DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Bericht zur Prüfung im Oktober 2014 über Mathematik der Personenversicherung (Grundwissen)

Jürgen Strobel (Köln)

Am 11.10.2014 wurde in Köln die vierte Prüfung über Mathematik der Personenversicherung (Grundwissen) nach der Prüfungsordnung der DAV mit insgesamt 340 Teilnehmerinnen und Teilnehmern durchgeführt. Das Bestehen dieser Prüfung ist eine notwendige Voraussetzung, um die Mitgliedschaft in der DAV erwerben zu können. 293 Damen und Herren haben die Prüfungsklausur bestanden.

Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der 7 Aufgaben gestellt waren. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 72 Punkte von 180 möglichen Punkten erreicht werden. Die erforderlichen Sterbetafeln sowie eine Formelsammlung (Barwertformeln) zur Lebensversicherungsmathematik wurden zur Verfügung gestellt.

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Ein Lebensversicherungsunternehmen möchte für Berufseinsteiger eine gemischte Kapitalversicherung mit konstanter Todesfallleistung anbieten, bei welcher der Jahresbeitrag in den ersten 5 Jahren reduziert ist; erst ab dem 6. Jahr soll der volle Beitrag gezahlt werden. Der volle Nettobeitrag ab dem 6. Jahr sei mit P bezeichnet, der reduzierte Nettobeitrag in den ersten 5 Jahren mit $c \cdot P$, wobei $0 \le c \le 1$.

a) Berechnen Sie den ab dem 6. Versicherungsjahr zahlbaren „vollen“ Nettobeitrag P für einen 25-jährigen Mann bei einer Laufzeit von 40 Jahren und einer Versicherungssumme von 100.000 € für den Fall, dass c = 0,30 gesetzt wird (d.h. der Nettobeitrag betrage in den ersten 5 Jahren $0{,}30 \cdot P$, ab dem 6. Jahr $1{,}0 \cdot P$).

b) Begründen Sie ohne Rechnung, warum c nicht beliebig nahe bei Null liegen darf.

c) Wenn der Tarif mit dem kleinstmöglichen Wert von c angeboten wird,

- was ist dann bei der Festlegung von Kostenzuschlägen zu beachten?
- welche möglicherweise für den Versicherer problematische Option enthält dieser Tarif dann?

(Sterbetafel DAV 2008 TM, i = 1,75 %)

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Um das Risiko der Antiselektion bei Unisex-Tarifen zu vermeiden, bietet ein Versicherungsunternehmen folgenden Tarif an:

Kapitalbildende Versicherung mit Todesfallleistung VS und Erlebensfallleistung s*VS nach n Jahren gegen laufenden jährlichen Beitrag. Laufzeit n Jahre.

Die Kostensätze betragen:
α^z = 40 ‰ der Summe der ausreichenden Jahresprämien („Beitragssumme"), einmalig zu Versicherungsbeginn,
α^γ und β Kosten werden nicht erhoben,
γ = 1,0 ‰ der Beitragssumme, vorschüssig für jedes Jahr der Versicherungsdauer.

Der Parameter s ist so zu gestalten, dass (auf Basis der Sterbetafel DAV 2008 T mit Rechnungszins 1,75%) die ausreichenden Prämien P_x^a für Männer und P_y^a für Frauen gleich sind.

a) Berechnen Sie konkret die Bruttoprämie mit obigen Kostenparametern für eine 50-jährige Person mit VS = 100.000 € und n = 10 Jahren sowie s = 1,681134
($\ddot{a}^x_{50:\overline{10}|} = 9{,}05203965$ und $\ddot{a}^y_{50:\overline{10}|} = 9{,}13071938$).

b) Geben Sie bei gegebenem Eintrittsalter und gegebener Laufzeit eine allgemeine Formel zur Berechnung von s an. Gehen Sie aus Vereinfachungsgründen davon aus, dass die Nettoprämien für Männer und Frauen gleich sind, d.h. setzen Sie α^z = 0 ‰ und γ = 0 ‰.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Betrachtet werden zwei gemischte Kapitalversicherungen mit durchgehender Beitragszahlung, aber unterschiedlichen einmaligen Abschlusskosten und entsprechend unterschiedlichen Zillmersätzen:
Die erste ist kalkuliert mit unmittelbaren Abschlusskosten in Höhe von α^z **= 40 Promille** der Beitragssumme, während die zweite bei sonst gleichen Daten mit α^z = **25 Promille** der Beitragssumme kalkuliert ist. Die entsprechenden Beiträge seien mit $P^a(40)$ bzw. $P^a(25)$ bezeichnet.

