DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Bericht zur Prüfung im Oktober 2012 über Mathematik der Personenversicherung (Grundwissen)

Jürgen Strobel (Köln)

Am 13.10.2012 wurde in Köln die zweite Prüfung über Mathematik der Personenversicherung (Grundwissen) nach der Prüfungsordnung der DAV mit insgesamt 268 Teilnehmerinnen und Teilnehmern durchgeführt. Das Bestehen dieser Prüfung ist eine notwendige Voraussetzung, um die Mitgliedschaft in der DAV erwerben zu können. 179 Damen und Herren haben die Prüfungsklausur bestanden.

Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der 7 Aufgaben gestellt waren. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 24 Punkte von 60 möglichen Punkten erreicht werden. Die erforderlichen Sterbetafeln sowie eine Formelsammlung (Barwertformeln) zur Lebensversicherungsmathematik wurden zur Verfügung gestellt.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Für den Leistungsbarwert A_x einer nach Art der Lebensversicherung betriebenen Krankenversicherung (ohne Übertragungswert) soll gezeigt werden:

Es gibt von der Ausscheideordnung unabhängige Werte $A_{x,t}$, so dass

(G) $$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} {}_{t|}q_x \cdot A_{x,t}$$

Dabei sei ${}_{t|}q_x$ die Wahrscheinlichkeit, dass jemand, der im Alter x eingetreten ist, im Alter x + t aus dem Bestand ausscheidet (durch Tod oder Storno).

Beweisen Sie dies in folgenden Schritten:

a) Geben Sie eine Formel für die Werte ${}_{t|}q_x$ an.

b) Wenn Sie in a) die richtige Formel gefunden haben, muss
$$\sum_{t=0}^{\omega-x} {}_{t|}q_x = 1$$
sein. Beweisen Sie, dass diese Gleichung für die von Ihnen definierten Werte ${}_{t|}q_x$ gilt.

c) Geben Sie eine Formel für die Werte $A_{x,t}$ an.

Tip: Überlegen Sie, welchen Leistungsbarwert ein Versicherter finanzieren muss, der im Alter x + t ausscheidet.

d) Beweisen Sie die Gleichung (G).

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Eine 51-jährige Frau hat bisher den Tarif A für ambulante Leistungen und den Tarif S für stationäre Leistungen versichert. Sie wechselt in den leistungsschwächeren Tarif K für ambulante und stationäre Leistungen.

Folgende Werte sind bekannt:

Wert\Tarif	A	S	K
$ä_{51}$	17,2853	18,1212	17,1398
Δ in %	6,3	6,3	6,3
α (in Jahresbeiträgen)	0,25	0,5	0,25
b_{51} (monatlich)	316,78	114,12	394,17
b (monatlich)	244,13	98,19	?
gesetzlicher Zuschlag	24,41	9,82	?
Risikozuschlag	25,75	8,79	?

a) Welcher neue Monatsbeitrag ergibt sich?

b) Wie berechnet sich der neue gesetzliche Zuschlag?

c) Wie berechnet sich der neue Risikozuschlag, wobei die Vorgehensweise derjenigen bei einer Beitragsanpassung entsprechen soll?

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Ein 62- jähriger Mann des Geburtsjahrgangs 1950 schließe gegen einen Einmalbeitrag von 100.000 € eine um 5 Jahre aufgeschobene Rentenversicherung ab, deren Renten lebenslänglich jährlich vorschüssig zu zahlen sind. Eine Leistung bei Tod während der Aufschubzeit ist nicht versichert, das vorhandene Deckungskapital fällt also im Todesfall der Versichertengemeinschaft zu. Die Versicherung beinhaltet ein Kapitalwahlrecht nach Ende der Aufschubzeit. Folgende Kosten sind zu berücksichtigen:

α = 40 ‰ des Einmalbeitrags, einmalig zu Versicherungsbeginn,
γ_2 = 2 % der Jahresrente, jährlich vorschüssig für jedes Jahr der Rentenlaufzeit,

β - Kosten und γ_1- Kosten während der Aufschubzeit werden nicht erhoben.

