DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Mathematik der Personenversicherung (Grundwissen)
Klausur vom 15. 10. 2011

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und vergessen Sie nicht, Ihren Namen auf jedes Blatt zu schreiben.

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner, beigefügte Formelsammlung, beigefügte Sterbetafeln

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Die Zufallsvariable $T = T_0$ (Lebensdauer eines Neugeborenen) sei stetig verteilt mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{2}{75} \cdot x^{-\frac{1}{3}}$$

a) Bei welchem Wert $\omega \in IR$ wird $P(T > \omega)$ zu Null? Man wähle diesen Wert ω als Schlussalter, also als maximal mögliche Lebensdauer des Neugeborenen.
b) Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein 60-jähriger vor der Vollendung seines 70. Lebensjahres stirbt.
c) Wie hoch ist die Lebenserwartung eines Neugeborenen?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Für eine reine Risikolebensversicherung sind folgende Daten gegeben:
männlich, Alter 63 Jahre, Laufzeit 4 Jahre, jährliche laufende vorschüssige Beitragszahlung, Versicherungssumme 100.000 €.
Bilden Sie aus der gegebenen Sterbetafel DAV 2008 T (s. Anlage) für Männer und Frauen eine Unisex-Sterbetafel, bei der für jedes Alter gilt: $q_{Unisex} = \frac{1}{2} \cdot (q_x + q_y)$, d.h. die Unisex-Sterbewahrscheinlichkeit sei das arithmetische Mittel aus den Sterbewahrscheinlichkeiten von Männern und Frauen gleichen Alters.

a) Berechnen Sie für die Unisex-Sterbetafel den jährlichen Nettobeitrag und vergleichen Sie ihn mit den separat berechneten Nettobeiträgen von Männern und Frauen.
b) Warum könnte eine wie oben gebildete Unisex-Sterbetafel für das Versicherungsunternehmen nicht ausreichen? Wie könnte das Versicherungsunternehmen gegebenenfalls auf solche Schwierigkeiten reagieren?

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Für eine gemischte Kapitalversicherung über 100 000 € seien folgende Daten vorgegeben:

- Eintrittsalter x = 40,
- Laufzeit und Beitragszahlungsdauer betragen n = 20 Jahre,
- Die Höhe der unmittelbaren Abschlusskosten sind 40 Promille der Beitragssumme.
- Die mit der Tafel DAV 2008 T-Männer und dem Kostensystem:

  β = 3% des jährlichen Bruttobeitrags, γ = 0,425% der Versicherungssumme,

  α^{γ} = 0,1% der Versicherungssumme

berechnete jährliche Bruttoprämie (= ausreichende Prämie) beträgt 5004,69 €, die reine Nettoprämie berechnet sich zu 4078,17 €.

a) Man berechne die gezillmerte Deckungsrückstellung ${}_{10}V_{40}^{\alpha}$ nach zehn Jahren mit der Tafel DAV 2008 T – Männer und dem garantierten Zins von 2,25 %.

b) Nach der VVG-Reform orientiert sich der Rückkaufswert an der Deckungsrückstellung, die sich ergibt bei gleichmäßiger Verteilung der angesetzten Abschlusskosten auf die ersten 5 Vertragsjahre.
Berechnet man unter dieser Prämisse den Bruttobeitrag der gemischten Kapitalversicherung nach der folgenden Äquivalenzgleichung:

$$B \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = S \cdot A_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha^{Z}}{\ddot{a}_{x:\overline{5}|}} \cdot n \cdot B \cdot \ddot{a}_{x:\overline{5}|} + (\alpha_{\gamma} + \gamma) S \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \beta \cdot B \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \quad ,$$

so erhält man folgenden offenbar denselben Bruttobeitrag wie oben.

Frage: Ist dann die Brutto-Deckungsrückstellung zehn Jahre nach Versicherungsbeginn gerechnet als Differenz des Barwertes der zukünftigen Versicherungsleistungen einschließlich Kosten abzüglich des Barwertes der noch ausstehenden Beiträge verschieden von der unter (i) gerechneten gezillmerten Deckungsrückstellung? Was ist die Konsequenz für die Rückkaufswerte nach zehn Jahren Versicherungsdauer?

Aufgabe 4 (11 Punkte)

Gegeben sei eine Kalkulation für Männer eines neu einzuführenden ungezillmerten Krankheitskostentarifs T nach Art der Lebensversicherung ohne Übertragungswert. Das Profil sei monoton steigend. Für die Werte von T werden die üblichen Bezeichnungen verwendet.