a) Welche der beiden Prämien $P^a(40)$ bzw. $P^a(25)$ ist größer, wenn alle übrigen Daten (Eintrittsalter, Laufzeit, Kommutationswerte, laufende Verwaltungskosten etc.) übereinstimmen? Man begründe die Antwort.

b) ${}_tV^\alpha_{x:n}$ bezeichne die gezillmerte Deckungsrückstellung für einen Vertrag mit Eintrittsalter x, Laufzeit n und unmittelbaren Abschlusskosten $\alpha = \alpha^z$. Welche der beiden Deckungsrückstellungen ist bei sonst gleichen Daten größer, die mit 40 ‰ oder die mit 25 ‰ kalkulierte Deckungsrückstellung? Begründung?

c) Der Aktuar glaubt, dass die mit dem niedrigeren Satz von 25 Promille der Beitragssumme kalkulierte Versicherung zu gezillmerten Deckungsrückstellungen führt, die in etwa den erhöhten Rückkaufswerten (nach VVG- Reform) der mit dem höheren Satz von 40 Promille der Beitragssumme kalkulierten entspricht. Dazu berechnet er ein Beispiel:

Gemischte Kapitalversicherung mit Sterbetafel DAV 2008 T-Männer und Zins 1,75% sowie folgenden Daten:
Versicherungssumme: 100.000 € ; Eintrittsalter x = 40; Laufzeit und Beitragszahlungsdauer n = 20 Jahre; laufende Verwaltungskosten: 3% des Beitrags und 2,5 Promille der Summe.

Für die Berechnung der mit 40 Promille gerechneten erhöhten Deckungsrückstellungen (Rückkaufswerte nach VVG Reform) berechnet er zunächst die Bruttoprämie bei unmittelbaren Abschlusskosten in Höhe von $\alpha^z = 40$ Promille der Beitragssumme zu $P^a(40) =$ 4.931,36 €.
Danach berechnet er die Deckungsrückstellungen, die sich drei Jahre nach Vertragsabschluss ergeben:

1. Die Nettodeckungsrückstellung zu: ${}_3V_{40} = 12.939{,}73$ € sowie
2. die mit $\alpha = \alpha^z = 40$ Promille gezillmerte Deckungsrückstellung

$${}_tV_x^\alpha = {}_tV_x - \alpha^z \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \cdot n \cdot P^a(40) \text{ zu :} \qquad {}_3V_{40}^\alpha = \text{€ } 9.505{,}13.$$

3. Die nach VVG-Reform erhöhten Rückkaufswerte berechnet er so, dass zu ${}_3V_{40}^\alpha$ noch der Betrag

$$\alpha^z \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{5-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{5}|}} \cdot n \cdot P^a(40) \qquad \text{für } t = 3 \text{ dazu addiert wird.}$$

Damit errechnet er insgesamt den Wert 9.505,13 € + 1.622,39 € = 11.127,52 €.

Für die Berechnung der mit 25 Promille gezillmerten Deckungsrückstellung berechnet der Aktuar zunächst die Prämie $P^a(25)$ zu € 4.836,80 .

Bei der Rückstellungsberechnung reicht ihm nicht die Zeit. Helfen Sie ihm bei der Berechnung von ${}_3V_{40}^\alpha$ mit $\alpha = \alpha^z = 25$ Promille.
Ist die Vermutung richtig, dass diese Rückstellung tatsächlich höher ist als der oben berechnete Wert von € 11.127,52 ?

Aufgabe 4 (30 Punkte)

Für im Bestand geführte private Krankenversicherungen mit gezillmerter Nettoprämie P^z bezeichne $V_{x+m}(P^z)$ die prospektiv dargestellte Alterungsrückstellung zum erreichten Alter x+m.

a) Geben Sie einen **nicht iterativen** Beweis dafür an, dass $V_{x+m}(P^z)$ mit der retrospektiv dargestellten Alterungsrückstellung übereinstimmt, d.h. dass

$$V_{x+m}(P^z) = \frac{D_x}{D_{x+m}} \cdot V_x(P^z) + \frac{1}{D_{x+m}} \cdot \sum_{t=0}^{m-1} D_{x+t} \cdot (P^z - K_{x+t})$$

ist.

