DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Mathematik der Personenversicherung (Grundwissen)
Klausur vom 14. 10. 2017

Die Klausur bestand aus 7 Aufgaben, die mit insgesamt 180 Punkten bewertet wurden. Um diese maximale Punktzahl erreichen zu können, mussten alle Aufgaben bearbeitet werden. Zum Bestehen der Klausur waren mindestens 72 Punkte erforderlich. 264 der 321 Teilnehmerinnen und Teilnehmer haben dieses Ziel erreicht.

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner, beigefügte Formelsammlung, beigefügte Sterbetafeln

Aufgabe 1 (30 Punkte)

Man betrachte den (ungezillmerten) Nettojahresbeitrag P_x eines Erwachsenen mit Eintrittsalter $x < \omega$ für eine nach Art der Lebensversicherung betriebene Krankenversicherung ohne Übertragungswert. Das Profil sei streng monoton steigend.

a) Beweisen Sie:

Ersetzt man in der Formel für den Nettojahresbeitrag P_x für ein fest gewähltes m mit $0 \leq m < \omega - x$ die Werte l_{x+t} für alle $t > m$ jeweils durch $\lambda \cdot l_{x+t}$, so gilt für den dadurch entstehenden „Nettojahresbeitrag“ $P_x(\lambda)$:

$\lambda \rightarrow P_x(\lambda)$ ist eine streng monoton steigende Funktion.

Anleitung: Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion.

b) Beweisen Sie:

Reduziert man bei der Berechnung des Nettojahresbeitrags P_x für alle oder einige Dauern m mit $0 \leq m < \omega - x$ die Ausscheidewahrscheinlichkeit $q_{x+m} + w_{x+m}$, so erhöht sich der Nettojahresbeitrag.

c) Welche Konsequenz ergibt sich daraus für die Ermittlung rechnungsmäßiger Ausscheidewahrscheinlichkeiten aus beobachteten Ausscheidehäufigkeiten?

Aufgabe 2 (30 Punkte)

Gegeben sei ein nach Art der Lebensversicherung kalkulierter Tarif der Pflegetagegeld-versicherung. Es gelten gleiche Leibrentenbarwerte, Zillmersätze und relative Zuschläge für alle versicherbaren Tagegeldhöhen. Altersunabhängige Zuschläge sind nicht eingerechnet. Der Kopfschaden K_x für die Tagegeldhöhe T ist dargestellt als Produkt aus Grundkopfschaden $G(T)$ und Profilwert k_x, wobei die Profilwerte für alle T gleich sind. Die Grundkopfschäden sind progressiv festgesetzt bezüglich der Tagegeldhöhen gemäß $G(T) = \frac{1}{60} \cdot (T^2 + 250T)$.

Eine versicherte Person möchte ihre Tagegeldhöhe von 50€ auf 60€ anheben, wobei Umstellungskosten in Höhe des Zillmersatzes des Tarifs auf den Mehrbeitrag eingerechnet werden. Derzeit zahlt sie jährlich 360€ und liegt damit um 60€ unter dem Neugeschäftsbeitrag zu ihrem erreichten Alter.

a) Welcher neue Bruttojahresbeitrag errechnet sich?

Anleitung: Zeigen Sie zunächst, wie der neue Beitrag $B^{(60)}$ allein aus dem bisherigen Zahlbeitrag $B^{(50)}$, dem Neugeschäftsbeitrag für 50 € Tagegeld zum erreichten Alter $B_{x+m}^{(50)}$ und dem Neugeschäftsbeitrag für 60 € Tagegeld zum erreichten Alter $B_{x+m}^{(60)}$ errechnet werden kann.

b) Aus welchen Gründen steigt der Beitrag stärker als die Leistung?

c) Ändert sich die Höhe der Alterungsrückstellung durch die Tagegelderhöhung? Begründung!

Aufgabe 3 (20 Punkte)

a) Berechnen Sie für einen 30- jährigen, der eine gemischte Versicherung auf den Todes- und Erlebensfall mit einer Versicherungs- und Beitragszahlungsdauer von 35 Jahren sowie einer Versicherungssumme S = 60.000 € abschließen will, die ausreichende Jahresprämie, wenn folgende Kostenzuschläge gegeben sind:

$\alpha^z = 25‰$ der Summe der ausreichenden Jahresprämien („Beitragssumme"), einmalig zu Versicherungsbeginn

β = 3 % des ausreichenden Jahresbeitrags, vorschüssig für jedes Jahr der Beitragszahlungsdauer

γ = 2,0 ‰ der Beitragssumme, vorschüssig für jedes Jahr der Beitragszahlungsdauer.

