DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Bericht zur Prüfung im Oktober 2013
über Mathematik der Personenversicherung (Grundwissen)

Jürgen Strobel (Köln)

Am 12.10.2013 wurde in Köln die dritte Prüfung über Mathematik der Personenversicherung (Grundwissen) nach der Prüfungsordnung der DAV mit insgesamt 342 Teilnehmerinnen und Teilnehmern durchgeführt. Das Bestehen dieser Prüfung ist eine notwendige Voraussetzung, um die Mitgliedschaft in der DAV erwerben zu können. 250 Damen und Herren haben die Prüfungsklausur bestanden.

Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der 7 Aufgaben gestellt waren. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 72 Punkte von 180 möglichen Punkten erreicht werden. Die erforderlichen Sterbetafeln sowie eine Formelsammlung (Barwertformeln) zur Lebensversicherungsmathematik wurden zur Verfügung gestellt.

Aufgabe 1 (30 Punkte)

Betrachten Sie eine Krankenvollversicherung nach einem ungezillmerten Kompakttarif für Männer mit Übertragungswert. Der Tarif sei nach dem internen Modell kalkuliert.

Im Unterschied zu den üblichen Werten werden alle Werte, die auf den im internen Modell auftretenden reduzierten Stornowahrscheinlichkeiten $\mathbf{w}_{\mathbf{x}}^{'}$ beruhen, durch einen Strich gekennzeichnet.

Folgende Werte sind gegeben:

$l_{21} = 1.000$

$\mathbf{x}$	$\mathbf{N_x}$	$\mathbf{U_x}$ $\left(= \sum_{j=0}^{\omega-x} \mathbf{K_{x+j} \cdot D_{x+j}}\right)$	$\mathbf{N_x^{'}}$	$\mathbf{U_x^{'}}$
21	10.060	9.486.622	12.972	12.901.369
22	9.522	9.362.882	12.434	12.777.629
23	9.039	9.247.445	11.924	12.655.739
24	8.602	9.139.506	11.439	12.535.944
25	8.205	9.035.889	10.976	12.415.101

26	7.841	8.936.153	10.537	12.294.815
27	7.503	8.838.809	10.120	12.174.719
28	7.187	8.743.693	9.722	12.054.921
29	6.889	8.650.121	9.342	11.935.601
30	6.605	8.555.833	8.977	11.814.421
31	6.334	8.461.254	8.626	11.691.922
32	6.074	8.366.094	8.288	11.568.214
33	5.825	8.270.478	7.962	11.443.030
34	5.587	8.175.040	7.648	11.317.116
35	5.358	8.084.356	7.345	11.197.128
36	5.138	7.998.336	7.053	11.082.956
37	4.926	7.916.504	6.770	10.973.718
38	4.722	7.838.780	6.497	10.869.705
39	4.525	7.764.708	6.233	10.770.441
40	4.335	7.691.368	5.977	10.671.625

a) Leiten Sie aus den Werten die Höhe des Rechnungszinses her (ein ganzzahliges Vielfaches von 0,25%).

b) Für einen Teilbestand von 500 gleichaltrigen Männern, die den Tarif zum gleichen Zeitpunkt im Alter von 25 Jahren abgeschlossen haben, sollen einige Werte ermittelt werden, die für diesen Teilbestand 10 Jahre nach Vertragsabschluss zu erwarten sind:

   i) Leiten Sie aus den obigen Werten die Höhe der KV-Risikoprämie her, die sich für den Teilbestand im 11. Versicherungsjahr ergibt.

   ii) Leiten Sie aus den obigen Werten die Höhe der Alterungsrückstellung her, die sich für den Teilbestand nach Ablauf von 10 Jahren ergibt.

   iii) Unter welcher Voraussetzung stimmt diese Alterungsrückstellung mit dem Übertragungswert des Teilbestandes überein?

