DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Mathematik der Personenversicherung (Grundwissen)
Klausur vom 17. 10. 2015

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und vergessen Sie nicht, Ihren Namen auf jedes Blatt zu schreiben.

Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben, die mit insgesamt 180 Punkten bewertet werden. Um diese maximale Punktzahl erreichen zu können, müssen alle Aufgaben bearbeitet werden. Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 72 Punkte erforderlich.

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner, beigefügte Formelsammlung, beigefügte Sterbetafeln

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (30 Punkte)

Man betrachte die Beitragskalkulation für eine nach Art der Lebensversicherung betriebene Krankenversicherung ohne Übertragungswert, bei der alle Rechnungsgrundlagen bis auf den Zins bereits festgelegt sind. Das Profil sei streng monoton steigend.

Beweisen Sie, dass für die Erwachsenen jedes Eintrittsalters $x < \omega$ der (ungezillmerte) Nettojahresbeitrag des Neugeschäfts umso höher wird, je niedriger der Rechnungszins angesetzt wird.

Anleitung: Zeigen Sie, dass der (ungezillmerte) Nettojahresbeitrag sich als U_x/N_x schreiben lässt und beweisen Sie zunächst, dass dieser Quotient, als Funktion des Diskontfaktors betrachtet, eine positive Ableitung besitzt.

Aufgabe 2 (30 Punkte)

Eine aktuell 50-jährige Versicherte in einem Tarif der substitutiven Krankheitskostenversicherung mit Versicherungsbeginn 01.01.2010 hat aufgrund des durch sie gezahlten 10 %-igen gesetzlichen Zuschlags eine zusätzliche Alterungsrückstellung in Höhe von V_{50}^{GZ} aufgebaut. Die diesbezügliche Ausscheideordnung des Tarifs sei durch die Werte D_x und $ä_x$, die prozentualen Zuschläge des Tarifs seien durch Δ gegeben.

a) Leiten Sie her, welche monatliche Beitragsminderung MB_{65} ab Alter 65 durch V_{50}^{GZ} gewährt werden kann.

b) Die 50-jährige Versicherte führt eine Umstellung in einen anderen Tarif der substitutiven Krankheitskostenversicherung durch, dessen Ausscheideordnung durch die Werte D'_x und $ä'_x$ und dessen prozentualen Zuschläge durch Δ' gegeben seien. Mit welchem Faktor ist MB_{65} zu multiplizieren, um die monatliche Beitragsminderung MB'_{65} im neuen Tarif zu erhalten?

c) Die 50-jährige Versicherte wechselt zu einem anderen PKV-Unternehmen. Inwieweit wird V_{50}^{GZ} dorthin übertragen?

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Gegeben sei eine Versicherung auf den Todes- und Erlebensfall mit der Erlebensfallsumme S und der anfänglichen Todesfallsumme $T < S$, die mit dem Beginn des 6. Versicherungsjahres auf den Betrag $T + 0{,}5 \cdot (S - T) = 0{,}5 \cdot (S + T)$ ansteigt. Aus steuerlichen Gründen soll T mindestens 50 % der Summe der ausreichenden Jahresbeiträge betragen, die Versicherungsdauer n stimme mit der Beitragszahlungsdauer überein.

Berechnen Sie den Mindestbetrag von T (aufgerundet auf 1000 €), wenn folgende Daten gegeben sind:

Eintrittsalter x: 30 Jahre
Laufzeit n: 30 Jahre
Erlebensfallsumme S: 100.000 €

α^z = 25 ‰ der Summe der ausreichenden Jahresprämien („Beitragssumme"), einmalig zu Versicherungsbeginn

α^γ = 1,0 ‰ der Beitragssumme, vorschüssig für jedes Jahr der Versicherungsdauer

β = 3 % der ausreichenden Jahresprämie, vorschüssig für jedes Jahr der Versicherungsdauer

γ = 2,0 ‰ der Beitragssumme, vorschüssig für jedes Jahr der Versicherungsdauer.

