12	16	20				
						Schlüsselwert				
						Prozentanteil				
K2	*Zustand*	-	*ppfl.*	*ppfl.*	*ppfl.*	*ppfl.*				
	Beitrag	-	5	5	5	5				
	Kapital	-	5	10	15	20				
						Schlüsselwert				
						Prozentanteil				
K3	*Zustand*	-	-	-	*ppfl.*	*ppfl.*				
	Beitrag	-	-	-	10	10				
	Kapital	-	-	-	10	20				
						Schlüsselwert				
						Prozentanteil				
K4	*Zustand*	*ppfl.*	*ppfl.*	*pf.*	*pf.*	*pf.*				
	Beitrag	10	10	0	0	0				
	Kapital	10	20	20	20	20				
						Schlüsselwert				
						Prozentanteil				
K5	*Zustand*	*EP*	*EP*	*EP*	*EP*	*EP*				
	Beitrag	20	0	0	0	0				
	Kapital	20	20	20	20	20				
						Schlüsselwert				
						Prozentanteil				
K6	*Zustand*	-	-	-	-	*EP*				
	Beitrag	-	-	-	-	20				
	Kapital	-	-	-	-	20				
						Schlüsselwert				
						Prozentanteil				
						Summe der Schlüsselwerte				

Erlaubtes Hilfsmittel: Taschenrechner

Zustand:	*-*	*noch nicht im Bestand (vor Abschluss)*
	ppfl.	*Prämienpflichtige Versicherung gegen laufenden Beitrag*
	pf.	*Prämienfreie Versicherung gegen laufenden Beitrag*
	EP	*Versicherung gegen Einmalprämie*

Alle Verträge beginnen am 1.1. des angegebenen Kalenderjahres. Der Bewertungsstichtag ist der 1.1.2016, also z.B. genau 5 voll abgelaufene Jahre nach Beginn der ersten Versicherung. Das Kapital ist hier vereinfacht als Beitragssumme angesetzt (ohne Zins, Biometrie, Kosten).

Schlüsselwerte	*Geben Sie den absoluten Wert des Schlüssels an*
Prozentanteil	*Geben Sie den prozentualen Anteil der einzelnen Kunden mit einer Nachkommastelle an (Taschenrechner)*
Summe der Schlüsselwerte	*Summe aller absoluten Werte des Schlüssels über alle Kunden*

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

Zu a)

Für die BUZ sind vor allem die folgenden Auswirkungen der VVG-Reform von Bedeutung:

Neuregelung der vorvertraglichen Anzeigepflicht (§ 19 VVG 2008)

- Keine Anzeigepflicht für nicht in Textform gefragte Risikoumstände
- Nachmeldepflicht für Gefahrumstände, die nach der Vertragserklärung des VN, aber vor Vertragsannahme bekannt werden, nur dann, wenn der Versicherer ausdrücklich danach gefragt hat
- Neuregelung der Folgen der Anzeigepflichtverletzung
    - in Abhängigkeit von der Verschuldensform (Arglist, Vorsatz, grobe Fahrlässigkeit, einfache Fahrlässigkeit, schuldlose Anzeigepflichtverletzung)
    - und abhängig davon, ob vertragsverhindernde oder vertragsverändernde Umstände verschwiegen worden sind.

Zeitlich begrenzte Anerkenntnis

Die Leistungsanerkenntnis darf nur einmal zeitlich begrenzt werden. Die Anerkenntnis ist bis zum Ablauf der Frist bindend (§ 173 Abs. 2 VVG 2008).

Verlängerte Leistungspflicht bei Reaktivierungen

Der Versicherer wird frühestens mit Ablauf des dritten Monats nach einer Reaktivierung leistungsfrei. Durch diese Bestimmung des § 174 (2) VVG 2008 soll dem Versicherten die Anpassung an die neue Situation nach einer Reaktivierung erleichtert werden.