a) Berechnen Sie die Jahresrente, wobei ein Unisextarif mit Rechnungszins 1,75% anzuwenden ist mit $P^{Uni} = \frac{1}{2} \cdot (P^X + P^Y) = 100.000$ € (jeweils auf die ausreichende Prämie bezogen) auf Basis der Sterbetafel DAV 2004R , wobei P^X die ausreichende Prämie für den Mann und P^Y die ausreichende Prämie für die Frau bezeichnet.
b) Beschreiben Sie (ohne Rechnung), wie sich die folgenden rechtlichen Aspekte im konkreten Fall auf die Bildung der Deckungsrückstellungen auswirken:
- Zinszusatzreserve gemäß Deckungsrückstellungsverordnung (DeckRV)
- Bewertungsreserven gemäß §153VVG
- Mindestrückkaufswert gemäß §169 VVG

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Für eine gemischte Kapitalversicherung über 100. 000 € seien folgende Daten vorgegeben:

- das Eintrittsalter x = 40,
- Laufzeit und Beitragszahlungsdauer betragen n = 20 Jahre,
- Höhe der unmittelbaren Abschlusskosten: 40 Promille der Beitragssumme.

Die mit der Tafel DAV 2008 T-Männer mit einem Zins von 1,75% und folgendem Kostensystem

$\beta = 3\%$ *vom jährlichen Bruttobeitrag*, $\gamma = 0{,}0015$ *der Versicherungssumme*,

$\alpha^{\gamma} = 0{,}001$ *der Versicherungssumme*

berechnete jährliche Bruttoprämie B^a beträgt € 4931.36.

Da nach der VVG-Reform sich die Rückkaufswerte an der Deckungsrückstellung orientieren, die sich bei gleichmäßiger Verteilung der angesetzten Abschlusskosten auf die ersten 5 Vertragsjahre ergeben, berechnet der Aktuar des Versicherungsunternehmens anders als im Seminar mit dem Äquivalenzprinzip einen neuen Referenzbeitrag B^{RKW}, der bei dem Barwertvergleich bei sonst unveränderten Größen von einem Kostenbarwert der Gestalt $\frac{\alpha^Z \cdot n \cdot B^a}{5} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{5}|}$ für die unmittelbaren Abschlusskosten ausgeht (anstelle des sonst üblichen Wertes $\alpha^Z \cdot n \cdot B^a$) .

a) Ist dieser für die Berechnung der höheren Rückkaufswerte maßgebliche Beitrag B^{RKW} höher oder niedriger als B^a ?

b) Man berechne B^{RKW} explizit bei den angegebenen Kostensätzen.

c) Der Aktuar verwendet zur Berechnung der für den Rückkaufswert maßgeblichen Deckungsrückstellungen diesen Beitrag B^{RKW}. Ergeben sich dann höhere oder niedrigere Deckungsrückstellungen als die nach normalem Schema berechneten gezillmerten Deckungsrückstellungen ${}_tV^{\alpha}_{x:\overline{n}|}$ für t > 5?
(In diesem Aufgabenteil ist nur eine begründete qualitative Antwort gefragt, es sind keine expliziten Berechnungen gefordert!).

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Gegeben seien die Sterbewahrscheinlichkeiten $q_{70} = 0{,}04$ und $q_{71} = 0{,}05$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein 70 –jähriger zwischen den Altern 70,5 und 71,5 stirbt unter den folgenden Voraussetzungen:

a) Gleichmäßige Verteilung der Todesfälle eines Alters, d.h.

$${}_tq_x = t \cdot q_x \quad \text{für } 0 < t < 1$$

b) Hyperbolischer Ansatz, d.h.

$${}_tq_x = \frac{t \cdot q_x}{1 - (1 - t) \cdot q_x} \quad \text{für } 0 < t < 1.$$

Hinweis: In beiden Teilen beachte man, dass ${}_{0{,}5}p_{70}$ nicht mit ${}_{0{,}5}p_{70{,}5}$ übereinstimmt.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Sie sind Aktuar der A Dienstleistungs- GmbH und erstellen die versicherungsmathematischen Gutachten für die unmittelbaren Pensionsverpflichtungen der Gesellschaft. Die Gesellschaft benötigt zum Bilanzstichtag 31.12.2012 Gutachten für die Handels- und für die Steuerbilanz.