Verwenden Sie bitte die beigefügte Sterbetafel DAV 2008 TM (Zins 1,25 %); die gesetzlichen Unisex-Vorgaben sollen keine Rolle spielen.
(Hinweis zur Rechenvereinfachung: $\ddot{a}_{30:\overline{30|}} = 24{,}626136$)

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Um das Risiko der Antiselektion bei Unisex-Tarifen zu vermeiden, bietet ein Versicherungsunternehmen folgenden Tarif an:

Sofort beginnende lebenslange Rentenversicherung gegen Einmalbeitrag mit Rentenhöhe R (R bezeichnet die jährlich vorschüssige Rente), kombiniert mit einer t- jährigen Risikoversicherung mit Todesfallleistung $s \cdot R$.
Aus Vereinfachungsgründen wird nur die Nettovariante betrachtet.
Der Parameter s ist so zu gestalten, dass die Nettoprämien P_x für Männer und P_y für Frauen gleich sind.

a) Geben Sie eine allgemeine Formel zur Berechnung von s an.
b) Berechnen Sie konkret die jährliche vorschüssige Rente für eine 70-jährige Person (Geburtsjahr 1945) bei einem Einmalbeitrag von 100.000 € (mit Rechnungszins 1,25% auf Basis der Sterbetafel DAV 2004 R) und t = 10.

Aufgabe 5 (20 Punkte)

Eine klassische gemischte Kapitalversicherungen mit durchgehender Beitragszahlung und einem Garantiezins von 1,25% wird mit unmittelbaren Abschlusskosten in Höhe von α^z **= 25 Promille** der Beitragssumme kalkuliert. Bei einem Kostensystem von

β = 3% vom jährlichen Bruttobeitrag,

γ = 0,0015 der Versicherungssumme,

α^γ = 0,001 der Versicherungssumme

ergeben sich unter Verwendung der Tafel DAV 2008 T Männer (Zins: 1,25%) für das Eintrittsalter x = 40 und die Laufzeit n = 20 bei einer Versicherungssumme von € 100.000 jährliche Bruttoprämien in Höhe von $P^a = P^a(25) =$ € 5072,16.

Da das Provisionssystem wegen der Absenkung des Zillmersatzes auf 25 Promille der Beitragssumme ohnehin umgestellt werden soll, erwägt das Versicherungsunternehmen ein Rückkaufswertsystem, das sich an einer gleichmäßigen Verteilung der Abschlusskosten auf die ganze Laufzeit orientiert.

a) Wie lautet die Äquivalenzgleichung zur Berechnung der zukünftigen Versicherungsleistungen zu den jeweiligen Zeitpunkten t (t = 0, 1, 2,…, n - 1), wenn die Abschlusskosten von α^z = 25 Promille der Bruttobeitragssumme gleichmäßig auf die gesamte Versicherungsdauer verteilt werden, und zwar so, dass sich für t = 0 derselbe Bruttobarwert ergibt wie zur Berechnung von $P^a(25)$?

b) Wie hoch ist die Differenz zwischen **gezillmerter Deckungsrückstellung** ${}_tV^{\alpha}_{x:n}$ und der Deckungsrückstellung, die sich bei gleichmäßiger Verteilung der Abschlusskosten wie beschrieben ergibt?

c) Man berechne diesen Differenzbetrag für t = 10, d.h. 10 Jahre nach Abschluss des Vertrages für oben die angegebenen Daten (Tafel DAV 2008 T Männer, Zins: 1,25%).