Vor Tarifeinführung werde diese Kalkulation noch einmal wie folgt geändert: Der Rechnungszins wird gesenkt, die übrigen Berechnungsparameter bleiben gleich. Die mit dem gesenkten Rechnungszins ermittelten Werte werden durch einen Querstrich gekennzeichnet. Im Folgenden können Sie (**ohne sie zu beweisen**) die folgende Hilfsgleichung (G) für alle $x < \omega$ verwenden:

(G) $$\Big(\sum_{t=0}^{\omega-x} K_{x+t} \cdot {}_t p_x \cdot \overline{v}^t\Big)\cdot\Big(\sum_{t=0}^{\omega-x} Z_{x+t} \cdot {}_t p_x \cdot v^t\Big) - \Big(\sum_{t=0}^{\omega-x} K_{x+t} \cdot {}_t p_x \cdot v^t\Big)\cdot\Big(\sum_{t=0}^{\omega-x} Z_{x+t} \cdot {}_t p_x \cdot \overline{v}^t\Big)$$
$$= \sum_{j=1}^{\omega-x} {}_j p_x \cdot \sum_{t=0}^{j-1} {}_t p_x \cdot (K_{x+j} \cdot Z_{x+t} - Z_{x+j} \cdot K_{x+t}) \cdot (\overline{v}^j \cdot v^t - v^j \cdot \overline{v}^t)$$

Dabei sei (Z_x) eine beliebige Zahlenfolge und wie üblich ${}_t p_x = \dfrac{l_{x+t}}{l_x}$.

.

a) Beweisen Sie für alle $x < \omega$:
Für die Jahresnettoprämien des Neugeschäfts zum Eintrittsalter x gilt:

$$P_x \le \overline{P}_x$$

Ist im Bereich ab Alter x das Profil an mindestens einer Stelle streng monoton steigend, so gilt:

$$P_x < \overline{P}_x$$

Anleitung: Wenden Sie zum Beweis beider Aussagen (G) an.

b) Ein Tarif T' habe andere Kopfschäden K_x' als Tarif T, aber sonst gleiche Rechnungsgrundlagen wie Tarif T. Seine zugehörigen Werte werden durch einen Strich oben rechts gekennzeichnet.
Das Profil von T' sei weniger steil als das von T, also:

$$\frac{K'_{x+1}}{K'_x} < \frac{K_{x+1}}{K_x} \quad \text{für alle } x < \omega$$

Beweisen Sie:

Die Rechnungszinssenkung wirkt sich auf die Jahresnettoprämien des Neugeschäfts von T' relativ schwächer aus als bei Tarif T, d.h.:

$$\frac{\overline{P}'_x}{P'_x} < \frac{\overline{P}_x}{P_x} \quad \text{für alle } x < \omega$$

Anleitung: Wenden Sie auch hier (G) an.

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Einen Krankheitskostentarif K gebe es sowohl in einer Version mit 250 € Selbstbehalt (Grundkopfschaden der Frauen: 1.241,19 €) als auch in einer Version mit 500 € Selbstbehalt (Grundkopfschaden der Frauen: 1.024,52 €). Es wird die Einrechnung folgender relativer Zuschlagssätze bezogen auf den Bruttobeitrag für erforderlich gehalten:

Unmittelbare Abschlusskosten	$\alpha = \alpha_u = 0$
Mittelbare Abschlusskosten	$\alpha_m = 6\,\%$
Schadenregulierungskosten	$\rho = 3\,\%$
Sonstige Verwaltungskosten	$\beta = 2{,}5\,\%$
Sicherheitszuschlag	$\sigma = 5\,\%$
Zuschlag für Standard- und Basistarif	$\Omega = 1{,}3\,\%$

Im Tarif K250 seien

862 Frauen mit einem monatlichen Durchschnittsbeitrag von 171,98 €,

912 Frauen mit einem monatlichen Durchschnittsbeitrag von 201,11 € und

799 Frauen mit einem monatlichen Durchschnittsbeitrag von 240,01 €

versichert. Im Tarif K500 seien es

1217 Frauen mit einem monatlichen Durchschnittsbeitrag von 185,16 € und

977 Frauen mit einem monatlichen Durchschnittsbeitrag von 230,77 €.

a) Die Kalkulationsverordnung schreibt vor, dass bestimmte Zuschläge altersunabhängig zu kalkulieren sind. Leiten Sie die dieser Vorschrift entsprechenden (rohen) altersunabhängigen jährlichen Zuschläge für die Frauen der beiden Tarife her.