Aufgabe 2 (30 Punkte)

Man betrachte einen Tarif der substitutiven Krankenversicherung.

a) Aus welchen vier Quellen kann ein Einmalbeitrag zur Limitierung von Beitragserhöhungen bei Vorliegen der gesetzlichen Voraussetzungen entnommen werden?

b) In dem Tarif wird eine Beitragsanpassung durchgeführt, die zu Mehrbeiträgen führt. Diese Mehrbeiträge $B^n - B^a$ sollen in Höhe von α' gezillmert werden. Weiter soll eine Limitierung der sich nach dem Äquivalenzprinzip ergebenden Beiträge B^n auf diejenigen Beiträge ${}^{\lim}B^n$, die sich ohne Zillmerung der Mehrbeiträge ergeben hätten, erfolgen.

   i) Beweisen Sie:

   Bei Versicherten, die das 45. Lebensjahr noch nicht vollendet haben, erfordert die Limitierung einen Einmalbeitrag in Höhe von $\mathrm{E} = \alpha' \cdot (B^n - B^a)$.

ii) Was ist bei der Ermittlung von B^n bei Versicherten, die das 45. Lebensjahr vollendet haben, zu beachten, und was würde sich bezüglich eines Einmalbeitrags ergeben?

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Ein 65-jähriger Mann (geboren 1948) habe einen Betrag von 100.000 € angespart, aus dem er einen lebenslänglichen Rentenplan finanzieren will. Er entscheidet sich für eine Anlage zu folgenden Konditionen:

(1) Aus dem Fondsguthaben wird zunächst eine 20 Jahre laufende (konstante) Zeitrente mit jährlich vorschüssiger Rentenzahlung gezahlt. Dabei wird unterstellt, dass sich das Fondsvermögen während der gesamten Zeit mit jährlich konstant 5 % verzinst.

(2) Wird das Alter 85 erlebt, so soll sich eine lebenslängliche, jährlich vorschüssig zahlbare Leibrente bei einem Lebensversicherer anschließen. Diese Rente soll dieselbe Höhe haben wie der jährliche Auszahlungsbetrag der ersten 20 Jahre. Der erforderliche Einmalbeitrag soll gleich bei Vertragsbeginn im Alter 65 aus dem vorhandenen Anfangsguthaben entnommen und an den Versicherer überwiesen werden.

Der Einfachheit halber werde während der ganzen Laufzeit auf den Ansatz von Kostenzuschlägen verzichtet. Ansonsten werde die Leibrente auf der Basis der Sterbetafel DAV 2004 RM mit dem Rechnungszins 1,75 % und unter Berücksichtigung der Altersverschiebung berechnet (vgl. beigefügte Tafeln). Unisex-Effekte werden ignoriert.

a) Wie hoch ist der lebenslänglich konstante Betrag, den der Kunde unter den genannten Rahmenbedingungen zu Beginn eines jeden Jahres erhält?

b) Wie hoch ist dem zu Folge der im Alter 65 fällige Nettoeinmalbeitrag für die im Alter 85 beginnende vorschüssige Leibrente?

c) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie den Wert des Fondsguthabens im Alter 85 berechnen.

Hinweis: Der Barwert einer n Jahre vorschüssig zahlbaren Zeitrente berechnet sich nach der Gleichung $\ddot{a}_{\overline{n}|} = \dfrac{1 - v^n}{1 - v}$.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Betrachtet wird ein Bestand von gemischten Kapitallebensversicherungen eines Unternehmens. Der Einfachheit halber haben alle Versicherungen dieses Bestandes die gleiche Versicherungs- und Beitragszahlungsdauer.

a) Mit welchen Deckungsrückstellungen wird dieser Bestand bilanziert? Wie werden insbesondere einzelne (durch Zillmerung) negative Rückstellungen in der Bilanz berücksichtigt?