Aufgabe 6 (30 Punkte)

Die Firma Morgengrün GmbH hat ihren Beschäftigten unmittelbare Pensionszusagen erteilt. Gewährt werden Renten bei Invalidität und Erreichen der Altersgrenze. Die Höhe der Invaliden- und Altersrente beträgt monatlich 400,00 €. Nach 5 vollendeten Dienstjahren erhöht sich die Rentenanwartschaft um weitere 5,00 € für jedes weitere vollendete Dienstjahr bis auf höchstens 600,00 € monatlich nach insgesamt 45 vollendeten Dienstjahren. Als feste Altersgrenze ist die Vollendung des 65. Lebensjahres vorgesehen. Bei Rentenbezug vor der festen Altersgrenze wird die Altersrente für jeden Monat des vorzeitigen Rentenbezuges um 0,4 % ihres Betrages gekürzt.
Der Anwärter Albert Schlau, geb. am 13.2.1962, trat am 1.2.1994 in die Firma Morgengrün GmbH ein und erhielt die beschriebene unmittelbare Pensionszusage.

a) Welche Jahresrentenanwartschaft besteht gegenüber Albert Schlau in dem am Bewertungsstichtag **31.10.2015** maßgebenden versicherungstechnischen Alter?

b) Wie lautet die Formel für den steuerlichen Teilwert nach § 6a Abs. 3 EStG zum **31.10.2015** für den Anwärter Albert Schlau? Bei der Teilwertberechnung soll das Pensionsalter **63** in Ansatz gebracht werden.

c) Schätzen Sie den prozentualen Zuwachs des steuerlichen Teilwerts zum 31.10.2016 unter der Annahme, dass Herr Schlau zu diesem Zeitpunkt aktiv ist und die Pensionszusage im Laufe des am 31.10.2016 endenden Wirtschaftsjahres um 10 % erhöht wird.

d) Schätzen Sie den Wert der Versorgungszusage, wenn die zugesagte Leistung bis zum Versorgungsfall in etwa der Gehaltsentwicklung folgt und das derzeitige Gehalt 5.000 € monatlich beträgt. Beachten Sie, dass vom Wert einer Zusage auf Alters-, Invaliden- und 60 %-Witwenrente etwa 25 % auf die Anwartschaft auf Witwenrente entfallen.

Aufgabe 7 (30 Punkte)

Im Repetitorium wurde der Zusammenhang zwischen Barwert, Leistung, Prämie und Reserve einer Verpflichtung behandelt.

a) Geben Sie die Definition der prospektiven Reserve ${}_mV_x^{pro}, m \geq 0$, in Abhängigkeit von ${}_{m+k}\hat{P}_x$ und ${}_{m+k}\hat{L}_x$ $, k \geq 0$ an und erläutern Sie die Bedeutung der in der Formel vorkommenden Ausdrücke.

b) Sei $m \geq 0$. Die Definition der retrospektive Reserve lautet bekanntlich:

$$ {}_m\mathrm{V}_x^{\mathrm{retro}} = \frac{r^m}{{}_m p_x} \cdot \left[{}_0V_x^{retro} + \sum_{k=0}^{m-1} v^k \, {}_k p_x \left({}_k\hat{P}_x - {}_k\hat{L}_x \right) \right] $$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Definition, dass gilt:

$$ {}_mV_x^{retro} + {}_m\hat{P}_x = {}_m\hat{L}_x + v \cdot p_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x^{retro} \qquad (1) $$

Hinweis: Führen Sie $v^{m+1} \cdot {}_{m+1}p_x \cdot {}_{m+1}V_x^{retro}$ in eine Darstellung in Abhängigkeit von ${}_mV_x^{retro}$ über.

Man kann zeigen, dass (1) auch für die prospektive Reserve gilt. Es gilt also generell:

$$ {}_mV_x + {}_m\hat{P}_x = {}_m\hat{L}_x + v \cdot p_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x $$

Sei nun ${}_m\hat{P}_x$, $m \geq 0$, jährlich vorschüssig zahlbar. Wie im Repetitorium behandelt lässt sich die Gesamtprämie ${}_m\hat{P}_x$ in eine Sparprämie ${}_mP_x^S$ und in eine Riskoprämie ${}_mP_x^R$ zerlegen.