1) Erläutern Sie die wesentlichen Unterschiede zwischen der handelsbilanziellen und steuerlichen Bewertung der unmittelbaren Pensionsverpflichtungen.

2) Erläutern Sie anhand der entsprechenden formelmäßigen Darstellungen der Prämie die Unterschiede in der Prämienbestimmung beim steuerlichen Teilwertverfahren, dem modifizierten Teilwertverfahren (nach Engbroks) und dem Gegenwartswertverfahren.

3) Die A Dienstleistungs- GmbH hat festgestellt, dass bei den Mitarbeitern mit einer unmittelbaren Pensionszusage eine signifikante Abweichung zwischen der Anzahl der Invalidisierungsfälle und den Invalidisierungswahrscheinlichkeiten der Richttafeln 2005 G besteht. Aus diesem Grund beauftragt die A Dienstleistungs- GmbH Sie, bei der handelsrechtlichen Bewertung der Pensionsverpflichtungen die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten auf 50% der Werte in den Richttafeln 2005 G zu reduzieren. Weitere Ausscheidewahrscheinlichkeiten sollen nach Vorstellung der A Dienstleistungs- GmbH nicht modifiziert werden.
   a) Warum ist ein solches Vorgehen im Modell der Richttafeln 2005 G kritisch zu sehen? Begründen Sie Ihre Auffassung auch mittels formelmäßiger Darstellung des im Repetitorium vorgestellten Modellzusammenhangs in den Richttafeln.
   b) Geben Sie eine mögliche Modifikation der Richttafeln 2005 G an, bei der einerseits der Auftrag der A Dienstleistungs- GmbH erfüllt wird (d.h. Modifikation der Invalidisierungswahrscheinlichkeiten auf 50 % der Richttafelwerte) und andererseits der relevante Modellzusammenhang der Richttafeln 2005 G erhalten bleibt.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Die Firma Senkendeckel GmbH hat ihren Beschäftigten unmittelbare Pensionszusagen erteilt. Gewährt werden Renten bei Invalidität und Erreichen der Altersgrenze. Die Höhe der Invaliden- und Altersrente beträgt monatlich 300,00 €. Nach 10 vollendeten Dienstjahren erhöht sich die Rentenanwartschaft um weitere 10,00 € für jedes weitere vollendete Dienstjahr bis auf höchstens 500,00 € monatlich nach insgesamt 30 vollendeten Dienstjahren. Als feste Altersgrenze ist die Vollendung des 65. Lebensjahres vorgesehen. Bei Rentenbezug vor der festen Altersgrenze wird die Altersrente für jeden Monat des vorzeitigen Rentenbezuges um 0,4 % ihres Betrages gekürzt.

a) Wie lautet die Formel für den steuerlichen Teilwert nach § 6a Abs. 3 EStG zum **31.10.2012** für den Anwärter Heinz Kötter, geb. am 16.4.1962, der am 1.3.1992 bei der Firma eingetreten ist und damals die oben beschriebene Pensionszusage erhielt? Bei der Teilwertberechnung soll das Pensionsalter **63** in Ansatz gebracht werden.

b) Schätzen Sie den prozentualen Zuwachs des steuerlichen Teilwerts zum 31.10.2014 unter der Annahme, dass Herr Kötter zu diesem Zeitpunkt aktiv ist und die Pensionszusage unverändert fortbesteht. .