(Sterbetafel DAV 2008 TM, i = 0,90 %)

b) Vergleichen Sie die Summe aller planmäßig zu zahlenden ausreichenden Jahresprämien („Beitragssumme") mit der Versicherungssumme.

c) Wie hoch darf - bei ansonsten unveränderten Daten - der Zuschlag α^z maximal sein, damit die Beitragssumme die Versicherungssumme nicht übersteigt?

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Ein Versicherungsunternehmen bietet eine Risikolebensversicherung gegen laufenden jährlichen Beitrag (Laufzeit n Jahre) mit folgendem Beitrags- und Leistungsspektrum an:

- Der jährliche Nettobeitrag P ist die ersten k Jahre reduziert und beträgt s*P mit s > 0.
- Die Todesfallleistung TFL ist konstant.

a) Geben Sie die Äquivalenzgleichung unter Verwendung der Kommutationswerte für diesen Tarif an.

b) Berechnen Sie die Jahresnettoprämie für einen 40-jährigen Mann mit Rechnungszins 0,9% auf Basis der Sterbetafel DAV 2008 T.
Die Laufzeit der Versicherung betrage n = 20 Jahre. Ferner seien gegeben: k = 10 und s = 0,4. Die Todesfallleistung TFL beträgt 100.000 €.

c) Wie sollte s aus aktuarieller Sicht gewählt werden, um negative Netto-Deckungsrückstellungen während der Laufzeit zu vermeiden? Geben Sie eine Ungleichung für s an, wobei k = 10 und n = 20.

Aufgabe 5 (20 Punkte)

a) Ein 60-jähriger Mann des Geburtsjahrs 1957 schließt eine sofort beginnende Rentenversicherung gegen Einmalbeitrag ab. Die jährlich zu zahlende Rente beträgt € 2400,- , es wird eine Rentengarantiedauer von 10 Jahren vereinbart (unabhängig davon, ob die versicherte Person noch lebt). Man berechne den Nettoeinmalbeitrag dieser sofort beginnenden, jährlich vorschüssig zahlbaren lebenslänglichen Rente mit der Rententafel 2004 RM und einem Garantiezins von 0,9 % unter Berücksichtigung der Altersverschiebung.

b) Nach Diskussion mit Freunden möchte der Mann angesichts der aktuell sehr niedrigen Kapitalmarktzinsen zusätzlich noch eine alternative Variante prüfen:

   Diese sieht eine Kombination aus einer Termfix-Versicherung, die nach Ablauf von 10 Jahren eine feste Zahlung von B Euro vorsieht (unabhängig vom Erleben dieses Zeitpunktes des Versicherungsnehmers), und einer um 10 Jahre aufgeschobenen lebenslänglichen Leibrente in Höhe von € 2400,- pro Jahr vor. Bei welcher Auszahlungssumme B ergibt sich bei sonst gleichen Daten derselbe Nettoeinmalbeitrag im Vergleich zu der Variante a)?

Aufgabe 6 (30 Punkte)

Eine Firma plant die Erteilung von Pensionszusagen an ihre Führungskräfte. Zugesagt werden lebenslange Renten bei Erreichen der Altersgrenze von 67 Jahren und bei Invalidität sowie Leistungen an den im Todeszeitpunkt ggf. vorhandenen Ehegatten. Es besteht eine Wartezeit von 5 vollen Dienstjahren für alle Leistungsarten.

Die Alters- und Invalidenrente beträgt anfänglich 15 % des ruhegeldfähigen Einkommens und steigt nach insgesamt 20 vollendeten Dienstjahren auf 25 %. Die Witwenrente beträgt einheitlich 15 % des ruhegeldfähigen Einkommens.

Der am 25.2.1977 geborene Personalleiter trat am 1.11.2007 in die Firma ein. Das ruhegeldfähige Einkommen beträgt im Jahr 2017 3.000 €.

a) Wie lauten die Formeln für den steuerlichen Teilwert nach § 6a Abs. 3 EStG zum 31.12.2017 für den Personalleiter? Verwenden Sie die Bar- und Kommutationswerte der Richttafeln sowie die Rückrechnungsmethode für die Darstellung.

b) Anstelle des steuerlichen Teilwertverfahrens kann auch das sog. „modifizierte Teilwertverfahren“ für eine Rückstellungsberechnung verwendet werden. Der Unterschied zum steuerlichen Teilwertverfahren liegt insbesondere in der Definition der Prämie. Worin besteht dieser Unterschied und wie lautet die Formel für die Prämie des modifizierten Teilwertverfahrens für den Personalleiter im Jahr 2017?

c) Mit welchen versicherungsmathematischen Methoden ist die Pensionsrückstellung in der Steuerbilanz einerseits und der Handelsbilanz andererseits zu ermitteln? Nennen Sie die wesentlichen Unterschiede zwischen beiden Bewertungsansätzen.