b) Nach der VVG-Reform orientieren sich die zu stellenden Deckungsrückstellungen an den erhöhten Rückkaufswerten, die sich bei gleichmäßiger Verteilung der angesetzten Abschlusskosten auf die ersten 5 Vertragsjahre ergeben. Um wie viel höher sind diese Rückkaufswerte als die entsprechenden gezillmerten Deckungsrückstellungen, wenn man die Vorschriften des VVG umsetzt? Bitte geben Sie eine explizite Formel an!

c) Berechnen Sie diesen erhöhten Rückkaufswert für die folgende gemischte Kapitalversicherung nach **drei Jahren Laufzeit** mit folgenden Daten:

Versicherungssumme: 100 000 € ;
Eintrittsalter: x = 40;
Laufzeit und Beitragszahlungsdauer: n = 20 Jahre;
Höhe der unmittelbaren Abschlusskosten: 40 Promille der Beitragssumme ;
Tafel: DAV 2008 T-Männer mit Zins 1,75%.

Bekannt seien dabei die jährliche Bruttoprämie $P^a(A_{40:\overline{20}|}) =$ € 4931,36 ,

ebenso die Nettodeckungsrückstellung ${}_3V_{40} =$ € 12.939,73

sowie die gezillmerte Deckungsrückstellung ${}_3V_{40}^{\alpha} =$ € 9.505,13

(wobei ${}_tV_x^{\alpha} = {}_tV_x - \alpha^z \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \cdot n \cdot P^a(A_{x:\overline{n}|})$.

Um wie viel höher als dieser letzte Wert liegt der nach VVG-Reform gültige Rückkaufswert?

Aufgabe 5 (20 Punkte)

Ein Versicherungsunternehmen bietet folgenden Tarif an: Risikolebensversicherung gegen laufenden jährlichen Beitrag. Laufzeit n Jahre. Die Todesfallsumme VS fällt während der Laufzeit linear auf $1/n \cdot VS$ im letzten Jahr.

a) Berechnen Sie die Jahresnettoprämie für einen 60-jährigen Mann, wobei ein Unisextarif mit Rechnungszins 1,75% anzuwenden ist mit $P^{Uni} = 1/2 \cdot (P^X + P^Y)$ (jeweils auf die Nettoprämie bezogen) auf Basis der Sterbetafel DAV 2008 T mit P^X Nettoprämie Mann und P^Y = Nettoprämie Frau.
Die Versicherungssumme im ersten Versicherungsjahr beträgt VS = 500.000 €, die Laufzeit der Versicherung betrage n = 5 Jahre.

b) Welche aktuariellen Risiken aus Sicht des Versicherungsunternehmens ergeben sich durch eine solche Tarifgestaltung?

Aufgabe 6 (30 Punkte)

1) Stellen Sie für das in der Pensionsversicherung verwendete Bevölkerungsmodell mit zwei Ausscheideursachen die Hauptgesamtheit, die Nebengesamtheiten sowie die Übergänge zwischen den Gesamtheiten graphisch da.

2) Beschreiben Sie die Bedeutung folgender Wahrscheinlichkeiten des Modells:

- q_x^{aa}
- i_x
- q_x^i
- h_x
- q_y^w

3) Axiom 1 des Axiomensystems lautet: Die Austrittszeitpunkte sind für alle Ausscheideursachen innerhalb des Jahres gleichverteilt. Aufgrund von Axiom 1 gilt somit ${}_{0,5}q_x = 0{,}5 \cdot q_x$.

   Zeigen Sie mit diesem Zusammenhang, dass gilt:

$${}_{0,5}q_{x+0,5} = \frac{0{,}5 \cdot q_x}{1 - 0{,}5 \cdot q_x}$$

und

$${}_{0,5}p_{x+0,5} = \frac{1 - q_x}{1 - 0{,}5 \cdot q_x}$$

   Hinweis: Teilen Sie das betrachtete Jahr in zwei Hälften auf.