Lösungsvorschläge

zu Aufgabe 1

zu a)

$${}_{t|}q_x = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x}\text{ , wobei } l_{\omega+1} = 0 \text{ sei.}$$

zu b)

$$\sum_{t=0}^{\omega-x} {}_{t|}q_x = \frac{1}{l_x} \cdot \left(\sum_{t=0}^{\omega-x} l_{x+t} - \sum_{t=0}^{\omega-x} l_{x+t+1} \right) = \frac{1}{l_x} \cdot \left(l_x - l_{\omega+1} \right) = 1$$

zu c)

$$A_{x,t} = \sum_{j=0}^{t} K_{x+j} \cdot v^j$$

zu d)

$$\sum_{t=0}^{\omega-x} {}_{t|}q_x \cdot A_{x,t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} {}_{t|}q_x \cdot \sum_{j=0}^{t} K_{x+j} \cdot v^j = \sum_{j=0}^{\omega-x} \sum_{t=j}^{\omega-x} {}_{t|}q_x \cdot K_{x+j} \cdot v^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\omega-x} K_{x+j} \cdot v^j \cdot \sum_{t=j}^{\omega-x} {}_{t|}q_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} K_{x+j} \cdot v^j \cdot \frac{l_{x+j}}{l_x} = \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=0}^{\omega-x} K_{x+j} \cdot D_{x+j} = A_x$$

Dabei wurde benutzt, dass

$$\sum_{t=j}^{\omega-x} {}_{t|}q_x = \frac{1}{l_x} \cdot \left(\sum_{t=j}^{\omega-x} l_{x+t} - \sum_{t=j}^{\omega-x} l_{x+t+1} \right) = \frac{1}{l_x} \cdot \left(l_{x+j} - l_{\omega+1} \right) = \frac{l_{x+j}}{l_x}$$

zu Aufgabe 2

zu a)

Mit α" = 0 (Tieferstufung!) erhält man als Spezialfall der Prämienberechnung gemäß Anhang I, B der Kalkulationsverordnung unter Berücksichtigung zweier Ausgangstarife

$$b^K = b^K_{51} - \frac{\left(1-\Delta^A\right)ä^A_{51}}{\left(1-\Delta^K\right)ä^K_{51}}\,(b^A_{51} - b^A) - \frac{(1-\Delta^S)\,ä^S_{51}}{(1-\Delta^K)\,ä^K_{51}}\,(b^S_{51} - b^S) - \frac{\alpha^K\, b^K_{51} - \alpha^A\, b^A_{51} - \alpha^S\, b^S_{51}}{\left(1-\Delta^K\right)ä^K_{51}}\,.$$

Nach Einsetzen der Zahlenwerte erhält man

$$b^K = 394{,}17 - \frac{0{,}937 \cdot 17{,}2853}{0{,}937 \cdot 17{,}1398}(316{,}78 - 244{,}13) - \frac{0{,}937 \cdot 18{,}1212}{0{,}937 \cdot 17{,}1398}(114{,}12 - 98{,}19)$$

$$- \frac{0{,}25 \cdot 394{,}17 - 0{,}25 \cdot 316{,}78 - 0{,}5 \cdot 114{,}12}{0{,}937 \cdot 17{,}1398}$$

$$= 394{,}17 - 1{,}0085 \cdot 72{,}65 - 1{,}0573 \cdot 15{,}93 + 37{,}7125 / 16{,}0600$$

$$= 306{,}41.$$

zu b)

Der neue gesetzliche Zuschlag beträgt 10 % des neuen Monatsbeitrags, also $306{,}41 \cdot 0{,}1 = 30{,}64$.

zu c)

Der (Gesamt-) Risikozuschlag wird entsprechend der Änderung des Monatsbeitrags umgerechnet:

$$RZ^K = \frac{b^K}{b^A + b^S} \cdot (RZ^A + RZ^S)$$

$$= \frac{306{,}41}{244{,}13 + 98{,}19} \cdot (25{,}75 + 8{,}79) = 30{,}92.$$

zu Aufgabe 3

zu a)