Entbindung von der Schweigepflicht (§ 213 VVG 2008)

- Es ist weiterhin möglich eine Schweigepflichtentbindungsklausel im Zusammenhang mit der Vertragserklärung (Antragsstellung) zu vereinbaren. Allerdings ist der Kreis der Personen und Institutionen, die befragt werden dürfen, abschließend in § 213 Abs. 1 VVG 2008 festgelegt. Dieser umfasst aber nicht alle relevanten Gruppen, beispielsweise fehlen in dem Katalog Rentenversicherungsträger, Psychologen, Psychotherapeuten, Heilpraktiker u.a.
- Ferner ist die betroffene Person vor einer Erhebung personenbezogener Gesundheitsdaten durch den Versicherer zu unterrichten und kann der Erhebung widersprechen (§ 213 Abs. 1 VVG 2008). Sie kann sogar jederzeit verlangen, dass eine Erhebung von Daten nur erfolgt, wenn jeweils in die einzelne Erhebung eingewilligt worden ist (§ 213 Abs. 3 VVG 2008).

Zu b)

Die Nettoprämie P_{32} für eine BU-Jahresrente der Höhe 1 berechnet sich aus der Gleichung

$$P_{32} = \frac{\ddot{a}^{ai}_{32:\overline{3}|}}{\ddot{a}^{aa}_{32:\overline{3}|}} = \frac{1}{\ddot{a}^{aa}_{32:\overline{3}|}} \cdot \frac{1}{D^{aa}_{32}} \left(\sum_{k=0}^{2} D^{aa}_{32+k} \cdot 1{,}8 \cdot i_{32+k} \cdot v^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1-\frac{1}{2}q^{aa}_{32+k}\right) \cdot \tilde{\ddot{a}}^{i}_{(32+k)+\frac{1}{2}:\,\overline{3-k-\frac{1}{2}}|}\right)$$

$$= \frac{1}{\ddot{a}^{aa}_{32:\overline{3}|}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{2} \frac{l^{aa}_{32+k}}{l^{aa}_{32}} \cdot 1{,}8 \cdot i_{32+k} \cdot v^{k+\frac{1}{2}} \cdot \left(1-\frac{1}{2}q^{aa}_{32+k}\right) \cdot \tilde{\ddot{a}}^{i}_{(32+k)+\frac{1}{2}:\,\overline{3-k-\frac{1}{2}}|}\right),$$

wobei folgende Varianten für $\tilde{\ddot{a}}^{i}_{(32+k)+\frac{1}{2}:\,\overline{3-k-\frac{1}{2}}|}$ anerkannt wurden:

(1) $\tilde{\ddot{a}}^{i}_{(32+k)+\frac{1}{2}:\,\overline{3-k-\frac{1}{2}}|} = v^{\frac{1}{12}} \cdot \left(1 - \frac{1}{12}q^{i}_{(x+k)}\right) \cdot \left(\frac{5}{12} \cdot \ddot{a}^{i}_{(32+k):\,\overline{3-k}|} + \frac{7}{12} \cdot \ddot{a}^{i}_{(32+k+1):\,\overline{2-k}|}\right)$

(2) $\tilde{\ddot{a}}^{i}_{(32+k)+\frac{1}{2}:\,\overline{3-k-\frac{1}{2}}|} = v^{\frac{1}{12}} \cdot \left(\frac{5}{12} \cdot \ddot{a}^{i}_{(32+k):\,\overline{3-k}|} + \frac{7}{12} \cdot \ddot{a}^{i}_{(32+k+1):\,\overline{2-k}|}\right)$

(3) $\tilde{\ddot{a}}^{i}_{(32+k)+\frac{1}{2}:\,\overline{3-k-\frac{1}{2}}|} = \frac{1}{2} \cdot \left(\ddot{a}^{i}_{(32+k):\,\overline{3-k}|} + \ddot{a}^{i}_{(32+k+1):\,\overline{2-k}|}\right) - \frac{1}{24}$

(4) $\tilde{\ddot{a}}^{i}_{(32+k)+\frac{1}{2}:\,\overline{3-k-\frac{1}{2}}|} = \frac{1}{2} \cdot \left(\ddot{a}^{i}_{(32+k):\,\overline{3-k}|} + \ddot{a}^{i}_{(32+k+1):\,\overline{2-k}|}\right) - \frac{1}{12}$

