DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen)

Klausur vom 24.10.2009

Die Klausur besteht aus 3 Aufgaben, die mit insgesamt 180 Punkten bewertet werden. Um diese maximale Punktzahl erreichen zu können, müssen alle Aufgaben bearbeitet werden. Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 72 Punkte erforderlich.

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Zugelassenes Hilfsmittel: Taschenrechner

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (60 Punkte)

Im Laufe der Jahre hat der Verantwortliche Aktuar eines Lebensversicherungsunternehmens unterschiedlichste Anfragen zur Rückdeckung von Invaliditätsleistungen aus Versorgungszusagen erhalten.

a) Skizzieren Sie zunächst einige der Probleme, die grundsätzlich auftreten können, wenn ein Berufsunfähigkeitstarif des Versicherers für die Rückdeckung verwendet werden soll.

Insbesondere sind in der Vergangenheit folgende Varianten der Abdeckung des Berufsunfähigkeitsrisikos angefragt worden (gehen Sie bitte der Einfachheit halber von selbstständigen Berufsunfähigkeitsversicherungen aus und setzen Sie das Eintrittsalter gleich x, Versicherungsdauer = Beitragszahlungsdauer = 65 – x):

A) jährliche Berufsunfähigkeitsrente der Höhe R, zahlbar bis zum Alter 65, längstens bis zum Tod oder bis zur Reaktivierung
B) jährliche Berufsunfähigkeitsrente der Höhe R, lebenslänglich zahlbar, sofern keine Reaktivierung eintritt
C) wie B); zusätzlich wird bei Tod des Invaliden das vorhandene Deckungskapital fällig (gedanklich zur Finanzierung einer Hinterbliebenenrente); bei Tod des Aktiven wird keine Leistung gezahlt.

Beantworten Sie bitte dazu die nachfolgenden weiteren Fragen:

b) Geben Sie in den Fällen A) bis C) die benötigten und gegebenenfalls üblichen biometrischen Rechnungsgrundlagen an und konstruieren Sie die zugehörigen Ausscheideordnungen.
c) Wie lautet jeweils die Formel für den Nettoeinmalbeitrag unter Verwendung von Kommutationswerten?
d) Wie lautet jeweils die Formel für den laufenden Jahresnettobeitrag, der von den Aktiven bis zum Eintritt des Versicherungsfalls, längstens bis zum Alter 65 zu zahlen ist?

Aufgabe 2 (60 Punkte)

Kapitalisierungsprodukt und eigene Gewinnabrechnung

Die Fähigkeit der deutschen Lebensversicherer, stabile Erträge in angemessener Höhe durch eine betont sicher ausgerichtete Kapitalanlage zu erzielen, hat in der Finanzmarktkrise eine stark erhöhte Wertschätzung erfahren. Aus diesem Grund sollen Sie als Aktuar für einen deutschen Lebensversicherer ein Sparprodukt gegen Einmalbeitrag als Kapitalisierungsprodukt entwickeln, das mit Ausnahme des nicht vorhandenen biometrischen Risikos nach Art der konventionellen Lebensversicherungsprodukte kalkuliert ist. Das Produkt soll

- für jedes Jahr der Vertragslaufzeit n einen jährlichen Rechnungszins i garantieren, also insbesondere eine garantierte Summe bei Vertragsende in entsprechender Höhe zusagen,
- bei Tod das vorhandene Guthaben auszahlen, also kein riskiertes Kapital vorsehen,
- eine einmalige Vermittlungsprovision von $\alpha^{Provision} = 3{,}8\%$ der Bruttoeinmalprämie (BEP) finanzieren,
- die auf $\alpha^{PE,PM} = 0{,}3\%$ der BEP geschätzten einmalig anfallenden Entwicklungskosten für Produktentwicklung und Produktmanagement decken und
- einen laufenden Verwaltungskostenzuschlag von $\gamma = 0{,}5\%$ der BEP für jedes Jahr der Vertragslaufzeit vorsehen.

a) Wie hoch setzen Sie die einmaligen Abschlusskosten α an? (2 Punkte) Kommentieren Sie kurz die rechtliche Zulässigkeit Ihres Ansatzes (2 Punkte).