c) Geben Sie die Definition der Sparprämie ${}_mP_x^S$ an und stellen Sie die Reserve ${}_mV_x$ als Funktion von ${}_0V_x$ und der ${}_kP_x^S$, $0 \leq k \leq m-1$, dar.

d) Zeigen Sie, dass gilt:

$$ {}_mP_x^R \;=\; {}_m\hat{L}_x \;-\; v \cdot q_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x $$

e) Der Vertrag sehe als Prämie die sogenannte „natürliche Prämie“ vor, d.h. für jedes Jahr entspreche die Prämie dem Barwert der in diesem Jahr verursachten Leistungen, also

${}_m\hat{P}_x = {}_m\hat{L}_x$, m = 0, ... , n - 1 mit n : Laufzeit des Vertrages.

Berechnen Sie unter der Bedingung ${}_0V_x = 0$ die Reserven ${}_mV_x$, m = 0, ... , n , und hieraus ${}_mP_x^S$ und ${}_mP_x^R$, m = 0, ... , n - 1.

Mathematik der Personenversicherung (Grundwissen)
Klausur vom 17. 10. 2015

Lösungshinweise

Aufgabe 1 (30 Punkte)

Der Nettojahresbeitrag des Neugeschäfts ist

$$P_x = \frac{A_x}{ä_x} = \frac{U_x/D_x}{N_x/D_x} = \frac{U_x}{N_x}$$

Die Ableitung dieses Terms nach dem Diskontfaktor v ist ein Quotient mit Nenner N_x^2. Da dieser Nenner positiv ist, wird das Vorzeichen also durch das Vorzeichen des Zählers bestimmt. Der Zähler ist

$$U'_x(v) \cdot N_x(v) - U_x(v) \cdot N'_x(v)$$
$$= \sum_{t=0}^{\omega-x} K_{x+t} \cdot l_{x+t} \cdot (x+t) \cdot v^{x+t-1} \cdot \sum_{s=0}^{\omega-x} l_{x+s} \cdot v^{x+s}$$
#
$$- \sum_{t=0}^{\omega-x} K_{x+t} \cdot l_{x+t} \cdot v^{x+t} \cdot \sum_{s=0}^{\omega-x} l_{x+s} \cdot (x+s) \cdot v^{x+s-1}$$
$$= \sum_{t,s=0}^{\omega-x} K_{x+t} \cdot l_{x+t} \cdot l_{x+s} \cdot (x+t) \cdot v^{2x+t+s-1} - \sum_{t,s=0}^{\omega-x} K_{x+t} \cdot l_{x+t} \cdot l_{x+s} \cdot (x+s) \cdot v^{2x+t+s-1}$$
$$= \sum_{t,s=0}^{\omega-x} K_{x+t} \cdot l_{x+t} \cdot l_{x+s} \cdot v^{2x+t+s-1} \cdot (t-s) = \sum_{\substack{t,s=0 \\ t=s}}^{\omega-x} \dots + \sum_{\substack{t,s=0 \\ t>s}}^{\omega-x} \dots + \sum_{\substack{t,s=0 \\ t<s}}^{\omega-x} \dots$$
$$= 0 + \sum_{\substack{t,s=0 \\ t>s}}^{\omega-x} K_{x+t} \cdot l_{x+t} \cdot l_{x+s} \cdot v^{2x+t+s-1} \cdot (t-s) + \sum_{\substack{s,t=0 \\ s<t}}^{\omega-x} K_{x+s} \cdot l_{x+s} \cdot l_{x+t} \cdot v^{2x+s+t-1} \cdot (s-t)$$
$$= \sum_{\substack{t,s=0 \\ t>s}}^{\omega-x} (K_{x+t} - K_{x+s}) \cdot l_{x+t} \cdot l_{x+s} \cdot v^{2x+t+s-1} \cdot (t-s)$$

Da $x<\omega$ ist, ist in der zuletzt angegebenen Summe die Menge der Indizes, über die summiert wird, nicht leer. Jeder Summand ist positiv, da jeweils t > s und somit wegen des streng monoton steigenden Profils auch $K_{x+t} > K_{x+s}$. Somit ist die Summe positiv, so dass die Ableitung von P_x positiv ist.