In allen Varianten benötigt man die folgenden Barwerte:

$$\ddot{a}^{aa}_{32:\overline{3}|} = \frac{D^{aa}_{32} + D^{aa}_{33} + D^{aa}_{34}}{D^{aa}_{32}} = 1 + \frac{l^{aa}_{33}}{l^{aa}_{32}} \cdot v + \frac{l^{aa}_{34}}{l^{aa}_{32}} \cdot v^2$$

$$= 1 + (1 - q^{aa}_{32} - 1{,}8 \cdot i_{32}) \cdot v + (1 - q^{aa}_{32} - 1{,}8 \cdot i_{32}) \cdot (1 - q^{aa}_{33} - 1{,}8 \cdot i_{33}) \cdot v^2$$

$$= 1 + (1 - 0{,}00079 - 1{,}8 \cdot 0{,}00228) \cdot (v + (1 - 0{,}00082 - 1{,}8 \cdot 0{,}00228) \cdot v^2)$$

$$= 1 + 0{,}995106 \cdot (0{,}97799 + 0{,}95176)$$

$$= 2{,}9203109$$

$$\ddot{a}^{i}_{(32):\,\overline{3}|} = 1 + \frac{l^{i}_{(32)+1}}{l^{i}_{32}} \cdot v + \frac{l^{i}_{(32)+2}}{l^{i}_{32}} \cdot v^2$$

$$= 1 + (1 - q^{i}_{(32)+1} - r_{(32)+1}) \cdot v + (1 - q^{i}_{(32)+1} - r_{(32)+1}) \cdot (1 - q^{i}_{(32)+2} - r_{(32)+2}) \cdot v^2$$

$$= 1 + (1 - 0{,}017 - 0{,}06911) \cdot (v + (1 - 0{,}01556 - 0{,}07037) \cdot v^2)$$

$$= 1 + 0{,}91389 \cdot (0{,}97799 + 0{,}87428)$$

$$= 2{,}692779$$

$$\ddot{a}^{i}_{(33)\,:\,2} = 1 + v \cdot (1 - 0{,}0182 - 0{,}06882)$$

$$= 1{,}89296$$

$$\ddot{a}^{i}_{(34)\,:\,\overline{1}|} = 1$$

Entscheidet man sich beispielsweise für die Variante (1), so folgt damit:

$$P_{32} = \frac{1}{2{,}9203109} \cdot (1{,}8 \cdot i_{32} \cdot v^{\frac{7}{12}} \cdot (1 - \frac{1}{2} q_{32}^{aa}) \cdot (1 - \frac{1}{12} q_{(32)}^{i}) \cdot (\frac{5}{12} \cdot 2{,}692779 + \frac{7}{12} \cdot 1{,}89296)$$

$$+ 0{,}995106 \cdot 1{,}8 \cdot i_{33} \cdot v^{\frac{19}{12}} \cdot (1 - \frac{1}{2} q_{33}^{aa}) \cdot (1 - \frac{1}{12} q_{(33)}^{i}) \cdot (\frac{5}{12} \cdot 1{,}89296 + \frac{7}{12})$$

$$+ 0{,}995106 \cdot 0{,}99507 \cdot 1{,}8 \cdot i_{34} \cdot v^{\frac{31}{12}} \cdot (1 - \frac{1}{2} q_{34}^{aa}) \cdot \frac{5}{12}$$

$$= \frac{1}{2{,}9203109} \cdot (0{,}0090022 + 0{,}005399 + 0{,}0015954)$$

$$= \frac{0{,}015996}{2{,}9203109} = 0{,}0056296$$

Für eine jährliche BU-Rente von 3600 € ergibt sich damit eine Jahresprämie von 19,72 €. (Hinweis: Bei der Variante (3) ergibt sich eine Jahresprämie von 20,27 €).

Aufgabe 2

Zu a)

Der Zusammenhang zwischen der Erlebensfallsumme VS und der jährlichen Prämie π ergibt sich wie im Seminar aufgrund der Äquivalenzgleichung:

$$_2p_x \cdot \frac{1}{(1+g)^2} \cdot VS = \pi(1 + \frac{1}{1+g} \cdot p_x) \quad .$$

Für g = 2.25% gilt:

$$VS = \frac{50000 \cdot (1 + \frac{1}{1+g} \cdot 0.9972)}{0.99427 \cdot (\frac{1}{1+g})^2} = 103\,852{,}24$$

und für g = 4 % berechnet sich VS zu 106 544,90 .