b) Die sich gemäß a) ergebenden Werte sind geprägt durch unterschiedliche Altersverteilungen in den beiden Tarifen. Daher sollen ausgeglichene altersunabhängige Zuschläge ermittelt werden, die einerseits im Verhältnis der Grundkopfschäden zueinander stehen und andererseits die gleiche Kostendeckung ergeben wie die rohen Werte. Berechnen Sie diese.

c) Welche Intention verfolgte der Gesetzgeber mit der Verpflichtung zu altersunabhängigen Zuschlägen?

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Die Firma Frühtau GmbH handelt mit frischen Schnittblumen. Sie erteilt ihren Führungskräften jeweils unmittelbare Pensionszusagen. Zugesagt werden Leistungen bei Invalidität und Erreichen der Altersgrenze von 65 Jahren, sowie Leistungen an den im Todeszeitpunkt ggf. vorhandenen Ehegatten. Es besteht eine Wartezeit von 10 vollen Dienstjahren. Die lebenslänglich zahlbare Invalidenrente beträgt 20 % des ruhegehaltfähigen Einkommens, die Altersrente beläuft sich auf 25 % des ruhegehaltfähigen Einkommens. Die Witwenrente beträgt 60 % der an die Führungskraft im Todeszeitpunkt gezahlten Rente. Wenn der Tod vor Rentenbeginn eintritt, beträgt die Witwenrente 60 % der zugesagten Invalidenrente. Die Anpassung der Renten soll jeweils an der Entwicklung des Preisindexes orientiert werden.

a) Geben Sie in der Terminologie der Richttafeln eine Formel für den steuerlichen Teilwert der beschriebenen unmittelbaren Pensionszusage gegenüber Herrn Ferdinand Daumengrün, den technischen Leiter und Frischhaltebeauftragten der Firma Frühtau GmbH an. Herr Daumengrün wurde am 23. Juni 1964 in Bad Berleburg geboren und trat am 15. August 1998 in die Firma ein. Die Zusage wurde am 17.5.2004 erteilt. Sein Gehalt beträgt zum Bilanzstichtag 8.500 € monatlich. Der Bilanzstichtag ist der 31.10.2011.

b) Schätzen Sie die prozentuale Erhöhung des Teilwerts zum 31.10.2012 bei unverändertem Gehalt.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Das Symbol a_x^{ai} bezeichnet bekanntlich den Barwert einer Anwartschaft eines x-jährigen männlichen Aktiven auf lebenslängliche Invalidenrente, die ganzjährig vorschüssig gezahlt wird.

a) Wie hängt dieser Barwert mit den Symbolen D_{x+j}^{ai} und D_x^a zusammen?

b) Wie ist der Ausdruck D_x^{ai} definiert?

c) Erläutern Sie mit Hilfe von a) und b) den Zusammenhang mit der allgemeinen Darstellung des Barwertes in der Pensionsversicherungsmathematik.

d) Wie verändert sich der Barwert a_x^{ai} jeweils mit zunehmendem Alter x, mit abnehmendem Zins, bei erhöhter Altersgrenze und bei unterjähriger Zahlungsweise?

Lösungsvorschläge

zu Aufgabe 1

a) Zunächst beachte man, dass die Lebensdauer T nur Werte zwischen 0 und dem Schlussalter ω annehmen kann. Da f (x) die erste Ableitung der Verteilungsfunktion F(x) ist, erhält man damit für $0 \le x \le \omega$ durch einfache Integration

$$F(x) = \frac{2}{75} \cdot \int_0^x t^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{25} \cdot x^{\frac{2}{3}} \text{ und}$$

$$P(T > \omega) = 0 \Leftrightarrow 1 - P(T \le \omega) = 0 \Leftrightarrow 1 - F(\omega) = 1 - \frac{1}{25} \cdot \omega^{\frac{2}{3}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{25} \cdot \omega^{\frac{2}{3}} = 1 \Leftrightarrow \omega = 125$$