4) Stellen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten aus 2) dar. Verwenden Sie dabei eine Darstellung, in der ausschließlich Wahrscheinlichkeiten zu ganzzahligen Altern x und y vorkommen.

   - q_x^1: Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen Aktiven, innerhalb eines Jahres invalide zu werden und noch im gleichen Jahr - als Invalider - zu sterben
   - q_x^2: Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen Aktiven, innerhalb eines Jahres zu sterben
   - p_x^3: Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen Aktiven, innerhalb eines Jahres unter Hinterlassung eines Ehegatten zu sterben, der das Ende des Jahres erlebt
   - p_x^4: Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x das Alter x+1 zu erleben

Aufgabe 7 (30 Punkte)

a) Versicherungsmathematische Bewertungen zur betrieblichen Altersversorgung werden aus unterschiedlichen Anlässen nach unterschiedlichen Methoden durchgeführt. Nennen Sie drei Anlässe und die hierfür geeigneten Methoden.

b) Ein am 23.11.1960 geborener Arbeitnehmer trat am 1.10.1985 in ein Unternehmen ein. Ihm wurde eine Pensionszusage erteilt, die nach einer Wartezeit von 10 vollen

Dienstjahren eine Rente bei Invalidität/Alter vorsieht. Die Rente beträgt für jedes angefangene Dienstjahr 10,- €, max. 300,- €, im Alter 65 erfolgt eine Kürzung von 10 % aufgrund des vorzeitigen Rentenbezugs. Wirtschaftsjahr ist das Kalenderjahr. Geben Sie den altersabhängigen Rentenvektor an.

c) Schätzen Sie die Kosten für eine unmittelbare Pensionszusage (Alters-, Invaliditäts- und Hinterbliebenenrenten), die nach durchschnittlich im Bestand erreichbaren 30 Dienstjahren 12 % der letzten Entgelte erreicht.

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

Zu a)

Es ist $D_{21} = N_{21} - N_{22} = 10.060 - 9.522 = 538$, so dass

$$(1+i)^{21} = \frac{l_{21}}{D_{21}} = \frac{1.000}{538}$$

Damit ergibt sich als Rechnungszins

$$i = \left(\frac{1.000}{538}\right)^{\frac{1}{21}} - 1 = 3\%$$

Zu b)

i) Es ist $l_{25} = D_{25} \cdot 1{,}03^{25} = (N_{25} - N_{26}) \cdot 1{,}03^{25} = 762{,}13$ und
$l_{35} = D_{35} \cdot 1{,}03^{35} = (N_{35} - N_{36}) \cdot 1{,}03^{35} = 619{,}04$.
Der Teilbestand nach 10 Jahren umfasst somit $500 \cdot l_{35} / l_{25} = 406$ Personen.

Es ist
$D_{35} \cdot K_{35} = U_{35} - U_{36} = 8.084.356 - 7.998.336 = 86.020$
$D_{35} = N_{35} - N_{36} = 5.358 - 5.138 = 220$
also $K_{35} = 86.020 / 220 = 391$

Die Risikoprämie des Teilbestandes im Alter 35 beträgt also $406 \cdot 391 = 158.746$

ii) Es ist

$$P'_{25} = \frac{U'_{25}}{N'_{25}} = \frac{12.415.101}{10.976} = 1.131{,}11$$

$$A'_{35} = \frac{U'_{35}}{D'_{35}} = \frac{U'_{35}}{N'_{35} - N'_{36}} = \frac{11.197.128}{7.345 - 7.053} = 38.346{,}33$$

$$\ddot{a}'_{35} = \frac{N'_{35}}{D'_{35}} = \frac{N'_{35}}{N'_{35} - N'_{36}} = \frac{7.345}{7.345 - 7.053} = 25{,}1541$$

$${}_{10}V'_{25} = A'_{35} - P'_{25} \cdot \ddot{a}'_{35} = 38.346{,}33 - 1.131{,}11 \cdot 25{,}1541 = 9.894{,}28$$

Die Alterungsrückstellung des Teilbestandes beträgt also nach 10 Jahren
$406 \cdot 9.894{,}28 = 4.017.077{,}68$

iii) Die Alterungsrückstellung stimmt mit dem Übertragungswert überein, wenn sie nicht größer ist als die Alterungsrückstellung des zugehörigen fiktiven Basistarifs.