Zu (b)

Investiert man die erste Prämie komplett in Zerobonds zum Preis von P(0,2), so erhält man dafür bei Ablauf der Versicherung nach zwei Jahren den Betrag $\frac{\pi}{P(0,2)}$. Die zweite Jahresprämie muss daher für die endfällige Erlebensfallsumme nur noch folgenden Betrag erwirtschaften:

$$S := {_2p_x} \cdot VS - \frac{\pi}{P(0,2)} \quad .$$

Der hierfür notwendigerweise zu erwirtschaftende Zinssatz y berechnet sich nach der folgenden Äquivalenzgleichung:

(1) $$(1+y)\cdot p_x \cdot \pi = S\,.$$

Falls jetzt der benötigte Zinssatz y < 0 ist, wird keine Absicherung benötigt: Man erreicht in jedem Fall die aus der zweiten Prämie zu erwirtschaftende Summe S.
Für y > 0 gilt:
Ist zum Zeitpunkt T=1 der Preis von einjährigen Zerobonds höher als 1/(1+y), d.h. der dann gültige Marktzins zu niedrig, kann man mit der vorhandenen Prämie die Summe S durch Zerobonds nicht mehr erwirtschaften. Um für diesen Fall Vorsorge zu treffen, kauft man bei Vertragsabschluss Call-Optionen auf Zerobonds mit Ausübungspreis $\frac{1}{1+y}$ fällig zum Zeitpunkt 1, und zwar genau $(1+y)\cdot p_x \cdot \pi$ Stück zum Preis von $C_P(0,1,2,\frac{1}{1+y})$.

Zu c)

Bei den hier vorliegenden numerischen Daten ergeben sich folgende Werte:

Für g = 2.25% ist $\pi = 50\,000$ und daher S = 103 257,17 - $\frac{50000}{0.93}$ = 49 493,73 und hieraus ergibt sich nach Gleichung (1) für 1+y ein Wert kleiner als 1, d.h. selbst ohne einen Zins kann man die Summe S aus der zweiten Prämie bestreiten. Für g = 2,25 % wird also in diesem konkreten Beispiel einer zweijährigen Versicherung keine Absicherung über Call-Optionen benötigt.
Für g = 4 % ist VS= 105 934,40 und daher S = 105 934,40 - $\frac{50000}{0.93}$ = 52 170,96, und hieraus ergibt sich nach Gleichung (1) folgender Wert für 1+y: 1+y = 1,04634 und damit ist $\frac{1}{1+y} \approx 0{,}955704..$, das ist gerade der Ausübungspreis der angegebenen Call-Option. Hier wird in der Tat eine Absicherung für den Fall zu niedriger Marktzinsen nach einem Jahr benötigt.

Zu d)

Als Gesamtpreis für die Absicherung über Call-Optionen wie in (b) beschrieben ergibt sich so: $52170{,}51 \cdot 0{,}04 \approx 2086{,}82$ €.

Zu e)

Bei einer Verzinsung von 2 % im Prämiendepot stehen in unserem bzgl. der Biometrie deterministischen Modell im Fall g = 4 % gerade einmal $1{,}02 \cdot 50000 \cdot p_x$ = 50 857,20 zur Verfügung gegenüber den nach (c) benötigten € 52 170,96. Im zweiten Jahr wird also noch ein einjähriger Zins von mindestens 2,58% benötigt.
Im Fall g = 4% lässt sich also auch mit dem Prämiendepot eine Absicherung nicht vermeiden, während man nach c) für g = 2,25% keine solche benötigt.

Aufgabe 3 Beteiligung an den Bewertungsreserven (60 Punkte)

Zu a)

„Überschussbeteiligung“ ist der Oberbegriff für die zwei Ausprägungen der „Beteiligung am (handelsrechtlichen) Überschuss“ und der „Beteiligung an den Bewertungsreserven“. Die „Beteiligung am (handelsrechtlichen) Überschuss“ ist die auch vor der VVG-Reform bekannte Beteiligung der Versicherungsnehmer an dem handelsrechtlich ermittelten Überschüssen nach aufsichtsrechtlichen Vorgaben in einem verursachungsorientierten Verfahren gemäß §153 (2) VVG. Die „Beteiligung an den Bewertungsreserven“ ist die durch die VVG-Reform neu eingeführte Beteiligung der Versicherungsnehmer an den nach RechVersV jährlich ermittelten und publizierten Bewertungsreserven nach einem verursachungsorientierten Verfahren gemäß §153 (3) VVG.