b) Gesucht ist

$$P(60 < T \le 70 \mid T > 60) = \frac{F(70) - F(60)}{1 - F(60)} = \frac{\frac{1}{25} \cdot (70^{\frac{2}{3}} - 60^{\frac{2}{3}})}{1 - \frac{1}{25} \cdot 60^{\frac{2}{3}}} = \frac{0,6794 - 0,61305}{1 - 0,61305} = 0,17147$$

c) $E(T) = \frac{2}{75} \cdot \int_0^{125} x \cdot x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{2}{75} \cdot \int_0^{125} x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{2}{75} \cdot \frac{3}{5} \cdot \left[x^{\frac{5}{3}} \right]_0^{125} = \frac{6}{375} \cdot 125^{\frac{5}{3}} = 50$

zu Aufgabe 2

a) Aus den Sterbetafeln DAV 2008 T für Männer und Frauen ergibt sich für die Unisex-Sterbetafel:

Alter	q_U	$p_U = 1 - q_U$
63	0,011182	0,988818
64	0,012657	0,987343
65	0,014429	0,985571
66	0,016514	0,983486

Der Nettobeitrag ergibt sich zu (mit ${}_k p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+k-1}$ und $v = 0,977995$):

$$P = VS \cdot \frac{\sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1}}{\sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x \cdot v^k} = 1.331,80 \text{ €}$$

Die Vergleichsnettobeiträge mit DAV 2008 T für Männer und Frauen gerechnet ergeben:

$$P^x = VS \cdot \frac{M_{63} - M_{67}}{N_{63} - N_{67}} = 1.733,70 \text{ € und } P^Y = VS \cdot \frac{M_{63} - M_{67}}{N_{63} - N_{67}} = 929,20 \text{ €}.$$

(Hinweis: Die folgenden Ansätze sind verkehrt) :

$$P^{Uni} = VS \cdot \frac{\frac{1}{2}(M_{63}^{X} + M_{63}^{Y}) - \frac{1}{2}(M_{67}^{X} + M_{67}^{Y})}{\frac{1}{2} \cdot (N_{63}^{X} + N_{63}^{Y}) - \frac{1}{2} \cdot (N_{67}^{X} + N_{67}^{Y})} = 1.316{,}70\ €$$

und

$$P^{Uni} = VS \cdot \frac{1}{2} \cdot (P^{X} + P^{Y}) = 1.331{,}45\ €\ )$$

b) Für männliche Versicherungsnehmer reduziert sich somit der zu zahlende Beitrag deutlich, Versicherungsnehmerinnen hingegen müssen einen erhöhten Beitrag zahlen. Dies könnte zu einer adversen Selektion führen, bei der verstärkt männliche Versicherungsnehmer das Produkt erwerben und weibliche auf Alternativen ausweichen.

Das Versicherungsunternehmen könnte zwar durch eine Anpassung der Sterbetafel (beispielsweise durch ein anderes Mischungsverhältnis von Männer- und Frauensterblichkeit einschließlich Sicherheitsabschlag auf den Frauenanteil) auf diesen Sachverhalt reagieren, dies würde jedoch zu einer weiteren Erhöhung der Beiträge führen. Alternativ könnten gezielte Marketinganstrengungen unternommen werden, um weibliche Kunden zu gewinnen, und es könnte eine restriktive Annahmepolitik bei männlichen Versicherungsnehmern gewählt werden.

zu Aufgabe 3

a) Bezeichnet ${}_{t}V_{x}^{\alpha}$, ${}_{t}V_{x}$ die gezillmerte bzw. die Netto –Deckungsrückstellung nach t Jahren, so gilt

$${}_{t}V_{x}^{\alpha} = {}_{t}V_{x} - \alpha^{z} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \cdot n \cdot P^{a}(A_{x:\overline{n|}}) \quad ,$$

wenn $P^{a}(A_{x:\overline{n|}}) = B$ die Bruttoprämie für eine gemischte Kapitalversicherung ist und α^{Z} den Zillmersatz bezeichnen. Bezeichnet P die jährliche Nettoprämie, so ist weiter ${}_{t}V_{x} = 1 - (d+P)\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$ und man berechnet ${}_{10}V_{40}^{\alpha}$ zu:

$${}_{10}V_{40}^{\alpha} = {}_{10}V_{40} - \alpha^{z} \cdot \frac{\ddot{a}_{50:\overline{10|}}}{\ddot{a}_{40:\overline{20|}}} \cdot 20 \cdot 5004.69$$ und hieraus ergibt sich wegen

$$\frac{N_{50} - N_{60}}{D_{50}} = 8.8637.. \ , \quad \frac{N_{40} - N_{60}}{D_{40}} = 15.92697.. \ ,$$

woraus sich mit den angegebenen Formeln der Wert ${}_{10}V_{40}^{\alpha} = 42119.66$ ergibt.