b) Geben Sie zu einer garantierten Summe von 1 zum Vertragsablauf die Formeln an für

- die Nettoeinmalprämie (NEP) (2 Punkt)
- die Bruttoeinmalprämie (BEP) (4 Punkte)

Wie lautet die Formel für die Garantiesumme nach n Jahren bei einer BEP von 1? (2 Punkte)

c) Nach Rücksprache mit den Kapitalanlegern Ihres Unternehmens legen Sie Ihrer Kalkulation folgende Annahmen über die Gestalt der Zinsstrukturkurve von Euro-Staatsanleihen in den nächsten Jahren zu Grunde:

Im Bereich von	zwischen
1 – 3 Jahren	0,5% und 1,5%
4 – 5 Jahren	1,0% und 2,0%
6 – 7 Jahren	1,5% und 2,5%
8 – 10 Jahren	2,0% und 3,0%
Über 10 Jahren	2,2% und 3,2%

Marktbeobachtung und Gespräche mit dem Vertrieb festigen Sie in der Überzeugung, dass die zu erwartenden Vertragslaufzeiten drastisch kürzer als bei Lebensversicherungen ausfallen werden und häufig nur ein Viertel, selten mehr als die Hälfte der ansonsten üblichen Laufzeiten betragen werden.

Begründen Sie auf diese Annahmen gestützt Ihre Wahl des garantierten Rechnungszinses. Geben Sie einen konkreten Zahlenwert für den Rechnungszins an. (8 Punkte)

d) Wie soll der Rückkaufswert des Produktes aussehen? Schlagen Sie für die ersten Jahre der Vertragslaufzeit eine geeignete Berechnungsmethode vor oder geben Sie alternativ Stornoabschläge vom Deckungskapital an, falls Sie den Rückkaufswert auf die klassische Weise berechnen wollen. Begründen Sie Ihre Wahl kurz. (10 Punkte)

Ein mittelständisches Unternehmen möchte Teile seiner Deckungsmittel für betriebliche Altersversorgung und Zeitwertkonten im Sicherungsvermögen Ihres Unternehmens anlegen. Zur Diskussion steht zunächst ein Betrag von einmalig 5 Mio. €. Sie sind aufgefordert, hierfür ein Angebot auf Basis des o.a. Kapitalisierungsprodukts abzugeben und dabei eine eigene Gewinnabrechnung vorzusehen. Der Vertrag soll von einer hierauf spezialisierten Kollegin verwaltet und jährlich abgerechnet werden; hierfür setzen Sie als best estimate für Profit Test Zwecke 4 Personentage a 700 Euro an, die Sie für die Gewinnabrechnung sicherheitshalber auf 5 Tage a 1000 Euro aufrunden. Der firmeneigene Vermittler erwartet eine Provision von 15.000 Euro.

e) Welche Einrichtungs- und Verwaltungskosten setzen Sie im Gewinnabrechnungsschema an? Begründen Sie Ihre Setzung kurz. (5 Punkte)

f) Welche Höhe erwarten Sie für die Gewinnreserve nach der ersten Abrechnung mindestens, sofern Sie ein nicht negatives Zins- und sonstiges Ergebnis unterstellen und dem Vertragspartner 95% des Überschusses gutschreiben? (10 Punkte)

   Die Aktienquote Ihres Unternehmens beträgt 10%. Im Stress Test unterziehen Sie das Aktienportfolio einem hypothetischen Wertverlust von 35%. Reicht die im ersten Jahr zu erwartende Gewinnreserve aus, um die hierdurch ausgelöste Kapitalanforderung im ersten Jahr anteilig zu bedecken? (5 Punkte)

g) Schätzen Sie eine Untergrenze für den Profit aus dem Vertrag, indem Sie nur die Gewinnquelle Kosten betrachten, einen Risikodiskontsatz von 10% ansetzen und von einer Verbleibswahrscheinlichkeit von 90% pro Jahr ausgehen. (10 Punkte)

Aufgabe 3 (60 Punkte)

Für eine zweijährige reine Erlebensfallversicherung eines 60-jährigen Mannes mit zwei gleich hohen Jahresprämien π sind folgende Daten bekannt:
Die ein- bzw. zweijährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines 60-jährigen Mannes betragen nach der DAV-Sterbetafel 2008 TM : $p_{60} = 0.9896$, ${}_2p_{60} = 0.9782$.