Aufgabe 2

Zu a)

Bei Vorliegen der gesetzlichen Voraussetzungen kann der Einmalbeitrag folgenden Quellen entnommen werden:

- der Zusatzrückstellung aus dem gesetzlichen Zuschlag
- der Zusatzrückstellung aus Überzinsmitteln
- der Rückstellung für erfolgsunabhängige Beitragsrückerstattung
- der Rückstellung für erfolgsabhängige Beitragsrückerstattung

zu b)

i) Gemäß KalV gilt

$$B^n = \frac{\mathrm{Y} - \alpha' \cdot B^a}{(1-\Delta^n) \cdot \ddot{a}^n_{x+m} - \alpha'}$$

und

$$^{\lim}B^n = \frac{\mathrm{Y}}{(1-\Delta^n) \cdot \ddot{a}^n_{x+m}}$$

mit

$$\mathrm{Y} = B^n_{x+m} \cdot ((1-\Delta^n) \cdot \ddot{a}^n_{x+m} - \alpha^n) - B^a_{x+m} \cdot ((1-\Delta^a) \cdot \ddot{a}^a_{x+m} - \alpha^a) + B^a \cdot (1-\Delta^a) \cdot \ddot{a}^a_{x+m}.$$

Mit der Umformung der 1. Gleichung gemäß

$$B^n = \frac{\mathrm{Y} - \alpha' \cdot B^a + \alpha' \cdot B^n}{(1-\Delta^n) \cdot \ddot{a}^n_{x+m}}$$

ergibt sich

$$B^n - {}^{\lim}B^n = \frac{\alpha' \cdot (B^n - B^a)}{(1-\Delta^n) \cdot \ddot{a}^n_{x+m}}$$

und damit

$$\mathrm{E} = (B^n - {}^{\lim}B^n) \cdot (1-\Delta^n) \cdot \ddot{a}^n_{x+m}$$

$$= \alpha' \cdot (B^n - B^a).$$

ii) Bei Versicherten, die das 45. Lebensjahr vollendet haben, darf gemäß § 11 KalV der Mehrbeitrag nicht gezillmert werden. B^n ist daher mit $\alpha' = 0$ zu ermitteln und stimmt mit $^{\lim}B^n$ überein.

Ein Einmalbeitrag ergibt sich somit nicht.

Aufgabe 3

Zu a)

Nach Berücksichtigung der Altersverschiebung um + 3 Jahre ergibt sich die konstante Jahresrente R aus dem Ansatz

$$R \cdot (\ddot{a}_{\overline{20|}}^{5\%} + \frac{D_{88}}{D_{68}} \cdot \ddot{a}_{88}) = 100.000$$
$$R \cdot (\frac{1-1,05^{-20}}{1-1,05^{-1}} + \frac{N_{88}}{D_{68}}) = 100.000$$
$$R \cdot (13,085327 + 4,9250636) = 100.000$$
$$R = 5.552,35$$

Zu b)

Der gesuchte Nettoeinmalbeitrag beträgt

$$5.552,35 \cdot {}_{20|}\ddot{a}_{68} = 5.552,35 \cdot \frac{N_{88}}{D_{68}} = 5.552,35 \cdot 4,9250636 = 27.345,68 \,.$$

Zu c)

Das Fondsvermögen muss nach Ablauf von 20 Jahren aufgebraucht sein. In Formeln muss gelten:

$$(100.000 - 27.345,68) \cdot 1,05^{20} - 5.552,35 \cdot \ddot{s}_{\overline{20|}}^{5\%} \overset{!}{=} 0$$

Wegen $\ddot{s}_{\overline{20|}}^{5\%} = 1,05^{20} \cdot \ddot{a}_{\overline{20|}}^{5\%} = \frac{1,05^{20}-1}{0,05} \cdot 1,05 = 34,7193$

ergibt sich die Behauptung durch einfaches Nachrechnen.