Tipp: Stellen Sie die rechte Seite der Gleichung mit Hilfe von N_x und U_x dar.

$$(U_x := \sum_{t=0}^{\omega-x} D_{x+t} \cdot K_{x+t})$$

b) Eine Versicherung bestehe unverändert seit m Jahren. Welche wirtschaftliche Bedeutung hat dann $V_x(P^z)$ in der oben angegebenen Gleichung,

i) wenn x das tatsächliche Eintrittsalter ist?

ii) wenn x das Alter ist, zu dem der letzte Tarifwechsel stattgefunden hat?

c) Wie nennt man die Werte $P^z - K_{x+t}$?

Aufgabe 5 (30 Punkte)

In einem Tarif (kein Krankentagegeldtarif), der nach Art der Lebensversicherung kalkuliert ist, soll die Gegenüberstellung der Sterbewahrscheinlichkeiten nach § 12 b Abs. 2a VVG vorgenommen werden.

a) Zeigen Sie: Wenn die erforderlichen (erf) Sterbewahrscheinlichkeiten in allen Altern unter den kalkulierten (kalk) liegen bzw. gleich sind, gilt für die Leistungsbarwerte gemäß § 14 a KalV:

$$A_x^{erf} \geq A_x^{kalk}$$

b) Es gelte $A_x^{erf} = (1{,}1 - \frac{x}{1000})\, A_x^{kalk} \quad für\, 21 \leq x \leq 95.$
Wie lautet das Ergebnis der Gegenüberstellung?

c) Es gelte $AF^{St} = 1{,}07$. Was bedeutet das hinsichtlich einer Beitragsanpassung?

Aufgabe 6 (30 Punkte)

Ein am 23.11.1965 geborener Arbeitnehmer (Carsten Kolbach) trat am 1.05.1998 in ein Unternehmen ein. Ihm wurde eine Pensionszusage erteilt, die nach einer Wartezeit von 10 vollen Dienstjahren eine Rente bei Invalidität/Alter vorsieht. Die Rente beträgt für jedes Dienstjahr 15,00 €, max. 375,00 €, im Alter 65 erfolgt eine Kürzung von 5 %. Für die Berechnung der Rentenhöhe werden Dienstjahre kaufmännisch gerundet. Wirtschaftsjahr ist das Kalenderjahr.

a) Welche Rentenanwartschaft wird bei Anwendung der Rückrechnungsmethode dem Alter 45 und dem Alter 53 zugeordnet?

b) Geben Sie die Formel für den Jahresbeitrag im Sinne von § 6a EStG unter Verwendung der Bar- und Kommutationswerte der Richttafeln an.

c) Schätzen Sie die Erhöhung des steuerlichen Teilwertes für die o.a. unmittelbare Pensionszusage vom 31.12.2013 bis zum 31.12.2014.

Aufgabe 7 (30 Punkte)

Wir betrachten das allgemeine Bevölkerungsmodell der Pensionsversicherungsmathematik mit h Ausscheideursachen. Bekanntlich lässt sich der Barwert einer Verpflichtung für eine x-jährige Person der Hauptgesamtheit wie folgt darstellen:

$$ {}_0B_x = \sum_{k \geq 0} v^k \, {}_kp_x \, {}_k\hat{L}_x $$

a) Geben Sie die Definition der ${}_k\hat{L}_x,\ k \geq 0$, in obiger Barwertdarstellung an und erläutern Sie die Bedeutung der in der Formel vorkommenden Ausdrücke.

Wir betrachten nun das Bevölkerungsmodell der Pensionsversicherungsmathematik mit der Hauptgesamtheit der Aktiven und den beiden Ausscheideursachen Invalidität und Tod (h = 2).