Zu b)

V1 $S_j(m) = K_j(m)$

V2a $S_j(m) = \left(\min(m;t) + 2\cdot\max(m-t;0)\right)\cdot K_j(m)$ für laufende Beiträge,
$S_j(m) = 2m \cdot K_j(m)$ für Einmalbeiträge ($t = 0$)

V2b $S_j(m) = \left(\min(m;t) + 2\cdot\max(m-t;0)\right)\cdot K_j(m)$ für laufende Beiträge,
$S_j(m) = \left(1 + 2\cdot(m-1)\right)\cdot K_j(m) = (2m-1)\cdot K_j(m)$ für Einmalbeiträge ($(m \geq 1, t = 1)$)

Die am Wortlaut der verbalen Umschreibung orientierte gemeinsame Formel für laufende Beiträge lässt sich offenbar einfacher und übersichtlicher aufschreiben als

$$S_j(m) = \left(m + \max(m-t;0)\right)\cdot K_j(m)$$

V3 $S_j(m) = \sum_{\mu=1}^{m} K_j(\mu)$

Zu c)

Die ausgefüllte Tabelle findet sich auf der Folgeseite.

Zu d)

Die Verträge K1, K2, K3 und K6 weisen alle die gleiche Beitragssumme von 20 aus, gehören aber zum Bewertungsstichtag seit 5, 4, 2 und 1 Jahr dem Bestand an und werden über diesen Zeitraum durch Prämien finanziert. Bei Verfahren V1 ist der prozentuale Anteil unabhängig von der Dauer der Bestandszugehörigkeit jedoch konstant. Bei den Verfahren V2b und V3 fällt der prozentuale Anteil ungefähr mit der Dauer der Bestandszugehörigkeit, bei Verfahren V2a gilt dies auch für K1, K2 und K3, während K6 trotz im Vergleich zu K3 halber Bestandszugehörigkeit den gleichen Anteil an den Bewertungsreserven erhält.

Die Verträge K3 und K4 weisen beide die gleiche Beitragssumme von 20 aus, die in beiden Fällen aus genau zwei Zahlungen von jeweils 10 besteht. Während K3 zum Bewertungsstichtag erst zwei Jahre zum Bestand gehört, ist K4 bereits seit 5 Jahren im Bestand. Bei Verfahren V1 ist der prozentuale Anteil unabhängig von der Dauer der Bestandszugehörigkeit konstant. Bei den Verfahren V2a, V2b und V3 entspricht der prozentuale Anteil von K4 grob dem Drei- bis Vierfachen des prozentualen Anteils von K3, während die Dauer der Bestandszugehörigkeit von K4 dem 2,5fachen derjenigen von K3 entspricht.

Die Verträge K5, K6 verhalten sich ähnlich, weisen als Einmalbeiträge aber nur eine Zahlung aus. Die Dauer der Bestandszugehörigkeit beträgt 5 bzw. 1 Jahr. Bei Verfahren V1 ist der prozentuale Anteil konstant. Bei den Verfahren V2a und V3 entspricht der prozentuale Anteil von K5 grob dem Fünffachen des prozentualen Anteils von K6, was ungefähr dem Verhältnis der Dauern der Bestandszugehörigkeit entspricht. Beim Verfahren V2b entspricht der prozentuale Anteil von K5 grob dem Neunfachen des prozentualen Anteils von K6, was das Verhältnis der Dauern der Bestandszugehörigkeit von 5 deutlich übersteigt.