Aufgabe 4

Zu a)

Bilanzdeckungsrückstellungen werden stets mit der ausreichenden Deckungsrückstellung gerechnet, ggf. werden auch die nach VVG-Reform erhöhten Rückkaufswerte verwendet. Falls der Jahrestag der Versicherung nicht mit dem Bilanzstichtag übereinstimmt, wird eine lineare Interpolation zwischen den benachbarten Jahrestagen vorgenommen. Negative Bilanzdeckungsrückstellungen werden auf Null gesetzt. Beruht der negative Wert auf der Zillmerung, so werden zum Ausgleich Forderungen an Versicherungsnehmer mit positivem Vorzeichen auf der Aktivseite der Bilanz berücksichtigt.

Zu b)

Die gezillmerte Deckungsrückstellung ${}_tV_x^{\alpha} = {}_tV_x - \alpha^z \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \cdot n \cdot P^a(A_{x:\overline{n|}})$ erhöht sich um $\alpha^z \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{5-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{5|}}} \cdot n \cdot P^a(A_{x:\overline{n|}})$ für t = 0,1,2,3,4 (wie im Seminar erläutert);

Alternativen sind möglich.

Zu c)

Da die gezillmerte Deckungsrückstellung ${}_3V_{40}^{\alpha}$ = € 9505,13 schon angegeben wurde genauso wie die ausreichende Prämie $P^a(A_{40:\overline{20}|})$ = € 4931,36, hat man nur die Leibrentenbarwerte $\ddot{a}_{43:\overline{2}|}$ sowie $\ddot{a}_{40:\overline{5}|}$ zu berechnen: $\frac{N_{43}-N_{45}}{D_{43}}$ = 1,9809995.. bzw. $\frac{N_{40}-N_{45}}{D_{40}}$ = 4,8170934 .., und damit folgt für $\alpha^z \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{5-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{5}|}} \cdot n \cdot P^a(A_{x:\overline{n}|})$

mit t = 3 : $0.04 \cdot 20 \cdot 4931{,}36 \cdot \frac{\ddot{a}_{43:\overline{2}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{5}|}} = 1622{,}39$.

Um diesen Betrag hat man nach drei Jahren das gezillmerte Deckungskapital zu erhöhen, um den Anforderungen des VVG Rechnung zu tragen.

Aufgabe 5

Zu a)

Es gilt:

$$\frac{N_{60}-N_{65}}{D_{60}}P^x = VS \cdot \frac{C_{60}}{D_{60}} + 0{,}8 \cdot VS \cdot \frac{C_{61}}{D_{60}} + 0{,}6 \cdot VS \cdot \frac{C_{62}}{D_{60}} + 0{,}4 \cdot VS \cdot \frac{C_{63}}{D_{60}} + 0{,}2 \cdot VS \cdot \frac{C_{64}}{D_{60}}$$

$$\Rightarrow P^X = VS \cdot \left(\frac{C_{60} + 0{,}8 \cdot C_{61} + 0{,}6 \cdot C_{62} + 0{,}4 \cdot C_{63} + 0{,}2 \cdot C_{64}}{N_{60} - N_{65}} \right) = 3624{,}3065$$

analog $P^Y = 2016{,}1674$

$$\Rightarrow P = \tfrac{1}{2} \cdot (P^X + P^Y) = \tfrac{1}{2} \cdot (3624{,}3065 + 2016{,}1674) = 2820{,}46$$