(a) Mit diesen Daten berechne man bei einer Ablaufleistung von € 100 000.- im Erlebensfall die notwendige Jahresnettoprämie bei einem Garantiezins von 2.25% bzw. alternativ von 3% .

Die Anlagestrategie des Versicherungsunternehmens sieht nur Investments in Zerobonds mit dem gleichen Ablaufdatum wie die entsprechende Versicherung vor. Die Vorgabe an den Aktuar lautet, dass nur solche Garantiezinsen bei der Kalkulation verwendet werden dürfen, die für diese Versicherungen keine Absicherung des Zinsversprechens etwa über Europäische Call-Optionen auf Zerobonds benötigen. Hierbei wird unterstellt, dass auch nach einem Jahr die Preise für Zerobonds stets unter 1 liegen, d.h. dass auch in einem Jahr die Kapitalmärkte keine negativen Zinsen ausweisen.

Aufgrund der aktuell gültigen Zinsstrukturkurve kennt man die aktuellen Preise von ein- bzw. zweijährigen Zerobonds: P(0,1) = 0.963 P(0,2) = 0.93 sowie den Preis eines Europäischen Calls auf einen Zerobond mit Ausübungspreis 0.9848:

$$C_P(0,1,2,0.9848) = 0.004 .$$

Hierbei bezeichnen wie üblich:

- P(t,T) den Preis eines Zerobonds zum Zeitpunkt t und Ablaufdatum T , so dass also zum Ablaufdatum T gilt P(T,T) = 1;
- $C_P(t,T,T_B,X)$ bezeichnet zum Zeitpunkt t den Preis einer Europäischen Call-Option mit Ausübungspreis X, Laufzeit T auf einen Zerobond, der zu einem Zeitpunkt $T_B \geq T$ fällig wird, so dass z.B. der Wert der Call-Option zum Zeitpunkt T gerade $C_P(T,T,T_B,X) = (P(T,T_B) - X)^+ = \max(P(T,T_B) - X, 0)$ ist.

(b) Wie kann generell für die genannte Versicherung eine Absicherung eines Garantiezinses mit Call-Optionen auf Zerobonds vorgenommen werden?

(c) Man prüfe nach, ob bei einem Garantiezins von 2.25 % bzw. 3 % eine solche Absicherung in dem hier vorliegenden Fall benötigt wird.

(d) Falls eine Absicherung notwendig ist, was wäre dann der Preis der Absicherung bei den hier vorliegenden numerischen Daten mittels Call-Optionen auf Zerobonds ?

<u>Anleitung</u>: Hierbei gehe man wie im Seminar von einem deterministischen Ansatz für die Biometrie aus, die einzige Unsicherheit besteht also hier in der zukünftigen Zinsentwicklung. Außerdem werden Abschluss- und Verwaltungskosten in dieser Betrachtung komplett außen vor gelassen.

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

Zu a)

Unter anderem können (ohne Anspruch auf Vollständigkeit) folgende Probleme auftreten

- Die Zusage des Unternehmens ist im Bedingungswerk des Versicherers nicht abbildbar; man beachte in diesem Zusammenhang auch die Anforderungen des neuen VVG an die AVB eines Lebensversicherers.
- Die (komplexe) Zusage des Unternehmens ist in der IT des Versicherers nicht abbildbar.
- Die Zusage des Unternehmens enthält Komponenten, für die keine Rechnungsgrundlagen vorliegen.
- Die Höhe der Rückdeckung ist nicht leicht optimal bestimmbar, da die Rechnungsgrundlagen des zugrunde liegenden Durchführungswegs (Beispiel: unmittelbare Versorgungszusage) nicht mit den aufsichtsrechtlich zulässigen Rechnungsgrundlagen des Lebensversicherungsunternehmens übereinstimmen.
- Durch Besonderheiten in der Zusammensetzung der Belegschaft kann ein Kumulrisiko entstehen, das eine Anpassung der Rechnungsgrundlagen des Versicherers erforderlich macht.
- Auch die oft eingeschränkten Möglichkeiten des Versicherers bei der Risiko- und Leistungsprüfung können es erforderlich machen, einzelne Rechnungsgrundlagen des Versicherers zu überprüfen.