Aufgabe 7 (30 Punkte)

Man kann zeigen, dass – mit den im Repetitorium vorgestellten Bezeichnungen - für die Reserve einer x-jährigen Person nach m Jahren (m = 0, 1, ... , n-1 mit n: Laufzeit des Vertrages) die „versicherungsmathematische Bilanzgleichung“ gilt:

$$_{m}V_x + {}_{m}\hat{P}_x = {}_{m}\hat{L}_x + v\, p_{x+m}\ {}_{m+1}V_x$$

Sei im Folgenden $_{m}\hat{P}_x$, m = 0, 1, ... , n-1, jährlich vorschüssig zahlbar.

a) Geben Sie die im Repetitorium vorgestellte Darstellung der Sparprämie $_{m}P_x^S$ und der Risikoprämie $_{m}P_x^R$ an (in Abhängigkeit von $_{m}V_x$, $_{m+1}V_x$, $_{m}\hat{L}_x$) und zeigen Sie damit, dass für m = 0, 1, ... , n-1 gilt:

$$_{m}\hat{P}_x = {}_{m}P_x^S + {}_{m}P_x^R$$

b) Wir betrachten einen Vertrag, der als Prämie die sogenannte natürliche Prämie vorsehe, d.h. für jedes Jahr m = 0, 1, ... , n-1 entspreche $_{m}\hat{P}_x$ dem Barwert der in diesem Jahr verursachten Leistungen $_{m}\hat{L}_x$.

   Berechnen Sie für einen solchen Vertrag unter der Voraussetzung $_{0}V_x = 0$ die Reserven $_{m}V_x$, m = 0, 1, ... , n, sowie $_{m}P_x^S$ und $_{m}P_x^R$ für m = 0, 1, ... , n-1.

c) Wir betrachten nun einen Vertrag, der eine sogenannte Wartezeit vorsehe, für den also ein $1 \leq k \leq n$ existiere, so dass $_{m}\hat{L}_x = 0$ für alle m = 0, ... , k-1. Sei ferner $_{m}V_x > 0$ und $q_{x+m} > 0$ für m = 1, ... , k vorausgesetzt.

   Zeigen Sie, dass dann für einen solchen Vertrag gilt:

$$_{m}P_x^S > {}_{m}\hat{P}_x \text{ für m = 0, ... , k-1}$$

   und erläutern Sie die finanzielle Quelle der positiven Differenz zwischen $_{m}P_x^S$ und $_{m}\hat{P}_x$.

d) Es liege nun als Vertrag die Verpflichtung zur Zahlung einer lebenslänglich laufenden, jährlich vorschüssig zahlbaren Rente vom Jahresbetrag R vor. Sei also $_{m}\hat{P}_x = 0$ für m = 0, 1, ...

   i. Geben Sie $_{m}V_x$, m = 0, 1, ... , für diesen Vertrag explizit an und zeigen Sie:

$$_{m}P_x^S = -R\,(1 - v\, q_{x+m}^r\, \mathrm{a}_{x+m+1}^r)$$

   ii. Die Risikoprämie $_{m}P_x^R$ lässt sich bekanntlich in eine Risikoprämie für den Überlebensfall $_{m}P_x^{R(0)}$ und eine Risikoprämie für den Todesfall $_{m}P_x^{R(1)}$ aufteilen.

   Geben Sie $_{m}\hat{L}_x$, $_{m}P_x^R$, $_{m}P_x^{R(0)}$ und $_{m}P_x^{R(1)}$ für diesen Vertrag explizit an und zeigen Sie damit, dass gilt:

$$R = {}_{m}V_x - v\,{}_{m+1}V_x + R\, v\, q_{x+m}^r\, \mathrm{a}_{x+m+1}^r$$

   iii. Erläutern Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus ii., wie sich die Jahresrente R finanziert.

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Mathematik der Personenversicherung (Grundwissen)
Klausur vom 14. 10. 2017

Lösungshinweise

Aufgabe 1 (30 Punkte)

zu a)

Der Nettojahresbeitrag des Neugeschäfts ist

$$P_x = \frac{A_x}{ä_x} = \frac{U_x/D_x}{N_x/D_x} = \frac{U_x}{N_x} = \frac{\sum_{t=0}^{\omega-x} K_{x+t} \cdot D_{x+t}}{\sum_{t=0}^{\omega-x} D_{x+t}}$$