b) Geben Sie unter Anwendung der obigen Summendarstellung folgende Barwerte an:
   i. Barwert der Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven (d.h. $x < z$, z: rechnerisches Pensionsierungsalter) auf eine lebenslänglich laufende, jährlich vorschüssig zahlbare Invalidenrente des Jahresbetrags 1
   ii. Barwert der Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf eine lebenslänglich laufende, jährlich vorschüssig zahlbare Witwenrente des Jahresbetrags 1 bei Tod als Aktiver
   iii. Barwert des Anspruchs einer y-jährigen Witwe auf eine lebenslänglich laufende, jährlich vorschüssig zahlbare Witwenrente des Jahresbetrags 1

c) Wie verändern sich die Barwerte in Teilaufgabe b) i. und Teilaufgabe b) ii. bei einer monatlich vorschüssigen Zahlungsweise des Jahresbetrags 1? Begründen Sie Ihre Aussage.

d) Wir betrachten nun den Barwert ${}^{(12)}\mathrm{a}_x^r$ des Anspruchs eines x-jährigen Altersrenters (d.h. $x \geq z$) auf eine lebenslänglich laufende, monatlich vorschüssig zahlbare Altersrente des Jahresbetrags 1.

   Dann gilt

$$ {}^{(12)}\mathrm{a}_x^r = \sum_{k \geq 0} v^k \, {}_kp_x^r \, {}^{(12)}_{\;\;k}L_x^r \quad \text{mit} \quad {}^{(12)}_{\;\;k}L_x^r = 1 - k^{(12)}(1 - v\,p_{x+k}^r) $$

   Zeigen Sie mit diesem Zusammenhang, dass gilt:

$$ {}^{(12)}\mathrm{a}_x^r = \mathrm{a}_x^r - k^{(12)} $$

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Mathematik der Personenversicherung (Grundwissen)
Klausur vom 11. 10. 2014

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

zu a)

Ansatz nach dem Äquivalenzprinzip:

$$\text{Leistungsbarwert} = A_{25:\overline{40|}} \cdot 100.000\ € = (1 - d \cdot ä_{25:\overline{40|}}) \cdot 100.000\ €$$

$$= \left(1 - \frac{i}{1+i} \cdot \frac{N_{25} - N_{65}}{D_{25}}\right) \cdot 100.000\ €$$

$$= (1 - 0{,}017199 \cdot 28{,}225824) \cdot 100.000\ €$$

$$= 51.454{,}357$$

$$\text{Prämienbarwert} = ä_{25:\overline{40|}} \cdot P - ä_{x:\overline{5|}} \cdot (1 - 0{,}30) \cdot P = P \cdot \left(ä_{25:\overline{40|}} - (1 - 0{,}30) \cdot ä_{25:\overline{5|}}\right)$$

$$\left[\text{alternativ} = P \cdot \left(0{,}3 \cdot ä_{25:\overline{5|}} + \frac{D_{30}}{D_{25}} \cdot ä_{30:\overline{35|}}\right)\right]$$

$$= P \cdot \left(\frac{N_{25} - N_{65}}{D_{25}} - 0{,}70 \cdot \frac{N_{25} - N_{30}}{D_{25}}\right)$$

$$= P \cdot (28{,}225824 - 0{,}70 \cdot 4{,}823213) = P \cdot 24{,}849575$$

Somit ergibt sich:

$$P = \frac{51.454{,}357}{24{,}849575}\ € = 2.070{,}63\ €$$

zu b)

Mindestbetrag für c:

- Die reduzierte Prämie zu Beginn muss mindestens so hoch sein wie die Nettoprämie für eine 5-jährige Risikoversicherung.
- Die reduzierte Prämie muss während der ersten 5 Jahre mindestens so hoch sein, dass sich zu jedem Zeitpunkt ein positives Deckungskapital ergibt.

Beide Forderungen führen bei konkreter Rechnung zu demselben Mindestbetrag von c.

zu c)

Bei der Kostenkalkulation muss natürlich darauf geachtet werden, dass der Kostenansatz insbesondere zu Beginn zu einer hinlänglichen Kostendeckung führt. Es bietet sich an, in den ersten Jahren zumindest den Kostenanteil des Beitrags zu verlangen, der demjenigen einer analogen 5-jährigen Risikoversicherung entspricht. Dieser Tarif kann bei kleinem Ansatz von c allerdings nicht im üblichen Sinne verprovisioniert werden, denn die Abschlusskosten in Höhe von 4% der Bruttobeitragssumme würden die ersten 5 Beiträge um ein Vielfaches übersteigen.