b) Da nach der Äquivalenzgleichung zur Berechnung von B gilt:

$$B = (S \cdot A_{x:\overline{n}|} + \alpha^Z \cdot n \cdot B) \cdot \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \beta \cdot B + (\alpha^\gamma + \gamma) \cdot S \quad ,$$

heben sich für t > 5 in der Differenzgleichung zwischen Bruttobarwert der Versicherungsleistungen und dem Barwert der zukünftig zu erwartenden Prämienleistung $S \cdot A_{x+t:\overline{n-t}|} + (\beta \cdot B + (\alpha^\gamma + \gamma) \cdot S) \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - B \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$ die β, α^γ *und* γ -Kosten auf, so dass für t > 5 und damit natürlich auch für t = 10 Brutto- Deckungsrückstellung und gezillmerte Deckungsrückstellung bei der hier gewählten Vorgehensweise der Verteilung der Abschlusskosten übereinstimmen. Die Rückkaufswerte ändern sich also bei t = 10 nicht durch die VVG-Reform.

<u>zu Aufgabe 4</u>

(G) ist bewiesen (<u>Beweis in der Klausur nicht erforderlich</u>), wenn man für alle für m = 0, .., ω-x gezeigt hat, dass

$$(\sum_{t=0}^{m} K_{x+t} \cdot {}_t p_x \cdot \bar{v}^t) \cdot (\sum_{t=0}^{m} Z_{x+t} \cdot {}_t p_x \cdot v^t) - (\sum_{t=0}^{m} K_{x+t} \cdot {}_t p_x \cdot v^t) \cdot (\sum_{t=0}^{m} Z_{x+t} \cdot {}_t p_x \cdot \bar{v}^t)$$
$$= \sum_{j=0}^{m} {}_j p_x \cdot \sum_{t=0}^{j-1} {}_t p_x \cdot (K_{x+j} \cdot Z_{x+t} - Z_{x+j} \cdot K_{x+t}) \cdot (\bar{v}^j \cdot v^t - v^j \cdot \bar{v}^t)$$

gilt. Dabei sei $\sum_{t=0}^{-1} ... = 0$.

Dies kann durch vollständige Induktion über m bewiesen werden:

Induktionsbeginn (m = 0):

$$K_x \cdot {}_0 p_x \cdot \bar{v}^0 \cdot Z_x \cdot {}_0 p_x \cdot v^0 - K_x \cdot {}_0 p_x \cdot v^0 \cdot Z_x \cdot {}_0 p_x \cdot \bar{v}^0 = 0 = {}_0 p_x \cdot \sum_{t=0}^{-1} ...$$

Induktionsschritt von m - 1 auf m:

$$(\sum_{t=0}^{m} K_{x+t}\cdot {}_tp_x\cdot \bar{v}^t)\cdot(\sum_{t=0}^{m} Z_{x+t}\cdot {}_tp_x\cdot v^t)-(\sum_{t=0}^{m} K_{x+t}\cdot {}_tp_x\cdot v^t)\cdot(\sum_{t=0}^{m} Z_{x+t}\cdot {}_tp_x\cdot \bar{v}^t)$$

$$=(\sum_{t=0}^{m-1} K_{x+t}\cdot {}_tp_x\cdot \bar{v}^t)\cdot(\sum_{t=0}^{m-1} Z_{x+t}\cdot {}_tp_x\cdot v^t)-(\sum_{t=0}^{m-1} K_{x+t}\cdot {}_tp_x\cdot v^t)\cdot(\sum_{t=0}^{m-1} Z_{x+t}\cdot {}_tp_x\cdot \bar{v}^t)$$

$$+K_{x+m}\cdot {}_mp_x\cdot \bar{v}^m\cdot(\sum_{t=0}^{m} Z_{x+t}\cdot {}_tp_x\cdot v^t)+(\sum_{t=0}^{m-1} K_{x+t}\cdot {}_tp_x\cdot \bar{v}^t)\cdot Z_{x+m}\cdot {}_mp_x\cdot v^m$$