Zu b)

Variante A) Biometrische Rechnungsgrundlagen:

$q^{aa}_{(x)+m}$ = Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x + m, der im Alter x versichert wurde, als Aktiver im folgenden Jahr zu sterben (üblicherweise Sterbetafel DAV 1994 T, obwohl eine Erlebensfalltafel eigentlich angemessener wäre)

$i_{(x)+m}$ = Invalidisierungswahrscheinlichkeit für das Alter x + m bei Versicherungsbeginn im Alter x (Tafel DAV 1997 I für die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten)

$q^{i}_{(z)+m}$ = Wahrscheinlichkeit eines (z + m) – jährigen Berufsunfähigen, der im Alter z berufsunfähig wurde, zwischen z + m und z + m + 1 zu sterben (Sterbetafel DAV 1997 TI)

$r_{(z)+m}$ = Wahrscheinlichkeit eines (z + m) - jährigen Berufsunfähigen, der im Alterzx berufsunfähig wurde, zwischen z + m und z + m + 1 reaktiviert zu werden (Tafel DAV 1997 RI)

Daraus abgeleitete Ausscheideordnungen:

<u>Aktive</u> (ohne Berücksichtigung von Reaktivierung)

$$l^{aa}_{(x)+m+1} = l^{aa}_{(x)+m} \cdot (1 - q^{aa}_{(x)+m} - i_{(x)+m}) \text{ für } x + m \leq 65$$

Invalide

$$l^{i}_{(z)+m+1} = l^{i}_{(z)+m} \cdot (1 - q^{i}_{(z)+m} - r_{(z)+m}) \text{ für } z + m \leq 65$$

Hinweis: Natürlich ist es genauso richtig, mit einem multiplikativen Ansatz zu arbeiten.

Variante B) Biometrische Rechnungsgrundlagen

$q^{aa}_{(x)+m}$ und $i_{(z)+m}$ sind bis zum Alter 65 grundsätzlich wie in A) zu wählen, allerdings müssten die $i_{(z)+m}$ für Alter knapp unter 65 möglicherweise erhöht werden, um Selektionseffekte zu vermeiden (lebenslängliche Zahlung der BU-Rente !)

Die Grundlagen $q^{i}_{(x)+m}$ und $r_{(z)+m}$ liegen für die Alter über 65 nicht vor und müssen ggf. geschätzt werden. Dabei ist es sinnvoll, die Reaktivierungswahrscheinlichkeiten auf 0 zu setzen . Die Invalidensterblichkeit könnte zum einen mit der „normalen“ Rentnersterblichkeit (DAV 2004 R; sehr vorsichtig) gleichgesetzt oder aber durch geeignete Fortschreibung der $q^{i}_{(z)+m}$ gewonnen werden.

Variante C) Biometrische Rechnungsgrundlagen

Die Ausscheideursache Tod entfällt für Invalide (Satz von Cantelli); daher muss die Ausscheideordnung für Invalide modifiziert werden:

$$l^{i}_{(z)+m+1} = l^{i}_{(z)+m} \cdot (1 - r_{(z)+m}) \text{ für } z + m \leq 65$$

$$l^{i}_{(z)+m+1} = l^{i}_{(z)+m} \text{ für } z + m \geq 65 \text{ (da sinnvollerweise } r_{(z)+m} = 0 \text{ für } z + m \geq 65)$$

$$l^{i}_{(z)+m} = 0 \text{ für } z + m \geq \omega$$

Zu c)