Auf einen weiteren Aspekt sei hingewiesen: Wenn tatsächlich der Faktor c minimal gewählt wird, so handelt es sich faktisch um die Hintereinanderschaltung einer reinen Risikoversicherung und einer kapitalbildenden Lebensversicherung. Da der Kunde den Vertrag am Ende der ersten 5 Jahre schadlos kündigen kann, bedeutet diese Konstruktion für den Kunden eine kostenlose Nachversicherungsoption: je nach dem Gesundheitszustand am Ende des 5. Jahres wird die Versicherung weitergeführt oder nicht. Aus Sicht des LVU könnte es dabei zu einer ungewünschten Risikoselektion kommen.

Aufgabe 2

Zu a)

Es gilt: $A^s_{x:\overline{n}|} = \dfrac{M_x - M_{x+n} + s \cdot D_{x+n}}{D_x}$ und $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$

und damit für die geschlechtsspezifische ausreichende Prämie:

$$P^a \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A^s_{x:\overline{n}|} + \alpha^z \cdot n \cdot P^a + \gamma \cdot n \cdot P^a \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$\Rightarrow P^a = \frac{A^s_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \cdot (1-\gamma \cdot n) - \alpha^z \cdot n} = \frac{\dfrac{M_x - M_{x+n} + s \cdot D_{x+n}}{D_x}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \cdot (1-\gamma \cdot n) - \alpha^z \cdot n}$$

Da $P^a_x = P^a_y$ ergibt sich für den Unisex-Tarif durch Einsetzen in obige Formel:

$\Rightarrow P^a = 16.135,6097$

Zu b)

Für den Spezialfall mit $\alpha^z = 0, \gamma = 0$ gilt:

$$P^N \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A^s_{x:\overline{n}|} \Rightarrow P^N = \frac{A^s_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{{}_nA_x + s \cdot {}_nE_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\dfrac{M_x - M_{x+n} + s \cdot D_{x+n}}{D_x}}{\dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}} = \frac{M_x - M_{x+n} + s \cdot D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

Durch Gleichsetzen der Nettoprämien und Auflösung nach s ergibt sich:

1)

$$P_x^N = \frac{{}_nA_x + s \cdot {}_nE_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{{}_nA_y + s \cdot {}_nE_y}{\ddot{a}_{y\overline{n}|}} = P_y^N$$

$$\Rightarrow ({}_nA_x + s \cdot {}_nE_x) \cdot \ddot{a}_{y\overline{n}|} = ({}_nA_y + s \cdot {}_nE_y) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$\Rightarrow s \cdot {}_nE_x \cdot \ddot{a}_{y\overline{n}|} - s \cdot {}_nE_y \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_nA_y \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nA_x \cdot \ddot{a}_{y\overline{n}|}$$

$$\Rightarrow s = \frac{{}_nA_y \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nA_x \cdot \ddot{a}_{y\overline{n}|}}{{}_nE_x \cdot \ddot{a}_{y\overline{n}|} - {}_nE_y \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

oder alternativ

2)

$$P_x^N = \frac{M_x - M_{x+n} + s \cdot D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} = \frac{M_y - M_{y+n} + s \cdot D_{y+n}}{N_y - N_{y+n}} = P_y^N$$

$$\Rightarrow = \frac{s \cdot D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} - \frac{s \cdot D_{y+n}}{N_y - N_{y+n}} = s \cdot \left(\frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} - \frac{D_{y+n}}{N_y - N_{y+n}} \right) = \frac{M_y - M_{y+n}}{N_y - N_{y+n}} - \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

$$\Rightarrow s = \frac{\frac{M_y - M_{y+n}}{N_y - N_{y+n}} - \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}}{\frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} - \frac{D_{y+n}}{N_y - N_{y+n}}} = \frac{\frac{{}_nA_y}{\ddot{a}_{y:\overline{n}|}} - \frac{{}_nA_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}}{\frac{{}_nE_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \frac{{}_nE_y}{\ddot{a}_{y:\overline{n}|}}} = \frac{\frac{{}_nA_y \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nA_x \cdot \ddot{a}_{y:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{y:\overline{n}|}}}{\frac{{}_nE_x \cdot \ddot{a}_{y:\overline{n}|} - {}_nE_y \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{y:\overline{n}|}}} = \frac{{}_nA_y \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nA_x \cdot \ddot{a}_{y:\overline{n}|}}{{}_nE_x \cdot \ddot{a}_{y:\overline{n}|} - {}_nE_y \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Aufgabe 3