Alternativer Ansatz:

$$P^X = \frac{100000 \cdot [(n+1) \cdot {}_{|5}A_x - {}_{|5}(IA)_x]}{\ddot{a}_{60:\overline{5}|}}$$

$$= 600000 \cdot \left(\frac{M_{60} - M_{65}}{N_{60} - N_{65}} \right) - 100000 \cdot \left(\frac{R_{60} - R_{65} - 5 \cdot M_{65}}{N_{60} - N_{65}} \right)$$

$$= 100000 \cdot \left(\frac{(n+1) \cdot M_{60} - M_{65} - R_{60} + R_{65}}{N_{60} - N_{65}} \right) = 3624{,}3065$$

analog $P^Y = 2016{,}1674$

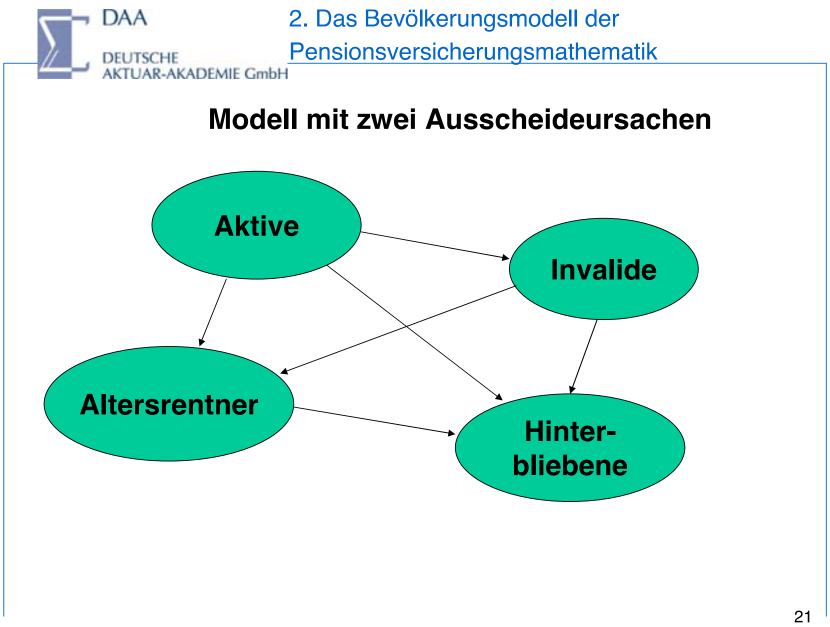
$$\Rightarrow P = \tfrac{1}{2} \cdot (P^X + P^Y) = \tfrac{1}{2} \cdot (3624{,}3065 + 2016{,}1674) = 2820{,}46$$

Zu b)

- Die Deckungsrückstellungen könnten im ersten Jahr negativ werden. Tatsächlich liegt die natürliche Prämie im ersten Jahr über der hier berechneten Prämie.
- Die Zusammensetzung des tatsächlichen Bestands könnte von den jeweils 50%, die zur Berechnung des Unisextarifs verwendet werden, abweichen. Ist der Männeranteil größer, könnte dies zu einem negativen Sterblichkeitsergebnis führen. Grundsätzlich besteht das Risiko einer adversen Selektion, da Männer mit dem Unisex-Tarif günstiger gestellt werden und diesen Tarif deshalb verstärkt nachfragen könnten.

Aufgabe 6

Zu a)



Zu b)

q_x^{aa}: Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen Aktiven innerhalb eines Jahres wegen Todes aus der Aktivengesamtheit auszuscheiden.

i_x : Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen Aktiven, innerhalb eines Jahres wegen Invalidität aus der Aktivengesamtheit auszuscheiden.

q_x^i: Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen Invaliden, innerhalb eines Jahres zu sterben

h_x : Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen, bei Tod im Altersintervall [x,x+1[verheiratet zu sein

q_y^w: Wahrscheinlichkeit einer y-jährigen Witwe, innerhalb eines Jahres zu sterben

Zu c)