Damit ist die Behauptung der Anleitung bewiesen.

Verringert man den Rechnungszins i, so erhöht sich wegen der Beziehung v = 1/(1+i) der Diskontfaktor v, so dass sich wegen der positiven Ableitung der Nettojahresbeitrag erhöht.

Aufgabe 2 (30 Punkte)

zu a) (10 Punkte)

Durch V_{50}^{GZ} muss die jährliche Zahlung eines Betrages in Höhe von 0 € vom 50. bis zum 65. Lebensjahr und in Höhe von NMB_{65} € (jährliche Nettobeitragsminderung) ab dem 65. Lebensjahres finanziert werden. Folglich gilt die Äquivalenzgleichung

$$V_{50}^{GZ} = \sum_{x=50}^{64} \frac{D_x}{D_{50}} \cdot 0 + \sum_{x=65}^{\omega} \frac{D_x}{D_{50}} \cdot NMB_{65}$$

$$= \frac{D_{65}}{D_{50}} \cdot \sum_{x=65}^{\omega} \frac{D_x}{D_{65}} \cdot NMB_{65}$$

$$= \frac{D_{65}}{D_{50}} \cdot ä_{65} \cdot NMB_{65} \ .$$

woraus sich ergibt

$$NMB_{65} = V_{50}^{GZ} \cdot \frac{D_{50}}{D_{65} \cdot ä_{65}} \ .$$

Wegen $NMB_{65} = 12\,(1 - \Delta)\,MB_{65}$ erhält man schließlich

$$MB_{65} = \frac{V_{50}^{GZ}}{12\,(1-\Delta)} \cdot \frac{D_{50}}{D_{65} \cdot ä_{65}} \ .$$

zu b) (10 Punkte)

Analog zu a) gilt

$$MB_{65}' = \frac{V_{50}^{GZ}}{12\,(1-\Delta')} \cdot \frac{D_{50}'}{D'_{65} \cdot ä_{65}'} \ .$$

Durch Umformung erhält man

$$MB_{65}' = \frac{V_{50}^{GZ}}{12\,(1-\Delta)} \cdot \frac{D_{50}}{D_{65} \cdot ä_{65}} \cdot \frac{1-\Delta}{1-\Delta'} \cdot \frac{D_{50}'}{D_{50}} \cdot \frac{D_{65}}{D_{65}'} \cdot \frac{ä_{65}}{ä_{65}'}$$

$$= MB_{65} \cdot \text{Faktor}$$

mit

$$\text{Faktor} = \frac{(1-\Delta)\cdot D'_{50}\cdot D_{65}\cdot ä_{65}}{(1-\Delta')\cdot D_{50}\cdot D'_{65}\cdot ä'_{65}} \quad .$$

zu c) (10 Punkte)

Die Zusatzrückstellung V_{50}^{GZ} wird gemäß § 13a Abs. 1 Nr. 1 der Kalkulationsverordnung in voller Höhe an das andere PKV-Unternehmen übertragen, da für den Vertrag gilt, dass er „ab dem 1. Januar 2009“ abgeschlossen wurde.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Bezeichnet man die ausreichende Prämie mit P^a und die Mindesttodesfallsumme mit T, so berechnet sich P^a nach dem Äquivalenzprinzip aus der Gleichung:

$$\begin{aligned}
P^a \cdot ä_{x:\overline{n}|} &= S\cdot {}_xE_n + T\cdot {}_{|5}A_x + 0{,}5\cdot(S+T)\cdot\frac{D_{x+5}}{D_x}\cdot {}_{|n-5}A_{x+5} \\
&\quad + \alpha^z\cdot n\cdot P^a + (\alpha^\gamma+\gamma)\cdot n\cdot P^a\cdot ä_{x:\overline{n}|} + \beta\cdot P^a\cdot ä_{x:\overline{n}|} \\
&= S\cdot\frac{D_{x+n}}{D_x} + T\cdot\frac{M_x - M_{x+5}}{D_x} + 0{,}5\cdot(S+T)\cdot\frac{M_{x+5}-M_{x+n}}{D_x} \\
&\quad + \alpha^z\cdot n\cdot P^a + (\alpha^\gamma+\gamma)\cdot n\cdot P^a\cdot ä_{x:\overline{n}|} + \beta\cdot P^a\cdot ä_{x:\overline{n}|},
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
&P^a\cdot[(1-\beta-n\cdot(\alpha^\gamma+\gamma))\cdot ä_{x:\overline{n}|} - \alpha^z\cdot n] \\
&\quad = S\cdot\frac{D_{x+n}}{D_x} + T\cdot\frac{M_x - M_{x+5}}{D_x} + 0{,}5\cdot(S+T)\cdot\frac{M_{x+5}-M_{x+n}}{D_x}
\end{aligned}$$

Setzt man nun die vorgegebenen Werte ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&P^a\cdot[(1 - 0{,}03 - 30\cdot 0{,}003)\cdot 24{,}626136 - 30\cdot 0{,}025] \\
&\quad = 100000\cdot(0{,}62559 + 0{,}5\cdot 0{,}066547) + T\cdot(0{,}0038317 + 0{,}5\cdot 0{,}066547)
\end{aligned}$$

und damit

$$P^a\cdot 20{,}921 = 65.886{,}75 + T\cdot 0{,}037105$$

Beachtet man nun noch, dass $T = 0{,}5\cdot 30\cdot P^a$ gesetzt werden kann, so erhält man schließlich

$$\mathrm{P}^{\mathrm{a}} = \frac{65.886{,}748}{20{,}364425} = 3.235{,}39.$$

Die gesuchte Todesfallsumme T ergibt sich damit aus $\mathrm{T} = 0{,}5 \cdot 30 \cdot \mathrm{P}^{\mathrm{a}} = 48.530{,}85 \rightarrow 49.000$.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Zu a) (10 Punkte)

Es gilt:

$$P^x = R \cdot \frac{N_x}{D_x} + s \cdot R \cdot \frac{M_x - M_{x+t}}{D_x} = R \cdot \frac{N_y}{D_y} + s \cdot R \cdot \frac{M_y - M_{y+t}}{D_y} = P^Y$$

$$\Rightarrow \frac{N_x}{D_x} + s \cdot \frac{M_x - M_{x+t}}{D_x} = \frac{N_y}{D_y} + s \cdot \frac{M_y - M_{y+t}}{D_y}$$

$$\Rightarrow s \cdot \left(\frac{M_x - M_{x+t}}{D_x} - \frac{M_y - M_{y+t}}{D_y} \right) = \frac{N_y}{D_y} - \frac{N_x}{D_x}$$

$$\Rightarrow s = \frac{\frac{N_y}{D_y} - \frac{N_x}{D_x}}{\frac{M_x - M_{x+t}}{D_x} - \frac{M_y - M_{y+t}}{D_y}} = \frac{\frac{N_y \cdot D_x - N_x \cdot D_y}{D_y \cdot D_x}}{\frac{(M_x - M_{x+t}) \cdot D_y - (M_y - M_{y+t}) \cdot D_x}{D_x \cdot D_y}} =$$

$$= \frac{N_y \cdot D_x - N_x \cdot D_y}{(M_x - M_{x+t}) \cdot D_y - (M_y - M_{y+t}) \cdot D_x}$$

Zu b) (10 Punkte)