Zu a)

Die Äquivalenzgleichung zur Berechnung der ausreichenden Prämie P^a für die jeweiligen Zillmersätze α^Z lautet für die Summe S

$$P^a \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = S \cdot A_{x:\overline{n}|} + \alpha^Z \cdot n \cdot P^a + (\alpha_\gamma + \gamma) S \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \beta \cdot P^a \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

und damit ist bezogen auf die Summe 1 nur zu zeigen:

$$\frac{1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{(1-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 0.025 \cdot n} < \frac{1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{(1-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 0.04 \cdot n}$$ und das ist evident. Damit folgt, dass die mit 25 Promille gerechnete Prämie niedriger als die mit 40 Promille.

Zu b)

Da die gezillmerte Deckungsrückstellung sich nach der Formel ${}_tV_x^\alpha = {}_tV_x - \alpha^z \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \cdot n \cdot P^a$

berechnet, ist nach (i) klar, dass die mit 25 Promille gezillmerte Deckungsrückstellung größer ist als die mit 40 Promille gerechnete Deckungsrückstellung.

Zu c)

Da bereits alle anderen benötigten Werte bereits in der Aufgabenstellung angegeben wurden, bleibt nur ${}_3V_{40}^{\alpha}$ mit $\alpha = \alpha^z = 25$ Promille zu berechnen. Wegen

${}_tV_x^{\alpha} = {}_tV_x - \alpha^z \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \cdot n \cdot P^a(25)$ und ${}_3V_{40} = €\ 12.939{,}73$ sowie $P^a(25) = €\ 4.836{,}80$ benötigt man hierzu lediglich die beiden Leibrentenbarwerte $\ddot{a}_{43:\overline{17}|}$ sowie $\ddot{a}_{40:\overline{20}|}$.

Nun sind $N_{43} = 1156404{,}662..$, $N_{40} = 1299102{,}009..$, $N_{60} = 493615{,}9531$, $D_{43} = 45799{,}624$ und $D_{40} = 48457{,}931$ daraus ergeben sich $\ddot{a}_{43:\overline{17}|} = \frac{N_{43} - N_{60}}{D_{43}} = 14{,}471$ sowie

$\ddot{a}_{40:\overline{20}|} = \frac{N_{40} - N_{60}}{D_{40}} = 16{,}622$. Damit berechnet sich ${}_3V_{40}^{\alpha}$ zu

$${}_3V_{40}^{25} = {}_3V_{40} - 0.025 \cdot \frac{\ddot{a}_{43:\overline{17}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{20}|}} \cdot 20 \cdot P^a(25) = 12.939{,}73 - 0{,}5\ \frac{\ddot{a}_{43:\overline{17}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{20}|}} 4836{,}80 = 10.834.$$

Die Antwort zu Frage (iii) ist daher: Die mit 25 Promille gezillmerte Deckungsrückstellung ist niedriger als der nach VVG-Reform derzeit zu stellende Rückkaufswert in Höhe von 11.127,52 €.

Aufgabe 4

zu a)

Wegen

$$V_x(P^z) = A_x - P^z \cdot \ddot{a}_x = \frac{U_x}{D_x} - P^z \cdot \frac{N_x}{D_x}$$

ist

$$\frac{D_x}{D_{x+m}} \cdot V_x(P^z) + \frac{1}{D_{x+m}} \cdot \sum_{t=0}^{m-1} D_{x+t} \cdot (P^z - K_{x+t})$$
$$= \frac{1}{D_{x+m}} \cdot \left(U_x - P^z \cdot N_x + P^z \cdot (N_x - N_{x+m}) - (U_x - U_{x+m})\right)$$
$$= \frac{1}{D_{x+m}} \cdot (U_{x+m} - P^z \cdot N_{x+m}) = A_{x+m} - P^z \cdot \ddot{a}_{x+m} = V_{x+m}(P^z)$$

zu b)

i) $V_x(P^z)$ sind die gezillmerten Abschlusskosten des Versicherungsvertrages (mit negativem Vorzeichen).

ii) $V_x(P^z)$ ist die bis zum Erreichen des Alters x bereits aufgebaute, nach Anrechnung bei Tarifwechsel verbleibende Alterungsrückstellung.

zu c)

Die Werte $P^z - K_{x+t}$ nennt man die Sparprämien der Krankenversicherung.