Setzt man bei vorgegebenem Rechnungszins zunächst einmal generell

$$D^{i}_{(z)+m} = l^{i}_{(z)+m} \cdot v^{z+m},$$

$$N^{i}_{(z)+m} = \sum_{k=0}^{\omega - z - m} D^{i}_{(z)+m+k},$$

und dann

für Variante A

$$\ddot{a}^{i}_{(z)+m:\,\overline{65-z-m|}} = \frac{N^{i}_{(z)+m} - N^{i}_{(z)+65-z}}{D^{i}_{(z)+m}}$$

$$\ddot{a}^{i}_{(z)+m+\frac{1}{2}:\,\overline{65-z-m-\frac{1}{2}|}} = \left(\frac{\ddot{a}^{i}_{(z)+m:\,\overline{65-z-m|}} + \ddot{a}^{i}_{(z)+m+1:\,\overline{65-z-m-1|}}}{2} - \frac{1}{24}\right) \cdot v^{\frac{1}{2}}$$

$$D^{ai}_{(x)+m} = l^{aa}_{(x)+m} \cdot i_{(x)+m} \cdot (1 - \frac{1}{2} q^{aa}_{(x)+m}) \cdot v^{x+m} \cdot \ddot{a}^{i}_{(x)+m+\frac{1}{2}:\overline{65-x-m-\frac{1}{2}}|},$$

so lässt sich der Nettoeinmalbeitrag aus der Beziehung

$$\ddot{a}^{ai}_{x:\overline{65-x}|} = R \cdot \frac{\sum_{k=0}^{65-x-1} D^{ai}_{(x)+k}}{D^{aa}_x} =: R \cdot \frac{N^{ai}_{x:\overline{65-x}|}}{D^{aa}_x} \qquad (+)$$

darstellen mit $D^{aa}_{(x)+k} = l^{aa}_{(x)+k} \cdot v^{x+k}$ und $D^{aa}_x := D^{aa}_{(x)}$.

Für die für die Varianten B und C erhält man analog

$$\ddot{a}^{i}_{(z)+m} = \frac{N^{i}_{(z)+m}}{D^{i}_{(z)+m}}$$

$$\ddot{a}^{i}_{(z)+m+\frac{1}{2}} = (\frac{\ddot{a}^{i}_{(z)+m} + \ddot{a}^{i}_{(z)+m+1}}{2} - \frac{1}{24}) \cdot v^{\frac{1}{2}}$$

$$D^{ai}_{(x)+m} = l^{aa}_{(x)+m} \cdot i_{(x)+m} \cdot (1 - \frac{1}{2} q^{aa}_{(x)+m}) \cdot v^{x+m} \cdot \ddot{a}^{i}_{(x)+m+\frac{1}{2}}$$

und schließlich analog zu (+)

$$\ddot{a}^{ai}_{x:\overline{65-x}|} = R \cdot \frac{\sum_{k=0}^{65-x-1} D^{ai}_{(x)+k}}{D^{aa}_x} =: R \cdot \frac{N^{ai}_x}{D^{aa}_x}$$

Zu d)

Die Jahresnettoprämie P^{ai}_x erhält man in allen Varianten, indem man den Nettoeinmalbeitrag aus c) durch $\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{65-x}|} = \frac{\sum_{k=0}^{64-x} D^{aa}_{(x)+k}}{D^{aa}_x}$ teilt.

Aufgabe 2

a) $\alpha = \alpha^{Provision} + \alpha^{PE,PM} = 3{,}8\% + 0{,}3\% = 4{,}1\%$

Dies ist rechtlich zulässig, da

- die Abschlusskostenbegrenzung des VVG für Einmalprämien nicht greift und
- formal das VVG für Kapitalisierungsprodukte ohnehin nicht gilt

b) Bei Summe 1 ist $NEP = v^n$, und $BEP = v^n + \alpha \cdot BEP + \gamma \cdot BEP \cdot a_n$ führt zu

$$BEP = v^n \cdot \frac{1}{1 - \alpha - \gamma \cdot a_n}$$

Aus $1 = v^n \cdot \frac{1}{1 - \alpha - \gamma \cdot a_n} \cdot S$ folgt $S = r^n \cdot (1 - \alpha - \gamma \cdot a_n)$

c) Sparanlagen haben in der Regel kürzere Anlagehorizonte als Versicherungen. Anlagedauern von 10 und mehr Jahren werden eher selten sein, außerdem sind Sicherheitsabschläge von 15% - 40% (DeckRV) implizit nahe liegend. Ein Rechnungszins > 2% ist daher wohl kaum zu rechtfertigen. Legt man zwischen 8 – 10 Jahren an, berücksichtigt Vorfälligkeitsaspekte durch geeignete Wahl des Rückkaufswertes und wählt einen hohen Sicherheitsabschlag von 40%, so ist z.B. 0,6 * (2+3)/2 = 1,5% ein nahe liegender Rechnungszins. Andere Setzungen bleiben unbenommen – die Themen Fristigkeit, Vorfälligkeit und Sicherheitsabschlag sind aber nachvollziehbar zu berücksichtigen.