Weil $D_{x+t} = l_{x+t} \cdot v^{x+t}$ ist, geht bei der vorausgesetzten Ersetzung D_{x+t} für t>m jeweils in $\lambda \cdot D_{x+t}$ über, also gilt für die erste Ableitung

$$\big(P_x(\lambda)\big)' = \left(\frac{\sum_{t=0}^{m} K_{x+t} \cdot D_{x+t} + \lambda \cdot \sum_{t=m+1}^{\omega-x} K_{x+t} \cdot D_{x+t}}{\sum_{t=0}^{m} D_{x+t} + \lambda \cdot \sum_{t=m+1}^{\omega-x} D_{x+t}}\right)'$$

Nach der Quotientenregel ist diese Ableitung ein Quotient mit Nenner $(\sum_{t=0}^{m} D_{x+t} + \lambda \cdot \sum_{t=m+1}^{\omega-x} D_{x+t})^2$. Da dieser Nenner positiv ist, wird das Vorzeichen also durch das Vorzeichen des Zählers bestimmt. Der Zähler ist

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{t=m+1}^{\omega-x} K_{x+t} \cdot D_{x+t}\right) \cdot \left(\sum_{t=0}^{m} D_{x+t} + \lambda \cdot \sum_{t=m+1}^{\omega-x} D_{x+t}\right) \\
&\quad - \left(\sum_{t=0}^{m} K_{x+t} \cdot D_{x+t} + \lambda \cdot \sum_{t=m+1}^{\omega-x} K_{x+t} \cdot D_{x+t}\right) \cdot \left(\sum_{t=m+1}^{\omega-x} D_{x+t}\right) \\
&= \left(\sum_{t=m+1}^{\omega-x} K_{x+t} \cdot D_{x+t}\right) \cdot \left(\sum_{t=0}^{m} D_{x+t}\right) - \left(\sum_{t=0}^{m} K_{x+t} \cdot D_{x+t}\right) \cdot \left(\sum_{t=m+1}^{\omega-x} D_{x+t}\right) \\
&\quad > \left(\sum_{t=m+1}^{\omega-x} K_{x+m} \cdot D_{x+t}\right) \cdot \left(\sum_{t=0}^{m} D_{x+t}\right) - \left(\sum_{t=0}^{m} K_{x+m} \cdot D_{x+t}\right) \cdot \left(\sum_{t=m+1}^{\omega-x} D_{x+t}\right) \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

Dabei ergibt sich die angegebene Ungleichung, weil wegen des streng monotonen Profils $K_{x+t} > K_{x+m}$ für t>m und $K_{x+t} \leq K_{x+m}$ für t≤m. Und da m<ω-x ist, ist der erste der beiden Bereiche nicht leer.

Die erste Ableitung ist somit positiv, so dass die Funktion streng monoton steigend ist.

zu b)

Man betrachte zunächst nur eine einzige feste Dauer m, für die die Ausscheidewahrscheinlichkeit $q_{x+m}+w_{x+m}$ reduziert wird. Die sich bei dieser Reduktion ergebenden Werte werden im Folgenden jeweils durch einen Querstrich gekennzeichnet.

Die Reduktion bedeutet, dass $q_{x+m} + w_{x+m}$ ersetzt wird durch $\bar{q}_{x+m} + \bar{w}_{x+m}$.

$1 - q_{x+m} - w_{x+m}$ wird also ersetzt durch $\lambda \cdot (1 - q_{x+m} - w_{x+m})$, wobei

$$\lambda := \frac{1 - \bar{q}_{x+m} - \bar{w}_{x+m}}{1 - q_{x+m} - w_{x+m}} > 1$$

Sei nun $t > m$. Wegen

$$\begin{aligned} l_{x+t} &= \prod_{s=0}^{t-m-1} (1 - q_{x+m+s} - w_{x+m+s}) \cdot l_{x+m} \\ &= (1 - q_{x+m} - w_{x+m}) \cdot \prod_{s=1}^{t-m-1} (1 - q_{x+m+s} - w_{x+m+s}) \cdot l_{x+m} \end{aligned}$$

ergibt sich, wenn man $1 - q_{x+m} - w_{x+m}$ durch $\lambda \cdot (1 - q_{x+m} - w_{x+m})$ ersetzt:

$$\bar{l}_{x+t} = \lambda \cdot (1 - q_{x+m} - w_{x+m}) \cdot \prod_{s=1}^{t-m-1} (1 - q_{x+m+s} - w_{x+m+s}) \cdot l_{x+m} = \lambda \cdot l_{x+t}$$

Teil a) ist also anwendbar und liefert $\bar{P}_x = P_x(\lambda) > P_x(1) = P_x$, da $\lambda > 1$.

Die Reduktion einer einzelnen Ausscheidewahrscheinlichkeit $q_{x+m} + w_{x+m}$ führt also zur Erhöhung des Nettobeitrags.