Sowohl bei Frauen als auch Männern wird beim Geburtsjahr 1950 eine Altersverschiebung von 3 Jahren berücksichtigt. Es gilt:

$$P^a = R\cdot({}_{m|}\ddot{a}_x + \gamma_2 \cdot {}_{m|}\ddot{a}_x) + \alpha^Z \cdot P^a \quad bzw. \quad P^a = R\cdot({}_{m|}\ddot{a}_y + \gamma_2 \cdot {}_{m|}\ddot{a}_y) + \alpha^Z \cdot P^a$$

$$\Rightarrow P^{Uni} = \tfrac{1}{2}\cdot(P^X + P^Y) = 100.000€ = \tfrac{1}{2}\cdot\left[\frac{R\cdot({}_{m|}\ddot{a}_x + \gamma_2 \cdot {}_{m|}\ddot{a}_x)}{1-\alpha^Z} + \frac{R\cdot({}_{m|}\ddot{a}_y + \gamma_2 \cdot {}_{m|}\ddot{a}_y)}{1-\alpha^Z}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\left[\frac{R\cdot\frac{N_{70}^X}{D_{65}^X}\cdot(1+0{,}02)}{0{,}96} + \frac{R\cdot\frac{N_{70}^Y}{D_{65}^Y}\cdot(1+0{,}02)}{0{,}96}\right]$$

$$\Rightarrow R = \frac{2\cdot P^{Uni}}{\left[\frac{\frac{N_{70}^X}{D_{65}^X}\cdot(1+0{,}02)}{0{,}96} + \frac{\frac{N_{70}^Y}{D_{65}^Y}\cdot(1+0{,}02)}{0{,}96}\right]} = \frac{192.000}{(17{,}50802428 + 19{,}68038157)\cdot 1{,}02} = 5.061{,}666125€$$

Alternativer Ansatz:

$$P^a = R\cdot({}_{m|}\ddot{a}_x + \gamma_2 \cdot {}_{m|}\ddot{a}_x) + \alpha^Z \cdot P^a \quad bzw. \quad P^a = R\cdot({}_{m|}\ddot{a}_y + \gamma_2 \cdot {}_{m|}\ddot{a}_y) + \alpha^Z \cdot P^a$$

$$\Rightarrow R = \frac{P^a\cdot(1-\alpha^Z)}{({}_{m|}\ddot{a}_x + \gamma_2 \cdot {}_{m|}\ddot{a}_x)} \quad bzw. \quad P^a = \frac{R\cdot({}_{m|}\ddot{a}_x + \gamma_2 \cdot {}_{m|}\ddot{a}_x)}{1-\alpha^Z} = \frac{R\cdot\frac{N_{70}}{D_{65}}\cdot(1+0{,}02)}{0{,}96}$$

$$gleichsetzen \Rightarrow \frac{P_X^a}{\left(\frac{N_{70}^X}{D_{65}^X}\right)} = \frac{P_Y^a}{\left(\frac{N_{70}^Y}{D_{65}^Y}\right)} \Rightarrow P_X^a = \frac{P_Y^a\cdot\left(\frac{N_{70}^X}{D_{65}^X}\right)}{\left(\frac{N_{70}^Y}{D_{65}^Y}\right)} = \frac{17{,}50802428}{19{,}68038157}\cdot P_Y^a$$

$$mit \quad \frac{1}{2}\cdot P_X^a + \frac{1}{2}\cdot P_Y^a = 100.000 \quad \Rightarrow \quad P_X^a = \frac{17{,}50802428}{19{,}68038157}\cdot(200.000 - P_X^a) \Rightarrow P_X^a = 94.158{,}50925€$$

$$\Rightarrow P_Y^a = 105.841{,}4908€$$

$$\Rightarrow R = \frac{P^a\cdot 0{,}96}{\left(\frac{N_{70}^X}{D_{65}^X}\right)\cdot 1{,}02} = \frac{94.158{,}50925\cdot 0{,}96}{17{,}50802428\cdot 1{,}02} = 5.061{,}666125€$$

zu b)

- Die Zinszusatzreserve erhöht die zu stellenden Deckungsrückstellungen nur, falls der Referenzzins unter dem Rechnungszins liegt. Im vorliegenden Fall ist der Rechnungszins 1,75%, so dass in absehbarer Zeit keine Zinszusatzreserve zu bilden ist.
- Die Bewertungsreserven werden grundsätzlich nur rechnerisch zugeordnet, es erfolgt keine Erhöhung der Deckungsrückstellung. Eine Zuteilung (und damit Erhöhung der Deckungsrückstellung) erfolgt bei Rentenversicherungen bei Rentenübergang nach 5 Jahren (§ 153 Abs.3 Satz 2 VVG).
- Die Anforderungen an den Mindestrückkaufswert führen hier nicht zu höheren Deckungsrückstellungen, da die Abschlusskosten durch den Einmalbeitrag sofort verdient

werden. Im konkreten Fall würde der Ausschluss einer Todesfallleistung während der Aufschubzeit zu einer Umwandlung in eine prämienfreie Versicherung führen (gemäß § 169 Abs. 2 Satz 1 VVG).