Ergänzung zu c)

Die ausgefüllte Tabelle sieht wie folgt aus:

		Jahr					Schlüssel nach Verfahren (Stichtag 2016)			
Kunde		**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**V1**	**V2a**	**V2b**	**V3**
K1	*Zustand*	*ppfl.*	*ppfl.*	*ppfl.*	*ppfl.*	*ppfl.*				
	Beitrag	4	4	4	4	4				
	Kapital	4	8	12	16	20				
						Schlüsselwert	20	100	100	60
						Prozentanteil	16,7%	16,1%	17,2%	17,1%
K2	*Zustand*	-	*ppfl.*	*ppfl.*	*ppfl.*	*ppfl.*				
	Beitrag	-	5	5	5	5				
	Kapital	-	5	10	15	20				
						Schlüsselwert	20	80	80	50
						Prozentanteil	16,7%	12,9%	13,8%	14,3%
K3	*Zustand*	-	-	-	*ppfl.*	*ppfl.*				
	Beitrag	-	-	-	10	10				
	Kapital	-	-	-	10	20				
						Schlüsselwert	20	40	40	30
						Prozentanteil	16,7%	6,5%	6,9%	8,6%
K4	*Zustand*	*ppfl.*	*ppfl.*	*pf.*	*pf.*	*pf.*				
	Beitrag	10	10	0	0	0				
	Kapital	10	20	20	20	20				
						Schlüsselwert	20	160	160	90
						Prozentanteil	16,7%	25,8%	27,6%	25,7%
K5	*Zustand*	*EP*	*EP*	*EP*	*EP*	*EP*				
	Beitrag	20	0	0	0	0				
	Kapital	20	20	20	20	20				
						Schlüsselwert	20	200	180	100
						Prozentanteil	16,7%	32,3%	31,0%	28,6%
K6	*Zustand*	-	-	-	-	*EP*				
	Beitrag	-	-	-	-	20				
	Kapital	-	-	-	-	20				
						Schlüsselwert	20	40	20	20
						Prozentanteil	16,7%	6,5%	3,4%	5,7%
						Summe der Schlüsselwerte	120	620	580	350

Zu e)

Das Verfahren V1 gilt üblicherweise nicht als verursachungsorientiert, da es allen 6 Beispielkunden den gleichen Anteil an den Bewertungsreserven zuordnet, obwohl sie angesichts der Unterschiede in ihrer Cash Flow Struktur häufig deutlich unterschiedlich an der Bildung der Bewertungsreserven beteiligt waren.

Zu f)

Nachfolgend sind drei Beweisskizzen (eine anschauliche, eine analytische und eine geometrische) angegeben, die alle auf dem gleichen Sachverhalt beruhen. Sie nähern den Verlauf der Kapitalien (was wegen des vor und nach dem Ende der Beitragszahlungsdauer nur schwach konvexen Verlaufs der Deckungskapitalien vertretbar ist) linear an, d.h. wie auch bei den konkreten Zahlen in Aufgabenteil c) wird der Einfluss von Zins, Biometrie und Kosten vernachlässigt, und das Kapital entspricht der aufgelaufenen Beitragssumme. Wählt man o.E. den laufenden Beitrag zu 1, ist dann

$$K_j(m) = \begin{Bmatrix} m, & m \le t \\ t, & t < m \end{Bmatrix} = \min(m;t)$$

Anschaulich kann man daher argumentieren, dass

- während der Beitragszahlungsdauer Kapitalien von 1, 2, 3, …, t aufgebaut werden, deren Summe näherungsweise berechnet werden kann, indem man das „durchschnittliche“ Kapital von grob geschätzt ½ t aufsummiert, d.h. mit der Anzahl t der Zahlungen malnimmt,
- nach Ablauf der Beitragszahlungsdauer die Kapitalien konstant gleich t sind und insgesamt $(m - t)$ mal anfallen.

Man sieht direkt, dass man das zum Bewertungsstichtag vorhandene Kapital min(m, t) insgesamt mit der Anzahl der abgelaufenen Jahre multipliziert und dabei (wegen des Faktors ½ im ersten Fall) die prämienpflichtigen Jahre nur halb anzusetzen sind. Geht man äquivalent zum Doppelten des Schlüssels über (denn nur die Relationen der Schlüsselwerte untereinander zählen), sind die prämienpflichtigen Jahre einfach und die prämienfreien Jahre doppelt zu zählen – das liefert genau den Schlüssel V2a und V2b, was zu zeigen war.