Führt man die Reduktion sukzessive für mehrere Dauern m durch, erhöht sich demnach bei jedem Schritt der Nettobeitrag, so dass sich am Ende ein höherer Nettobeitrag ergibt als in der Ausgangssituation.

zu c)

Die Ableitung rechnungsmäßiger Ausscheidewahrscheinlichkeiten aus beobachteten Ausscheidehäufigkeiten ist immer mit Unsicherheiten verbunden. Man wird also in der Regel die rechnungsmäßigen Werte so ansetzen, dass sich sicherheitshalber höhere Beiträge ergeben, als bei einfacher Verwendung der beobachteten Werte. Gemäß b) wird man also rechnungsmäßig etwas niedrigere Werte ansetzen als beobachtet.

Aufgabe 2 (30 Punkte)

zu a)

Die Gleichung gemäß KVAV, Anlage 1, B vereinfacht sich wegen

$\Delta^{(60)} = \Delta^{(50)}$, $ä_{x+m}^{(60)} = ä_{x+m}^{(50)}$ und $\alpha_{x+m}^{(60)} = \alpha_{x+m}^{(50)} = \alpha'_{x+m}$

zu

$B^{(60)} = B_{x+m}^{(60)} - B_{x+m}^{(50)} + B^{(50)}$.

Es gilt $B^{(50)} = 360$ und $B_{x+m}^{(50)} = 420$ und weiter wegen

$G(60) = 310 = 1{,}24 \cdot 250 = 1{,}24 \cdot G(50)$

$$B_{x+m}^{(60)} = \frac{A_{x+m}^{(60)}}{(1-\Delta^{(60)})ä_{x+m}^{(60)} - \alpha^{(60)}}$$

$$= \frac{G(60) \cdot (\sum_{t=0}^{\omega-x-m} k_{x+m+t} \cdot D_{x+m+t})/D_{x+m}}{(1-\Delta^{(60)})ä_{x+m}^{(60)} - \alpha^{(60)}}$$

$$= 1{,}24 \cdot \frac{G(50) \cdot (\sum_{t=0}^{\omega-x-m} k_{x+m+t} \cdot D_{x+m+t})/D_{x+m}}{(1-\Delta^{(50)})ä_{x+m}^{(50)} - \alpha^{(50)}}$$

$$= 1{,}24 \cdot B_{x+m}^{(50)} = 520{,}80$$

und somit insgesamt

$B^{(60)} = 520{,}80 - 420 + 360 = 460{,}80$.

Es ergibt sich somit ein neuer Bruttojahresbeitrag in Höhe von 460,80€.

zu b)

Zum einen steigt bereits der Neugeschäftsbeitrag überproportional

$(520{,}80/420 = 1{,}24 > 1{,}20 = 60/50)$,

da die Leistungen progressiv steigend erwartet werden.

Zum anderen ist für den Mehrbeitrag der (höhere) Beitrag zum erreichten Alter maßgeblich, so dass sich insgesamt eine Erhöhung von

$(360 + (520{,}80 - 420))/360 = 1{,}28 > 1{,}24 > 1{,}20 = 60/50$

ergibt.

zu c)

Die Alterungsrückstellung sinkt, da der Mehrbeitrag gezillmert wird.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

zu a)

$$
\begin{aligned}
&P^a\left(A_{30:\overline{35}|}\right)\cdot 60.000\\
&=\frac{\left(1-d\cdot \ddot{a}_{30:\overline{35}|}\right)\cdot 60.000}{\ddot{a}_{30:\overline{35}|}\cdot\left(1-0{,}002\cdot 35-0{,}03\right)-0{,}025\cdot 35}\\
&=\frac{\left(1-d\cdot 29{,}13705993\right)\cdot 60.000}{29{,}13705993\cdot 0{,}90-0{,}875}=\frac{60.000\cdot 0{,}7401055}{25{,}348354}=1.751{,}84
\end{aligned}
$$

zu b)

35·1751,84 = 61.314,40 > 60.000. Lässt man die Überschussbeteiligung außer Betracht, so ist die Versicherungssumme also trotz der langen Laufzeit „überzahlt“.

zu c)

Der Ansatz ergibt sich analog zu a) aus der folgenden Gleichung (α^z unbekannt):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left(1-d\cdot \ddot{a}_{30:\overline{35}|}\right)\cdot 60.000}{\ddot{a}_{30:\overline{35}|}\cdot\left(1-0{,}002\cdot 35-0{,}03\right)-\alpha^z\cdot 35}\cdot 35=60.000\\
&\frac{0{,}7401055\cdot 60.000}{29{,}13705993\cdot 0{,}90-\alpha^z\cdot 35}\cdot 35=60.000\\
&0{,}7401055\cdot 35=29{,}13705993\cdot 0{,}90-\alpha^z\cdot 35\\
&25{,}9036925=26{,}223354-\alpha^z\cdot 35\\
&\alpha^z=0{,}009133=9{,}133\ ‰
\end{aligned}
$$