d) Hier sind mindestens zwei Alternativen denkbar:
- Parallele Berechnung eines retrospektiven Deckungskapitals mit fristenkongruentem, jährlich wechselndem Rechnungszins als Rückkaufswert, ggf. zusätzlich kleiner Stornoabschlag. Hier ist es hinreichend, die Idee nachvollziehbar zu erläutern.
- Als Näherung hiervon (vereinfachte Datenführung!) sind auch dauerabhängige Stornoabschläge denkbar, die die Differenz zwischen dem fristenkongruent berechneten retrospektiven Deckungskapital und dem mit konstantem Rechnungszins berechneten Deckungskapital gedanklich pauschal ausgleichen. Auch hier ist es hinreichend, die Idee nachvollziehbar zu erläutern. Stark vereinfachend (ohne Zinseszinsen) kann man z.B. für Rechnungszins 2% und unterstellte Zinsstruktur = Mittelwert der tabellierten Spannen wählen
  - Nach 1 Jahr 1*2% - 1*1% = 1%
  - Nach 2 Jahren 2*2% - 2*1% = 2%
  - Nach 3 Jahren 3*2% - 3*1% = 3%
  - Nach 4 Jahren 4*2% - 4*1,5% = 2%
  - Nach 5 Jahren 5*2% - 5*1,5%= 2,5%
  - Nach 6 Jahren 6*2% - 6*2% = 0%

  usw. Das kann man ggf. auch pauschalieren auf z.B. 3% in den ersten 5 Jahren.

Naheliegende Hinweise auf eine dauerabhängige Zinsgewinndeklaration wurden bei der Bewertung ggf. honoriert.

e) An Verwaltungskosten werden angesetzt 5 Tage a 1000 Euro, das sind 5000 Euro oder 1‰ der BEP. An Abschlusskosten werden angesetzt 6‰ der BEP, die sich aus 15.000 Euro entsprechend 3‰ Provision zzgl. unverändert 3‰ für Produktentwicklung und Produktmanagement ergeben.

f) Die Gewinnreserve (RfB) ist offenbar mindestens 95% des Kostenüberschusses. Der Kostenüberschuss in der eigenen Gewinnabrechnung ist aber aus Abschlusskosten 41‰ - 6‰ = 38‰-3‰=35‰ einmalig und aus Verwaltungskosten 5‰ - 1‰ = 4‰ laufend, also im ersten Jahr 35‰+4‰=39‰ einmalig (und ab da 4‰ laufend). 95% des Erstjahres-Kostenüberschusses sind also 37,05‰; mindestens so hoch ist die Gewinnreserve.

Die zu erwartende anteilige Kapitalanforderung beträgt 35% von 10% = 3,5% der Kapitalanlagen. Das ist offenbar weniger als 3,5% der BEP, also wiederum weniger als 37,05‰ der BEP, damit weniger als die Erstjahres-Gewinnreserve.

g) Der Profit übersteigt den Barwert der Kostengewinne nach Überschussbeteiligung (aus Unternehmenssicht). Der Unternehmensgewinn aus dem Abschlusskostenüberschuss des ersten Jahres beträgt 5% von 35‰, also 1,75‰ (s.o.). Der Unternehmensgewinn aus Verwaltungskosten beträgt jährlich 5% von 4‰ = 0,2‰ aus dem Versichereranteil des Abrechnungsüberschusses zzgl. der Marge zwischen best estimate Verwaltungskosten von 4 Tagen a 700 Euro entsprechend 2.800 Euro und den in der eigenen Gewinnabrechnung angesetzten 5.000 Euro, das sind 2.200 Euro oder 0,44‰, insgesamt also jährlich 0,64‰. Der Profit übersteigt also den Wert von

$$1{,}75‰ + 0{,}64‰ \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{0{,}9}{1{,}1} \right)^s \approx 1{,}75‰ + 0{,}64‰ \cdot \frac{0{,}8}{1 - 0{,}8} = 1{,}75‰ + 2{,}56‰ \approx 4{,}3‰$$

und ist damit mehr als 4‰ der BEP, das sind ca. 20.000 Euro. Andere Näherungen der Summe oder hinreichend langfristige endliche Summen wurden genau so anerkannt.