Aufgabe 5

zu a)

$$A_x^{erf} = \sum_{t=0}^{\omega-x} K_{x+t} \frac{D_{x+t}^{erf}}{D_x^{erf}}$$

$$= \sum_{t=0}^{\omega-x} K_{x+t} \frac{v^{x+t}\, l_{x+t}^{erf}}{v^x\, l_x^{erf}}$$

$$= \sum_{t=0}^{\omega-x} K_{x+t}\, v^t \prod_{r=0}^{t-1} (1-q_{x+r}^{erf})$$

$$\geq \sum_{t=0}^{\omega-x} K_{x+t}\, v^t \prod_{r=0}^{t-1} (1-q_{x+r}^{kalk})$$

$$= A_x^{kalk}$$ q.e.d.

zu b)

$$AF^{St} = \max\left[\frac{1}{25}\sum_{x=21}^{45}\frac{A_x^{erf}}{A_x^{kalk}}; \frac{1}{25}\sum_{x=46}^{70}\frac{A_x^{erf}}{A_x^{kalk}}; \frac{1}{25}\sum_{x=71}^{95}\frac{A_x^{erf}}{A_x^{kalk}}\right]$$

$$= \max\left[\frac{1}{25}\sum_{x=21}^{45}(1{,}1-\frac{x}{1000}); \frac{1}{25}\sum_{x=46}^{70}(1{,}1-\frac{x}{1000}); \frac{1}{25}\sum_{x=71}^{95}(1{,}1-\frac{x}{1000})\right]$$

$$= \max\left[\frac{1}{25}\cdot\frac{25}{2}\cdot(1{,}079+1{,}055); \frac{1}{25}\cdot\frac{25}{2}\cdot(1{,}054+1{,}030); \frac{1}{25}\cdot\frac{25}{2}\cdot(1{,}029+1{,}005)\right]$$

$$= \max\left[1{,}067; 1{,}042; 1{,}017\right]$$

$$= 1{,}067$$

zu c)

Da die Abweichung mehr als 5 % beträgt, hat das Unternehmen alle Prämien dieses Tarifs zu überprüfen und mit Zustimmung des Treuhänders anzupassen (§ 12 b Abs. 2a VVG).

Aufgabe 6

Zu a)

Bis zur Vollendung des 65. Lebensjahres am 23.11.2030 erreicht Herr Kolbach eine Dienstzeit von 32 Jahren, 6 Monaten und 22 Tagen, d.h. 32 volle Dienstjahre und 33 kaufmännisch gerundete Dienstjahre. Die vollen Dienstjahre werden daher ab Alter 33 gezählt, die kaufmännisch gerundeten ab Alter 32.
Damit beträgt die monatliche Rente im Alter 45: (45-32) x 15,00 € = **195,00 €** und im Alter 53: (53-32) x 15,00 € = **315,00 €**.

Zu b)

Das versicherungstechnische Alter am Beginn des Eintrittsjahres (1.1.1998) beträgt 32 Jahre. Die Wartezeit ist im Alter 43 erfüllt. Die Anwartschaft im Alter 43 beträgt (43-32) x 15,00 € = 165,00 € monatlich. Damit ergibt sich für den Jahresbeitrag P_x:

$$P_{32} = 12 \cdot 15 \cdot \left[\frac{D_{43}^{a}}{D_{32}^{a}} \cdot 11 \cdot {}^{(12)}a_{43}^{aiA} + \frac{D_{44}^{a}}{D_{32}^{a}} \cdot {}^{(12)}a_{44}^{<aiA} - \frac{D_{58}^{a}}{D_{32}^{a}} \cdot {}^{(12)}a_{58}^{<aiA} - \frac{D_{65}^{a}}{D_{32}^{a}} \cdot 0,05 \cdot 25 \cdot {}^{(12)}a_{65}^{aiA} \right] / a_{32\overline{33}|}^{a}$$

Zu c)

Das versicherungstechnische Alter am 31.12.2013 beträgt 48 Jahre, die abgelaufene Dauer m = 48 - 32 = 16 Jahre. Aus der einschlägigen Näherungsformel ergibt sich ein geschätzter Teilwertzuwachs von
$\frac{16+1}{16} \cdot 1,03 - 1 = 0,0944$ oder 9,44 %.