Der auf den Versicherungsbeginn konzentrierte einmalige Abschlusskostenzuschlag müsste also im konkreten Fall unter 10 ‰ liegen – für den Außendienst sicherlich ein Problem.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

zu a)

Es gilt:

$$
P^X\cdot\left(s\cdot\frac{N_x-N_{x+k}}{D_x}\right)+P^X\cdot\left(\frac{N_{x+k}-N_{x+n}}{D_x}\right)=VS\cdot\left(\frac{M_x-M_{x+n}}{D_x}\right)
$$

$$
\Rightarrow P^X=VS\cdot\frac{\dfrac{M_x-M_{x+n}}{D_x}}{\dfrac{s\cdot(N_x-N_{x+k})+(N_{x+k}-N_{x+n})}{D_x}}=VS\cdot\frac{M_x-M_{x+n}}{s\cdot(N_x-N_{x+k})+(N_{x+k}-N_{x+n})}
$$

zu b)

Es gilt durch Einsetzen: $P^X = 607{,}59$.

zu c)

Ansatz: $s \cdot P^X$ entspricht einer 10 jährigen Risikolebensversicherung

$$\Rightarrow s \cdot P^X = s \cdot VS \cdot \frac{M_x - M_{x+20}}{s \cdot (N_x - N_{x+10}) + (N_{x+10} - N_{x+20})} > VS \cdot \frac{M_x - M_{x+10}}{(N_x - N_{x+10})}$$

$$\Rightarrow s \cdot \frac{M_x - M_{x+20}}{M_x - M_{x+10}} > \frac{s \cdot (N_x - N_{x+10}) + (N_{x+10} - N_{x+20})}{(N_x - N_{x+10})} = s + \frac{(N_{x+10} - N_{x+20})}{(N_x - N_{x+10})}$$

$$\Rightarrow s \cdot \left(\frac{M_x - M_{x+20}}{M_x - M_{x+10}} - 1 \right) = s \cdot \left(\frac{M_x - M_{x+20} - (M_x - M_{x+10})}{M_x - M_{x+10}} \right) > \frac{(N_{x+10} - N_{x+20})}{(N_x - N_{x+10})}$$

$$\Rightarrow s > \frac{(N_{x+10} - N_{x+20})}{(N_x - N_{x+10})} \Bigg/ \left(\frac{M_{x+10} - M_{x+20}}{M_x - M_{x+10}} \right) = \frac{(N_{x+10} - N_{x+20}) \cdot (M_x - M_{x+10})}{(N_x - N_{x+10}) \cdot (M_{x+10} - M_{x+20})}$$

Alternativer Ansatz: wähle s so, dass das Deckungskapital im Jahr 10 >0 ist:

$$\Rightarrow 100.000 \cdot \frac{M_{x+10} - M_{x+20}}{D_{x+10}} - VS \cdot \frac{M_x - M_{x+20}}{s \cdot (N_x - N_{x+10}) + (N_{x+10} - N_{x+20})} \cdot \frac{N_{x+10} - N_{x+20}}{D_{x+10}} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{M_{x+10} - M_{x+20}}{D_{x+10}} > \frac{M_x - M_{x+20}}{s \cdot (N_x - N_{x+10}) + (N_{x+10} - N_{x+20})} \cdot \frac{N_{x+10} - N_{x+20}}{D_{x+10}}$$

$$\Rightarrow s \cdot (N_x - N_{x+10}) + (N_{x+10} - N_{x+20}) > \frac{(M_x - M_{x+20}) \cdot (N_{x+10} - N_{x+20})}{M_{x+10} - M_{x+20}}$$

$$\Rightarrow s \cdot (N_x - N_{x+10}) > \frac{(M_x - M_{x+20}) \cdot (N_{x+10} - N_{x+20})}{M_{x+10} - M_{x+20}} - (N_{x+10} - N_{x+20})$$

$$\Rightarrow s \cdot (N_x - N_{x+10}) > \frac{\left[(M_x - M_{x+20}) - (M_{x+10} - M_{x+20})\right] \cdot (N_{x+10} - N_{x+20})}{M_{x+10} - M_{x+20}}$$

$$\Rightarrow s > \frac{(N_{x+10} - N_{x+20}) \cdot (M_x - M_{x+10})}{(N_x - N_{x+10}) \cdot (M_{x+10} - M_{x+20})}$$

Für x=40 muss gelten: s > 0,36468618.

Aufgabe 5 (20 Punkte)

zu a)

Das Eintrittsalter wird durch Altersverschiebung um ein Jahr heraufgesetzt.