zu Aufgabe 4

zu a)

Der Bruttobeitrag B^a der gemischten Kapitalversicherung wird nach der folgenden Äquivalenzgleichung: $B^a \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = S \cdot A_{x:\overline{n}|} + \alpha^Z \cdot n \cdot B^a + (\alpha_\gamma + \gamma) S \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \beta \cdot B^a \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ berechnet.

Da für positive Zinsen $\ddot{a}_{x:\overline{5}|} < 5$ gilt, ist auch $\frac{\alpha^Z \cdot n \cdot B^a}{5} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{5}|} < \alpha^Z \cdot n \cdot B^a$ und damit gilt offenbar $B^{RKW} < B^a$.

zu b)

Bei den hier konkret vorliegenden Daten ergibt sich B^{RKW} zu:

$$B^{RKW} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = S \cdot A_{x:\overline{n}|} + \alpha^Z \cdot n \cdot B^a \cdot \frac{\ddot{a}_{x:\overline{5}|}}{5} + (\alpha_\gamma + \gamma) S \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \beta \cdot B^a \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \quad .$$

Wegen $\ddot{a}_{x:\overline{5}|} = \frac{N_{40} - N_{45}}{D_{40}} = \frac{1299102{,}009 - 1065675{,}629}{48457{,}931} = 4{,}81709..$ und

$\frac{\alpha^Z \cdot n \cdot B^a}{5} = 789{,}0176$ ist daher $\frac{\alpha^Z \cdot n \cdot B^a}{5} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{5}|} = 3800{,}77148..$

Man berechnet ferner:

$\ddot{a}_{40:\overline{20}|} = \frac{N_{40} - N_{60}}{D_{40}} = \frac{1299102{,}009 - 493615{,}9531}{48457{,}931} = 16{,}622523...$ sowie für i=1,75%:

d – 0,0025 = 0,014699017.. und damit erhält man dann:

$$B^{RKW} = \frac{S(1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + (\alpha^\gamma + \gamma)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}) + \beta \cdot B^a \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha^Z \cdot n \cdot B^a}{5} \ddot{a}_{x:\overline{5}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} =$$

$$= \frac{100000 \cdot (1 - (d - 0.0025) \cdot 16{,}6223782) + 0.03 \cdot 4931{,}36 \cdot 16{,}6223782 + 3800{,}77148}{16{,}6223782} = 4922{,}679199..$$

und dieser Wert ist in der Tat kleiner als $B^a = 4931{,}36$.

zu c)

Weil sich nun Deckungsrückstellungen nach dem erweiterten Äquivalenzprinzip als Differenz des Barwertes der zukünftigen Versicherungsleistungen minus dem Barwert der zukünftigen Prämien berechnen, folgt wegen der Ungleichung $B^{RKW} < B^{a}$ sofort, dass die mit dem Referenzbeitrag B^{RKW} berechnete Deckungsrückstellung etwas größer als die klassische gezillmerte Deckungsrückstellung ${}_tV^{\alpha}_{x:\overline{n}|}$ ist, insbesondere für t > 5.

zu Aufgabe 5

In beiden Aufgabenteilen gilt:

$$ {}_{0,5|1}q_{70} = {}_{0,5}p_{70} \cdot {}_{0,5}q_{70,5} + p_{70} \cdot {}_{0,5}q_{71} \qquad (1) $$

oder

$$ {}_{0,5|1}q_{70} = {}_{1,5}q_{70} - {}_{0,5}q_{70} $$

$$ = q_{70} + p_{70} \cdot {}_{0,5}q_{71} - {}_{0,5}q_{70} \qquad (2) $$

oder

$$ {}_{0,5|1}q_{70} = {}_{0,5}p_{70} \cdot (1 - {}_{1}p_{70,5}) = {}_{0,5}p_{70} \cdot (1 - {}_{0,5}p_{70,5} \cdot {}_{0,5}p_{71}) \qquad (3) $$