Aufgabe 3

Zu (a):

Der Zusammenhang zwischen der Erlebensfallsumme VS = 100 000 und der jährlichen Prämie π ergibt sich wie im Seminar aufgrund der Äquivalenzgleichung:

$${}_2p_x \cdot \frac{1}{(1+g)^2} \cdot VS = \pi(1 + \frac{1}{1+g} \cdot p_x) \quad .$$

Für g = 2.25% gilt:

$$\pi = \frac{0.9782 \cdot 100000 \cdot (\frac{1}{1+g})^2}{1 + \frac{1}{1+g} \cdot 0.9896} = 47\,546.09,$$

und für g = 3 % berechnet sich π zu 47 024.76 .

Zu (b):

Investiert man die erste Prämie komplett in Zerobonds zum Preis von P(0,2), so erhält man dafür bei Ablauf der Versicherung nach zwei Jahren den Betrag $\frac{\pi}{P(0,2)}$. Die zweite Jahresprämie muss daher für die endfällige Erlebensfallsumme nur noch folgenden Betrag erwirtschaften:

$$S := {}_2p_x \cdot VS - \frac{\pi}{P(0,2)} \quad .$$

Der hierfür notwendigerweise zu erwirtschaftende Zinssatz y berechnet sich nach der folgenden Äquivalenzgleichung:

(1) $$(1+y) \cdot p_x \cdot \pi = S \; .$$

Falls jetzt der benötigte Zinssatz y < 0 ist, wird keine Absicherung benötigt: Man erreicht in jedem Fall die aus der zweiten Prämie zu erwirtschaftende Summe S.

Für y > 0 gilt:
Ist zum Zeitpunkt T=1 der Preis von einjährigen Zerobonds höher als 1/(1+y), d.h. der dann gültige Marktzins zu niedrig, kann man mit der vorhandenen Prämie die Summe S durch Zerobonds nicht mehr erwirtschaften. Um für diesen Fall Vorsorge zu treffen, kauft man bei Vertragsabschluss Call-Optionen auf Zerobonds mit Ausübungspreis $\frac{1}{1+y}$ fällig zum Zeitpunkt 1, und zwar genau $(1+y)\cdot p_x \cdot \pi$ Stück zum Preis von $C_P(0,1,2,\frac{1}{1+y})$.

Zu (c):

Bei den hier vorliegenden numerischen Daten ergeben sich folgende Werte:

Für g = 2.25% ist $\pi = 47\ 546.09$ und daher S = 97 820 - $\frac{47546.09}{0.93}$ = 46 695.17 und hieraus ergibt sich nach Gleichung (1) folgender Wert für 1+y: 1+y = 0.9924,
d.h. selbst ohne einen Zins kann man die Summe S aus der zweiten Prämie bestreiten. Für g = 2.25 % wird also in diesem konkreten Beispiel einer zweijährigen Versicherung keine Absicherung über Call-Optionen benötigt.

Für g = 3 % ist $\pi = 47\ 024.76$ und daher S = 97 820 - $\frac{47024.76}{0.93}$ = 47 255.74 und hieraus ergibt sich nach Gleichung (1) folgender Wert für 1+y: 1+y = 1.015472798.. und damit ist $\frac{1}{1+y} \approx 0.9848$, das ist gerade der Ausübungspreis der angegebenen Call-Option. Hier wird in der Tat eine Absicherung für den Fall zu niedriger Marktzinsen nach einem Jahr benötigt.

Zu (d):

Als Gesamtpreis für die Absicherung über Call-Optionen wie in (ii) beschrieben ergibt sich so: $47255.74 \cdot 0.004 \approx 189.02$ €.