Deswegen ergibt sich für den gesuchten Nettoeinmalbeitrag:

$$\text{EB[a]} = {}_{10|}\ddot{a}_{61} \cdot 2400 + \ddot{a}_{\overline{10}|} \cdot 2400 = \left(\frac{N_{71}}{D_{61}} + \frac{1 - v^{10}}{1 - v} \right) \cdot 2400 \quad \text{mit } v = 1/(1.009).$$

Mit den Werten der Sterbetafel 2004 RM ergibt sich dann: $\frac{N_{71}}{D_{61}} = \frac{1008024{,}56}{54742{,}35} = 18{,}414$, sowie $\ddot{a}_{\overline{10}|}$ = 0.085700804/0.008919722 = 9,608 , so dass man insgesamt erhält:

EB[a] = (18,414 +9,608) 2400 = 28,022 $\cdot$ 2400 = 67252,8 Euro.

zu b)

Der Barwert der alternativen Kombination aus Termfix-Versicherung und aufgeschobener Rente berechnet sich zu:

EB[b] = ${}_{10|}\ddot{a}_{61} \cdot 2400 + B \cdot v^{10}$ und hieraus ergibt sich als gesuchter Auszahlungsbetrag der Termfix-Versicherung:

B = $2400 \cdot \ddot{a}_{\overline{10}|} / v^{10}$ = 25220,63 Euro .

Aufgabe 6 (30 Punkte)

zu a)

Das versicherungsmathematische Alter am Stichtag beträgt 41 Jahre. Das Finanzierungsbeginnalter (zum Beginn des Eintrittswirtschaftsjahres 2007) beträgt 30 Jahre.

Bis zur Vollendung des 67. Lebensjahres am 25.2.2044 erreicht der Arbeitnehmer eine Dienstzeit von 36 vollen Jahren. Die vollen Dienstjahre werden daher ab Alter 31 gezählt. Damit endet die fünfjährige Wartezeit im Alter 36.

Die monatliche Alters- bzw. Invalidenrente beträgt anfänglich 15 % x 3.000 € = **450,00 €** und steigt ab Alter 51 um weitere 10 % x 3.000 € = 300 € auf insgesamt **750,00 €**. Die Witwenrente beträgt ab Alter 36 einheitlich **450,00 €**.

Die Formel für den Teilwert zum 31.12.2017 lautet:

$${}_{11}V_{30} = A_{41} - \frac{A_{30}}{a^{a}_{30\,\overline{37|}}} \cdot a^{a}_{41\,\overline{26|}}$$

mit

$$A_{41} = 12 \cdot 3.000\,€ \cdot \left[0{,}15 \cdot \left({}^{(12)}a^{aiA}_{41} + a^{aw}_{41}\right) + 0{,}1 \cdot \frac{D^{a}_{51}}{D^{a}_{41}} \cdot {}^{(12)}a^{aiA}_{51}\right]$$

und

$$A_{30} = 12 \cdot 3.000\,€ \cdot \left[0{,}15 \cdot \frac{D^{a}_{36}}{D^{a}_{30}} \cdot \left({}^{(12)}a^{aiA}_{36} + a^{aw}_{36}\right) + 0{,}1 \cdot \frac{D^{a}_{51}}{D^{a}_{30}} \cdot {}^{(12)}a^{aiA}_{51}\right]$$

zu b)

Beim modifizierten Teilwertverfahren werden die biometrischen Risiken für die Zeit zwischen Eintritt und Stichtag ausgeblendet, d.h. es wird lediglich eine Abzinsung vorgenommen. Die Bestandsverbleibewahrscheinlichkeit für diesen Zeitraum beträgt somit konstant 1, da der Mitarbeiter offenbar bis zum Stichtag im Bestand verblieben ist. Die Formel lautet

$$P_{30}^{(11)} = \frac{v^{11} \cdot A_{41}}{a_{\overline{11|}} + v^{11} \cdot a^{a}_{41\,\overline{26|}}} \text{ mit } A_{41} \text{ wie oben}$$

zu c)

Für die **steuerliche** Bewertung der Pensionsverpflichtungen ist in § 6a EStG das Teilwertverfahren vorgeschrieben, als Finanzierungsbeginn gilt der Beginn des Eintrittsjahres, wobei jedoch bestimmte Mindestalter (derzeit 27 Jahre) zu berücksichtigen sind. Der Rechnungszins ist auf 6 % festgelegt, künftige dynamische Entwicklungen (z.B. Gehalts- oder Rententrends) dürfen nur einbezogen werden, wenn sie dem Grunde und der Höhe nach feststehen. Fluktuation darf nicht gesondert berücksichtigt werden.