Unter Verwendung des Hinweises kommt man zu folgendem Ansatz:

$$q_x = {}_{0,5}q_x + {}_{0,5}p_x \; {}_{0,5}q_{x+0,5}$$

und damit

$${}_{0,5}p_x \; {}_{0,5}q_{x+0,5} = q_x - 0{,}5 \cdot q_x = 0{,}5 \cdot q_x$$

Also:

$${}_{0,5}q_{x+0,5} = \frac{0{,}5 \cdot q_x}{{}_{0,5}p_x} = \frac{0{,}5 \cdot q_x}{1 - {}_{0,5}q_x} = \frac{0{,}5 \cdot q_x}{1 - 0{,}5 \cdot q_x}$$

und

$${}_{0,5}p_{x+0,5} = 1 - {}_{0,5}q_{x+0,5} = 1 - \frac{0{,}5 \cdot q_x}{1 - 0{,}5 \cdot q_x} = \frac{1 - q_x}{1 - 0{,}5 \cdot q_x}$$

Zu d)

$$q_x^1 = q_x^{at} = i_x \; {}_{0,5}q_{x+0,5}^i = i_x \frac{0{,}5 \cdot q_x^i}{1 - 0{,}5 \cdot q_x^i}$$

$$q_x^2 = q_x^a = q_x^{aa} + q_x^{at} = q_x^{aa} + i_x \frac{0{,}5 \cdot q_x^i}{1 - 0{,}5 \cdot q_x^i}$$

$$p_x^3 = p_x^{aw} = q_x^a \, h_x \; {}_{0,5}p_{y(x)+0,5}^w = \left(q_x^{aa} + i_x \frac{0{,}5 \cdot q_x^i}{1 - 0{,}5 \cdot q_x^i}\right) h_x \frac{1 - q_{y(x)}^w}{1 - 0{,}5 \cdot q_{y(x)}^w}$$

$$p_x^4 = 1 - q_x^a = 1 - q_x^{aa} - i_x \frac{0{,}5 \cdot q_x^i}{1 - 0{,}5 \cdot q_x^i} = 1 - q_x^{aa} - i_x + i_x \frac{1 - q_x^i}{1 - 0{,}5 \cdot q_x^i}$$

Aufgabe 7

Zu a)

Für die Bewertung nach steuerlichen Grundsätzen ist das Teilwertverfahren nach § 6a EStG vorgeschrieben. Methodische Besonderheit ist der Ansatz von Mindestaltern für die Finanzierung zur pauschalen Berücksichtigung der Fluktuation.

Für die handelsrechtliche Bewertung ist das modifizierte Teilwertverfahren oder die PUC-Methode geeignet. Für internationale Bewertungen kommt nur die PUC-Methode in Betracht.

Für Zwecke der Kostenrechnung eignet sich die versicherungsmathematische Bruttoprämie mit realistischen Prämissen.

Zu b)

Der Arbeitnehmer erreicht 40 volle Dienstjahre und 41 angefangene Dienstjahre bis zum Alter 65. Damit ist die Wartezeit mit 35 Jahren erfüllt, die Rentenanwartschaft beträgt in diesem Zeitpunkt 110 € monatlich und steigt für jedes weitere Alter um 10 € bis auf 300 € im Alter 54. Der Rentenvektor verharrt dann bei 300 € bis zum Alter 64 und sinkt auf 270 € im Alter 65.

Zu c)

Die nach 30 Dienstjahren erreichbare Rente von 12 % des letzten Entgeltes entspricht einer Steigerung von 0,4 % pro Dienstjahr. Nach der einschlägigen Näherungsformel kostet eine Rentenanwartschaft von 0,1 % pro Dienstjahr bei einem Realzins von 3 % bzw. 2 % 1 % bzw. 1,3 % des laufenden Entgeltes. Damit ergeben sich für die hier vorliegende Zusage Kosten von 4 % bzw. 5,2 %.