Ferner gilt bei Verwendung der Ansätze (1) und (3)

$$ q_{70} = 0,04 = 1 - {}_{0,5}p_{70} \cdot {}_{0,5}p_{70,5} \text{ bzw. } {}_{0,5}p_{70,5} = \frac{0,96}{{}_{0,5}p_{70}}. $$

Mit dem numerisch einfachsten Ansatz (2) erhält man konkret:

zu a)

$$ {}_{0,5|1}q_{70} = 0,04 + 0,96 \cdot 0,025 - 0,02 = 0,044 $$

zu b)

$$ {}_{0,5|1}q_{70} = 0,04 - \frac{0,5 \cdot 0,04}{1 - (1 - 0,5)\,0,04} + 0,96 \cdot \frac{0,5 \cdot 0,05}{1 - (1 - 0,5)\,0,05} $$

$$ = 0,04 - 0,020408 + 0,96 \cdot 0,025641 $$

$$ = 0,044207 $$

zu Aufgabe 6

zu 1)

Wesentliche Unterschiede zwischen der handelsbilanziellen und der steuerlichen Bewertung unmittelbarer Pensionsverpflichtungen sind:

Differenzierungsmerkmal	**Handelsbilanz**	**Steuerbilanz**
Zugrunde liegende Bestimmungen	HGB (§§ 246, 249, 253) und Stellungnahmen des IDW (RS HFA 28 und RS HFA 30)	EStG (§ 6a) und Richtlinien und Äußerungen der Finanzverwaltung (z.B. R 6a EStR)
Rechnungszins	Durchschnittlicher Marktzinssatz der vergangenen sieben Geschäftsjahre entsprechend der Restlaufzeit der Verpflichtungen	Rechnungszinsfuß von 6 % vorgeschrieben
Finanzierungsverfahren	Projected Unit Credit Methode oder (modifiziertes) Teilwertverfahren	Steuerliches Teilwertverfahren
Trendannahmen	Künftige dynamische Entwicklungen sind einzubeziehen	Künftige Erhöhungen sind nur einzubeziehen, wenn sie dem Grunde und der Höhe nach feststehen
Fluktuation	Ist explizit bei der Bewertung zu berücksichtigen	Pauschale Berücksichtigung über Mindestalter (27 / 28 / 30 Jahre)
Weitere Besonderheiten	Vorhandenes Deckungsvermögen i.S. von § 246 HGB ist zu saldieren	Nachholverbot, strenges Schriftformgebot, Saldierungsverbot

zu 2)

Die Prämie des steuerlichen Teilwertverfahrens und des Gegenwartswertverfahrens lautet:

$$P_x = \frac{{}_0B_x}{a^a_{x\,\overline{n|}}}$$

Der Unterschied zwischen dem Gegenwartswertverfahren und dem steuerlichem Teilwertverfahren liegt im Finanzierungsbeginn. Beim Gegenwartswert entspricht der Finanzierungsbeginn dem Alter bei Zusageerteilung (oder –änderung), beim steuerlichen Teilwertverfahren hingegen dem Beginn des Wirtschaftsjahres des Eintritts.

Die Prämie beim modifizierten Teilwertverfahren (nach Engbroks) lautet:

$$P_x^{(m)} = \frac{v^m \cdot {}_m B_x}{a_{\overline{m}|} + v^m \cdot a^a_{x+m\,\overline{n-m}|}}$$

In die Ermittlung der Prämie des modifizierten Teilwertes fließt damit das Wissen ein, dass in der Zeit zwischen Finanzierungsbeginn und Bilanzstichtag 31.12.2012 keine Versorgungsfälle eingetreten sind. Beim steuerlichen Teilwertverfahren hingegen werden auch die aus Sicht des Finanzierungsbeginns möglichen Versorgungsfälle zwischen Finanzierungsbeginn und Bilanzstichtag berücksichtigt.