$$-K_{x+m}\cdot {}_mp_x\cdot v^m\cdot(\sum_{t=0}^{m} Z_{x+t}\cdot {}_tp_x\cdot \bar{v}^t)-(\sum_{t=0}^{m-1} K_{x+t}\cdot {}_tp_x\cdot v^t)\cdot Z_{x+m}\cdot {}_mp_x\cdot \bar{v}^m$$

$$=\sum_{j=0}^{m-1} {}_jp_x\cdot\sum_{t=0}^{j-1} {}_tp_x\cdot(K_{x+j}\cdot Z_{x+t}-Z_{x+j}\cdot K_{x+t})\cdot(\bar{v}^j\cdot v^t-v^j\cdot \bar{v}^t)$$

$$+\sum_{t=0}^{m-1} {}_tp_x\cdot {}_mp_x\cdot(K_{x+m}\cdot Z_{x+t}\cdot \bar{v}^m\cdot v^t+K_{x+t}\cdot Z_{x+m}\cdot \bar{v}^t\cdot v^m-K_{x+m}\cdot Z_{x+t}\cdot v^m\cdot \bar{v}^t-K_{x+t}\cdot Z_{x+m}\cdot v^t\cdot \bar{v}^m)$$

$$=\sum_{j=0}^{m-1} {}_jp_x\cdot\sum_{t=0}^{j-1} {}_tp_x\cdot(K_{x+j}\cdot Z_{x+t}-Z_{x+j}\cdot K_{x+t})\cdot(\bar{v}^j\cdot v^t-v^j\cdot \bar{v}^t)$$

$$+\sum_{t=0}^{m-1} {}_tp_x\cdot {}_mp_x\cdot(K_{x+m}\cdot Z_{x+t}-Z_{x+m}\cdot K_{x+t})\cdot(\bar{v}^m\cdot v^t-v^m\cdot \bar{v}^t)$$

$$=\sum_{j=0}^{m} {}_jp_x\cdot\sum_{t=0}^{j-1} {}_tp_x\cdot(K_{x+j}\cdot Z_{x+t}-Z_{x+j}\cdot K_{x+t})\cdot(\bar{v}^j\cdot v^t-v^j\cdot \bar{v}^t)$$

Dabei ergibt sich das zweite „=“ aus der Induktionsvoraussetzung.

a) Folgende Ungleichungen sind äquivalent:

$$P_x \le \bar{P}_x$$

$$\frac{A_x}{\ddot{a}_x} \le \frac{\bar{A}_x}{\bar{\ddot{a}}_x}$$

$$\bar{A}_x\cdot \ddot{a}_x - A_x\cdot \bar{\ddot{a}}_x \ge 0$$

Letzteres ergibt sich aber aus (G), denn (G) angewandt auf $Z_x = 1$ für alle x liefert

$$\bar{A}_x\cdot \ddot{a}_x - A_x\cdot \bar{\ddot{a}}_x = (\sum_{t=0}^{\omega-x} K_{x+t}\cdot {}_tp_x\cdot \bar{v}^t)\cdot(\sum_{t=0}^{\omega-x} {}_tp_x\cdot v^t)-(\sum_{t=0}^{\omega-x} K_{x+t}\cdot {}_tp_x\cdot v^t)\cdot(\sum_{t=0}^{\omega-x} {}_tp_x\cdot \bar{v}^t)$$

$$=\sum_{j=1}^{\omega-x} {}_jp_x\cdot\sum_{t=0}^{j-1} {}_tp_x\cdot(K_{x+j}-K_{x+t})\cdot(\bar{v}^j\cdot v^t-v^j\cdot \bar{v}^t)\ge 0$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil $\bar{v}^j\cdot v^t-v^j\cdot \bar{v}^t>0$ wegen $t<j$ und $v<\bar{v}$, und weil außerdem $K_{x+t}\le K_{x+j}$ wegen des monoton steigenden Profils.