Aufgabe 7

Zu a)

$${}_k\hat{L}_x = {}_kL_x^{(0)} + \sum_{i=1}^{h} {}_kL_x^{(i)} \cdot q_{x+k}^{(i)}$$

mit

$q_x^{(i)}$: Wahrscheinlichkeit eines x-Jährigen, im Altersintervall [x,x+1[wegen der Ursache i aus der Hauptgesamtheit auszuscheiden

${}_k\hat{L}_x$: Erwartungswert der gesamten Leistung, die durch Erreichen des Altersintervalls [x+k,x+k+1[ausgelöst werden kann, diskontiert auf den Beginn dieses Jahres

${}_kL_x^{(0)}$: Erwartungswert der Leistungen, die durch Erreichen des Alters x+k in der Hauptgesamtheit verursacht werden, diskontiert auf den Beginn dieses Jahres

${}_kL_x^{(i)}$: Erwartungswert der Leistungen, die durch das Ausscheiden im Altersintervall [x+k,x+k+1[aus der Ursache i verursacht werden, diskontiert auf den Beginn dieses Jahres

Zu b)

i. $$\mathrm{a}_x^{ai} = \sum_{k=0}^{z-x-1} v^k \, {}_kp_x^a \, {}_kL_x^{ai} \text{ mit } {}_kL_x^{ai} = v \cdot i_{x+k} \cdot \frac{1-q_{x+k}^i}{1-\frac{1}{2}\cdot q_{x+k}^i} \mathrm{a}_{x+k+1}^i$$

ii. $$\breve{\mathrm{a}}_x^{aaw} = \sum_{k=0}^{z-x-1} v^k \, {}_kp_x^a \, {}_k\breve{L}_x^{aaw} \text{ mit } {}_k\breve{L}_x^{aaw} = v \cdot q_{x+k}^{aa} \cdot h_{x+k} \cdot \frac{1-q_{y(x+k)}^w}{1-\frac{1}{2}\cdot q_{y(x+k)}^w} \mathrm{a}_{y(x+k)+1}^w$$

iii. $$\mathrm{a}_y^w = \sum_{k\geq 0} v^k \, {}_kp_y^w \, {}_kL_y^w \text{ mit } {}_kL_y^w = 1$$

zu c)

Es gilt ${}^{(12)}\mathrm{a}_x^{ai} = \mathrm{a}_x^{ai}$ und ${}^{(12)}\breve{\mathrm{a}}_x^{aaw} = \breve{\mathrm{a}}_x^{aaw}$, d.h. die beiden Barwerte hängen nicht von der Zahlungsweise ab. Dies gilt aufgrund des sogenannten Invarianzsatzes, der besagt, dass in Folge des Axiomensystems Anwartschaftsbarwerte von Renten mit gleichbleibender Rentenhöhe nicht von der Zahlungsweise abhängen, wenn sowohl der Zeitpunkt des rentenauslösenden Ereignisses als auch der Zeitpunkt des die Rente beendenden Ereignisses innerhalb eines Jahres gleichverteilt sind. Diese Voraussetzung ist in beiden Fällen erfüllt.

Zu d)

Aus der Voraussetzung folgt:

$$\begin{aligned}
{}^{(12)}\mathrm{a}_x^r &= \sum_{k\geq 0} v^k \, {}_kp_x^r (1 - k^{(12)}(1 - v\, p_{x+k}^r)) \\
&= \sum_{k\geq 0} v^k \, {}_kp_x^r - \sum_{k\geq 0} k^{(12)} (v^k \, {}_kp_x^r - v^k \, {}_kp_x^r \, v\, p_{x+k}^r) \\
&= \sum_{k\geq 0} v^k \, {}_kp_x^r - k^{(12)} \left[\sum_{k\geq 0} v^k \, {}_kp_x^r - \sum_{k\geq 0} v^{k+1} \, {}_{k+1}p_x^r \right] \\
&= \sum_{k\geq 0} v^k \, {}_kp_x^r - k^{(12)} \left[\sum_{k\geq 0} v^k \, {}_kp_x^r - \sum_{k\geq 1} v^k \, {}_kp_x^r \right] \\
&= \sum_{k\geq 0} v^k \, {}_kp_x^r - k^{(12)} \\
&= \mathrm{a}_x^r - k^{(12)}
\end{aligned}$$