zu 3)

Im Modell der Richttafeln 2005 G gilt die im Repetitorium vorgestellte 1. Konsistenzgleichung:

$$q^g_x = \frac{l^a_x}{l^g_x} \cdot q^a_x + \frac{l^g_x - l^a_x}{l^g_x} \cdot q^i_x$$

$$\text{mit} \quad q^a_x = q^{aa}_x + \tfrac{1}{2} \cdot i_x \cdot \frac{q^i_x}{1 - \frac{1}{2} q^i_x}$$

Damit besteht ein elementarer Zusammenhang zwischen den einzelnen Ausscheidewahrscheinlichkeiten. Eine Modifikation der Invalidisierungswahrscheinlichkeiten der Richttafeln 2005 G führt aufgrund der Konsistenzgleichung somit zu einem Anpassungsbedarf bei mindestens einer weiteren Ausscheidewahrscheinlichkeit.

Eine isolierte Modifikation der Invalidisierungswahrscheinlichkeiten - wie von der A Dienstleistungs GmbH geplant - führt hingegen zu einem Modellbruch und ist damit kritisch zu sehen.

Eine Möglichkeit für eine modellkonforme Modifikation der Richttafeln wäre es, die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten der Richttafeln auftragsgemäß auf 50 % zu reduzieren und dann die q^{aa}_x mit Hilfe der 1. Konsistenzgleichung neu zu bestimmen. Es sind jedoch auch weitere Modifikationen denkbar.

Anmerkung: Im Modell der Richttafeln 2005 G bestehen zwischen den Ausscheidewahrscheinlichkeiten der einzelnen Generationen weitere Modellzusammenhänge, die im Falle einer Modifikation zu beachten sind. Allerdings wurden diese Zusammenhänge nicht im Rahmen des Grundwissens Pensionsversicherungsmathematik behandelt.

zu Aufgabe 7

zu a)

Das versicherungstechnische Alter am 31.10.2012 beträgt 51 Jahre, das Eintrittsalter (versicherungstechnisches Alter am 1.11.1991) beträgt 30 Jahre. Bis zur Altersgrenze 63 werden 33 volle Dienstjahre erreicht, das Beginnalter für die Bestimmung des Leistungsvektors beträgt 63 – 33 = 30 Jahre. Die Formel lautet:

$$A_{51} - \frac{A_{30}}{a^{aa}_{30,63-30}} \cdot a^{aa}_{51,\,63-51} \text{ mit}$$

$$A_{51} = 12 \cdot (410 \cdot {}^{(12)}a^{aiA}_{51} + 10 \cdot \frac{D^a_{52}}{D^a_{51}} \cdot {}^{(12)}_{<}a^{aiA}_{52} - 10 \cdot \frac{D^a_{61}}{D^a_{51}} \cdot {}^{(12)}_{<}a^{aiA}_{61} - 24 \cdot 0{,}4\% \cdot 500 \cdot \frac{D^a_{63}}{D^a_{51}} \cdot {}^{(12)}a^{aiA}_{63})$$

und

$$A_{30} = 12 \cdot (300 \cdot {}^{(12)}a^{aiA}_{30} + 10 \cdot \frac{D^a_{41}}{D^a_{30}} \cdot {}^{(12)}_{<}a^{aiA}_{41} - 10 \cdot \frac{D^a_{61}}{D^a_{30}} \cdot {}^{(12)}_{<}a^{aiA}_{61} - 24 \cdot 0{,}4\% \cdot 500 \cdot \frac{D^a_{63}}{D^a_{30}} \cdot {}^{(12)}a^{aiA}_{63})$$

zu b)

Die abgelaufene Dauer m betrug am 31.10.2012 51 - 30 = 21 Jahre. Nach der Näherungsformel

$_{m+1}V_x \approx {}_mV_x \cdot \frac{m+1}{m} \cdot 1{,}03$ ergibt sich ein Schätzwert zum 31.10.2014 von

$100\% \cdot \frac{23}{21} \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 = 116{,}2\%$. Der Schätzwert für den Zuwachs beträgt 16,2 %.