Ist das Profil im Bereich ab Alter x an einer Stelle streng monoton steigend, dann gibt es mindestens ein j, für welches gilt: $K_{x+t}<K_{x+j}$ für alle t mit $0 \le t \le j-1$. Damit gilt die letzte Ungleichung strikt, so dass sich $P_x<\bar{P}_x$ ergibt.

b) Folgende Ungleichungen sind äquivalent:

$$\frac{\overline{P}'_x}{P'_x} < \frac{\overline{P}_x}{P_x}$$

$$\frac{P'_x}{P_x} > \frac{\overline{P}'_x}{\overline{P}_x}$$

$$\frac{A'_x}{A_x} > \frac{\overline{A}'_x}{\overline{A}_x}$$

$$\overline{A}_x \cdot A'_x - A_x \cdot \overline{A}'_x > 0$$

Letzteres ergibt sich wieder aus (G), denn (G) angewandt auf $Z_x = K'_x$ für alle x liefert

$$\overline{A}_x \cdot A'_x - A_x \cdot \overline{A}'_x = \left(\sum_{t=0}^{\omega-x} K_{x+t} \cdot {}_t p_x \cdot \overline{v}^t\right) \cdot \left(\sum_{t=0}^{\omega-x} K'_{x+t} \cdot {}_t p_x \cdot v^t\right) - \left(\sum_{t=0}^{\omega-x} K_{x+t} \cdot {}_t p_x \cdot v^t\right) \cdot \left(\sum_{t=0}^{\omega-x} K'_{x+t} \cdot {}_t p_x \cdot \overline{v}^t\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{\omega-x} {}_j p_x \cdot \sum_{t=0}^{j-1} {}_t p_x \cdot (K_{x+j} \cdot K'_{x+t} - K'_{x+j} \cdot K_{x+t}) \cdot (\overline{v}^j \cdot v^t - v^j \cdot \overline{v}^t) > 0$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil wie in a) $\overline{v}^j \cdot v^t - v^j \cdot \overline{v}^t > 0$ und weil außerdem $K_{x+j} \cdot K'_{x+t} - K'_{x+j} \cdot K_{x+t} > 0$. Letzteres folgt aus der Voraussetzung über die Steilheit des Profils, denn daraus ergibt sich

$$\frac{K_{x+j}}{K_{x+t}} = \prod_{s=0}^{j-t-1} \frac{K_{x+t+s+1}}{K_{x+t+s}} > \prod_{s=0}^{j-t-1} \frac{K'_{x+t+s+1}}{K'_{x+t+s}} = \frac{K'_{x+j}}{K'_{x+t}}$$

<u>zu Aufgabe 5</u>

a) Gemäß § 8 Abs. 4 KalV sind die mittelbaren Abschlusskosten, die Schadenregulierungskosten sowie die sonstigen Verwaltungskosten in Form von altersunabhängigen absoluten Kostenzuschlägen einzurechnen.

$$\gamma^{250} = 12 \cdot \frac{(\alpha_m + \beta + \rho) \sum \overline{b}^{250} \cdot L^{250}}{\sum L^{250}}$$

$$= 12 \cdot \frac{0{,}115 \cdot (171{,}98 \cdot 862 + 201{,}11 \cdot 912 + 240{,}01 \cdot 799)}{862 + 912 + 799}$$

$$= 280{,}73.$$

Analog erhält man

$$\gamma^{500} = 12 \cdot \frac{0{,}115 \cdot (185{,}16 \cdot 1217 + 230{,}77 \cdot 977)}{1217 + 977}$$

$$= 283{,}55.$$

b) Gesucht sind $\Gamma^{250} = \kappa \cdot 1241{,}19$ und $\Gamma^{500} = \kappa \cdot 1024{,}52$ mit

$$\Gamma^{250} \cdot \sum L^{250} + \Gamma^{500} \sum L^{500} = \gamma^{250} \cdot \sum L^{250} + \gamma^{500} \cdot \sum L^{500}.$$

Dies führt zu

$$\kappa = \frac{\gamma^{250} \cdot \sum L^{250} + \gamma^{500} \sum L^{500}}{1241{,}19 \cdot \sum L^{250} + 1024{,}52 \cdot \sum L^{500}}$$

$$= \frac{280{,}73 \cdot 2573 + 283{,}55 \cdot 2194}{1241{,}19 \cdot 2573 + 1024{,}52 \cdot 2194}$$

$$= 0{,}2471$$

und weiter zu

$$\Gamma^{250} = 306{,}70 \text{ und } \Gamma^{500} = 253{,}16.$$

c) Durch altersunabhängige Zuschläge soll eine stärkere Belastung der in der Regel höheren Beiträge bei älteren Versicherten vermieden werden.

zu Aufgabe 6

a) Das versicherungstechnische Alter von Ferdinand Daumengrün beträgt am Stichtag 47 Jahre. Das versicherungstechnische Alter am Beginn des Eintrittsjahres (1.11.1997) beträgt 33 Jahre. Die am 31.10.2011 zurückgelegte Finanzierungsdauer beträgt demnach 14 Jahre.