Analytisch ist bei Verfahren V3 gemäß Aufgabenteil b) für laufenden Beitrag 1 und $m > t$

$$S_j(m) = \sum_{\mu=1}^{m} K_j(\mu) = \sum_{\mu=1}^{m} \min(\mu;t) = \sum_{\mu=1}^{t} \mu + \sum_{\mu=t+1}^{m} t = \frac{t \cdot (t+1)}{2} + (m-t) \cdot t = (\frac{t+1}{2} + (m-t)) \cdot K_j(m)$$

Da man jeden Schlüssel durch ein beliebiges Vielfaches seiner selbst ersetzen kann, ohne die Schlüsselung zu ändern (denn nur die relativen Verhältnisse der Schlüsselwerte untereinander sind für die Schlüsselung relevant), kann man zum Doppelten übergehen und erhält

$$2 \cdot S_j(m) = (t + 1 + 2 \cdot (m-t)) \cdot K_j(m) \approx (t + 2 \cdot (m-t)) \cdot K_j(m)$$

Der rechte Term ist aber gerade der Schlüssel aus Verfahren V2a und V2b.

Für $m \le t$ ist ebenso

$$S_j(m) = \sum_{\mu=1}^{m} K_j(\mu) = \sum_{\mu=1}^{m} \min(\mu;t) = \sum_{\mu=1}^{m} \mu = \frac{m \cdot (m+1)}{2} = \frac{m+1}{2} \cdot K_j(m)$$

und damit $2 \cdot S_j(m) = (m+1) \cdot K_j(m) \approx m \cdot K_j(m)$

so dass wiederum der rechte Term dem Schlüssel aus Verfahren V2a und V2b entspricht.

Für Einmalbeiträge ist in linearer Näherung $K_j(1) = K_j(2) = ... = K_j(m)$, also gilt nach Verfahren V3 $S_j(m) = \sum_{\mu=1}^{m} K_j(\mu) = m \cdot K_j(m)$

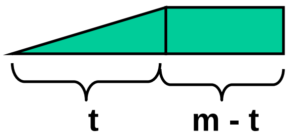
Damit ist wiederum nach Übergang zum Doppelten des Schlüssels

$2 \cdot S_j(m) = 2m \cdot K_j(m)$

was nach Aufgabenteil b) gerade dem Schlüssel gemäß V2a entspricht.

Insgesamt ist damit die Behauptung gezeigt.

<u>Geometrisch</u> ergibt sich eine anschauliche Beweisskizze daraus, dass man bei laufenden Beiträgen der Höhe 1 das Kapital nach *m* Jahren als Säulen der Breite 1 und Höhe *m* (für $m \le t$) bzw. *t* (für $t<m$) darstellt. Der Schlüsselwert nach Verfahren V3 entspricht damit einer „Riemann-Summe" für einen Funktionsgraph aus einem Dreieck und ggf. einem Rechteck.



Das Kapital entspricht der Höhe *t* des Rechtecks; die Fläche ergibt sich aus der Multiplikation von Höhe mal Grundseite (beim Rechteck) bzw. von Höhe mal Grundseite mal ½ (beim Dreieck). Hieraus ergibt sich unmittelbar, dass prämienfreie Zeiten (Grundseite des Rechtecks) doppelt so stark zu gewichten sind wie prämienpflichtige Zeiten (Grundseite des Dreiecks).

Präzisiert man diesen Gedanken (die Länge der Grundseite des Dreiecks ist genau genommen *t* + 1 bei unveränderter Höhe *t*, was man sofort sieht wenn man die echte Riemann – Summe genauer zeichnet), so erhält man genau den Beweisgang, der zu Beginn analytisch formuliert wurde.

Der Beweisgang zeigt zusätzlich, dass der Schlüssel V2c

$$S_j(m) = \left(1 + \min(m;t) + 2 \cdot \max(m-t;0)\right) \cdot K_j(m) = \begin{Bmatrix} m+1, & m \le t \\ t+1+2(m-t), & t < m \end{Bmatrix} \cdot K_j(m)$$

für laufende Beiträge und gleiche Formel mit *t* = 1 für Einmalbeiträge im linearen Modell (ohne Zins, Biometrie und Kosten) äquivalent zum Schlüssel V3 ist.

In der Tabelle zu Aufgabenteil c) wird dies darin deutlich, dass die Schlüsselwerte für den Schlüssel V2c genau dem um 20 Geldeinheiten erhöhten Schlüssel V2b entsprechen; dies ist gleichzeitig genau das Doppelte der jeweiligen Schlüsselwerte für den Schlüssel V3.