Für die **Handelsbilanz** kommt insbesondere das modifizierte Teilwertverfahren ohne Mindestalter oder die PUC-Methode (degressiver zeitratierlicher Barwert) in Frage. Der Zins ist gesetzlich als durchschnittlicher Marktzins der jeweils letzten 10 Jahre vorgeschrieben, künftige dynamische Entwicklungen (einschl. Fluktuation) sind durch realistische Annahmen zu berücksichtigen.

Aufgabe 7 (30 Punkte)

zu a)

$${}_mP_x^S = v\,{}_{m+1}V_x - {}_mV_x$$

$${}_mP_x^R = {}_m\hat{L}_x - v\,q_{x+m}\,{}_{m+1}V_x$$

$${}_mP_x^S + {}_mP_x^R = v\,{}_{m+1}V_x - {}_mV_x + {}_m\hat{L}_x - v\,q_{x+m}\,{}_{m+1}V_x$$

$$= v\,p_{x+m}\,{}_{m+1}V_x - {}_mV_x + {}_m\hat{L}_x$$

$= {}_m\hat{P}_x$ nach versicherungsmathematischer Bilanzgleichung

zu b)

$v\,p_{x+m}\,{}_{m+1}V_x = {}_mV_x + {}_m\hat{P}_x - {}_m\hat{L}_x = {}_mV_x$ nach Voraussetzung.

Dann folgt aus ${}_0V_x = 0$ dass ${}_mV_x = 0$ f. alle m.

Damit folgt

${}_mP_x^S = v\,{}_{m+1}V_x - {}_mV_x = 0$ und

$${}_mP_x^R = {}_m\hat{L}_x = {}_m\hat{P}_x$$

zu c)

Es gilt ${}_mP_x^R = {}_m\hat{L}_x - v\, q_{x+m}\, {}_{m+1}V_x = -v\, q_{x+m}\, {}_{m+1}V_x < 0$ nach Voraussetzung.

Damit folgt: ${}_mP_x^S = {}_m\hat{P}_x - {}_mP_x^R = {}_m\hat{P}_x + v\, q_{x+m}\, {}_{m+1}V_x > {}_m\hat{P}_x$.

Während der Wartezeit werden keine Leistungen gewährt. Dennoch wird eine positive Reserve gebildet. Somit wird die positive Differenz durch den Vererbungsbetrag der wegfallenden Verpflichtungen während der Wartezeit finanziert.

zu d)

i. Im konkreten Beispiel gilt ${}_mV_x = R \cdot \mathrm{a}_{x+m}^r$.

   Ferner gilt

   $${}_mP_x^S = v\,{}_{m+1}V_x - {}_mV_x = v \cdot R \cdot \mathrm{a}_{x+m+1}^r - R \cdot \mathrm{a}_{x+m}^r$$

   $$= R \cdot (v \cdot q_{x+m}^r \cdot \mathrm{a}_{x+m+1}^r + v \cdot p_{x+m}^r \cdot \mathrm{a}_{x+m+1}^r - \mathrm{a}_{x+m}^r)$$

   $$= R \cdot (v \cdot q_{x+m}^r \cdot \mathrm{a}_{x+m+1}^r + v \cdot p_{x+m}^r \cdot \mathrm{a}_{x+m+1}^r - 1 - v \cdot p_{x+m}^r \cdot \mathrm{a}_{x+m+1}^r)$$

   $$= R \cdot (v \cdot q_{x+m}^r \cdot \mathrm{a}_{x+m+1}^r - 1)$$

   $$= -R \cdot (1 - v \cdot q_{x+m}^r \cdot \mathrm{a}_{x+m+1}^r)$$

ii. Im konkreten Beispiel gilt ${}_m\hat{L}_x = R$.

   Damit gilt ${}_mP_x^R = R \cdot (1 - v \cdot q_{x+m}^r \cdot \mathrm{a}_{x+m+1}^r)$

   und somit ${}_mP_x^{R(0)} = R$ und ${}_mP_x^{R(1)} = -R \cdot v \cdot q_{x+m}^r \cdot \mathrm{a}_{x+m+1}^r$.

   Mit ${}_mP_x^R = {}_mP_x^{R(0)} + {}_mP_x^{R(1)}$ folgt

   $$R = {}_mP_x^{R(0)} = {}_mP_x^R - {}_mP_x^{R(1)} = -{}_mP_x^S - {}_mP_x^{R(1)}$$

   $$= {}_mV_x - v \cdot {}_{m+1}V_x + R \cdot v \cdot q_{x+m}^r \cdot \mathrm{a}_{x+m+1}^r$$

iii. Die Rente wird durch die Auflösung der Reserve (hier Barwert) und durch den Vererbungsbetrag der wegfallenden Verpflichtungen finanziert.