Bis zur Vollendung seines 65. Lebensjahres (am 23.6.2029) kann Herr Daumengrün eine Dienstzeit (ab 15.8.1998) von 30 Jahren, 10 Monaten und 8 Tagen erreichen, das sind 30 volle Dienstjahre. Das Beginnalter für die nach vollen Dienstjahren zu bemessende Wartezeit beträgt 65-30= 35 Jahre, die Wartezeit von 10 Jahren ist im Alter 45 erfüllt.

Die Formel für den Teilwert zum 31.10.2011 lautet:

$$_{14}V_{33} = A_{47} - \frac{A_{33}}{a^a_{33\overline{32}}} \cdot a^a_{47\overline{18}}$$

mit

$$A_{47} = 12 \cdot 8.500\,€ \cdot \left[20\,\% \cdot \left({}^{(12)}a^{aiA}_{47} + 0{,}6 \cdot a^{aw}_{47} \right) + 5\,\% \cdot \frac{D^a_{65}}{D^a_{47}} \cdot \left({}^{(12)}a^{aiA}_{65} + 0{,}6 \cdot a^{aw}_{65} \right) \right]$$

und

$$A_{33} = 12 \cdot 8.500\,€ \cdot \left[20\,\% \cdot \frac{D^a_{45}}{D^a_{33}} \left({}^{(12)}a^{aiA}_{45} + 0{,}6 \cdot a^{aw}_{45} \right) + 5\,\% \cdot \frac{D^a_{65}}{D^a_{33}} \cdot \left({}^{(12)}a^{aiA}_{65} + 0{,}6 \cdot a^{aw}_{65} \right) \right]$$

b) Der Teilwert wächst bis zum 31.10.2012 nach der Näherungsformel jährlich um den Faktor $\frac{m+1}{m} \cdot 1{,}03$, im vorliegen Fall also um $\frac{15}{14} \cdot 1{,}03 = 1{,}1036$.

zu Aufgabe 7

a) bis c): a_x^{ai} bezeichnet den Barwert einer Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf lebenslängliche Invalidenrente.

Die allgemeine Formel für den Barwert einer Anwartschaft lautet:

$$\sum_{j=0}^{z-x-1} {}_j p_{x+j} \cdot v^j \cdot {}_j \hat{L}_x$$

Es gilt die Formel

$$a_x^{ai} = \frac{N_x^{ai}}{D_x^a} = \frac{1}{D_x^a} \cdot \left[\sum_{j=x}^{z-1} D_j^{ai} \right] = \frac{1}{D_x^a} \cdot \left[\left(\sum_{j=x}^{z-1} D_j^a \cdot i_j \cdot \frac{1-q_j^i}{1-0{,}5 \cdot q_j^i} \cdot v \cdot a_{j+1}^i \right) \right].$$

Der Quotient $\frac{D_j^a}{D_x^a}$ beinhaltet die Wahrscheinlichkeit, das Alter j als Aktiver zu erreichen und die Abzinsung vom Alter j auf das Alter x. i_j bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, im Alter j invalide zu werden. Der Quotient $\frac{1-q_j^i}{1-0{,}5 \cdot q_j^i}$ stellt die Wahrscheinlichkeit dar, dass der Invalide die erste Zahlung einer Invalidenrente im Alter j+1 erlebt. v zinst den Barwert der im Alter j+1 einsetzenden Invalidenrente a_{j+1}^i auf den Beginn des Jahres ab.

d) Mit zunehmendem Alter wächst der Anwartschaftsbarwert wegen der von Jahr zu Jahr geringeren Abzinsungswirkung. Gegenläufig wirkt die Entlastung durch das jeweils wegfallende Risiko des abgelaufenen Jahres, so dass es in höheren Altern zu einer rückläufigen Entwicklung kommt. Bei sinkendem Zins steigt der Barwert wegen der geringeren Entlastung durch die Abzinsung. Bei höherer Altersgrenze steigt der Barwert, weil zusätzliche Risiken abgedeckt werden. Die Zahlungsweise hat keinen Einfluss auf den Barwert, weil Beginn und Ende der Zahlungen über das Jahr verteilt sind (Invarianzsatz von Neuburger).