Durch Einsetzen mit x = 70 und t = 10 erhält man auf Basis der Sterbetafel DAV 2004 R mit Altersverschiebung + 4:

$$s = 47{,}7310914833$$

$$\Rightarrow R = \frac{P^x}{\frac{N_x}{D_x} + s \cdot \frac{M_x - M_{x+t}}{D_x}} = \frac{P^x}{\frac{N_x}{D_x} + \frac{N_y \cdot D_x - N_x \cdot D_y}{(M_x - M_{x+t}) \cdot D_y - (M_y - M_{y+t}) \cdot D_x} \cdot \frac{M_x - M_{x+t}}{D_x}} = 4186{,}42€$$

(Hinweis: Da die Sterbetafel, die in der Klausur verteilt wurde, einen kleinen Fehler enthielt, weichen die numerischen Ergebnisse in den abgegebenen Lösungen ggf. geringfügig ab.)

Aufgabe 5 (20 Punkte)

Zu a) (5 Punkte)

Die Äquivalenzgleichung zur Berechnung der ausreichenden Prämie P^a für den Zillmersatz α^Z lautet für bei der Versicherungsumme S

$$P^a \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = S \cdot A_{x:\overline{n}|} + \alpha^Z \cdot n \cdot P^a + (\alpha_\gamma + \gamma) S \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \beta \cdot P^a \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

Bei gleichmäßiger Verteilung auf die Laufzeit lautet die entsprechende Äquivalenzgleichung:

$$\textit{Barwert der zukünftigen Leistungen} = S \cdot A_{x+t:\overline{n-t}|} + \frac{\alpha^Z \cdot n \cdot P^a}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} + (\alpha_\gamma + \gamma) S \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} + \beta \cdot P^a \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

für t = 0, 1, 2,…, n - 1.

Zu b) (5 Punkte)

Die gezillmerte Deckungsrückstellung berechnet sich nach der Formel $_t\mathrm{V}_x^\alpha = {}_t\mathrm{V}_x - \alpha^z \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \cdot \mathrm{n} \cdot \mathrm{P}^a$

Bei einer gleichmäßigen Verteilung der Abschlusskosten ergibt sich daher bei der Rückstellungsberechnung gemäß der Vorschrift

Barwert der zukünftigen Leistungen - Barwert der zukünftigen Bruttoprämien,

dass sich sämtliche Kosten aufheben, so dass hier nur die Nettodeckungsrückstellung verbleibt. Die fragliche Differenz ist also zum Zeitpunkt t nach Vertragsabschluss $\alpha^z \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \cdot \mathrm{n} \cdot \mathrm{P}^a$.

Zu c) (10 Punkte)

Für t =10 benötigt man die Leibrentenbarwerte $\ddot{a}_{50:\overline{10}|}$ sowie $\ddot{a}_{40:\overline{20}|}$, und diese sind:

$$\frac{N_{50} - N_{60}}{D_{50}} = 9{,}24701 \text{ bzw. } \frac{N_{40} - N_{60}}{D_{40}} = 17{,}36557 \ .$$

Deswegen berechnet sich $\alpha^z \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \cdot \mathrm{n} \cdot \mathrm{P}^a$ für t = 10 zu $\alpha^Z \cdot n \cdot P^a \cdot \frac{\ddot{a}_{50:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{20}|}} = 1350{,}45$,

d.h. für diesen Rückkaufswert muss das Unternehmen € 1350,45 mehr aufwenden als bei herkömmlicher Vorgehensweise.

Aufgabe 6 (30 Punkte)

Zu a) (8 Punkte)

Das versicherungstechnische Alter am 31.10.2015 beträgt 54 Jahre, Bis zur Altersgrenze 63 werden 31 volle Dienstjahre erreicht, das Beginnalter für die Bestimmung des Leistungsvektors beträgt somit 63 – 31 = 32 Jahre. Im Alter 54 ist eine Anwartschaft von 400 € zzgl. 5 € für jedes Dienstjahr ab Alter 37 erreicht, d.h. 400 € + 17 · 5 € = 485 €.

Zu b) (10 Punkte)

Das Eintrittsalter (versicherungstechnisches Alter am 1.11.1993) beträgt 32 Jahre. Die im Alter 63 erreichbare Altersrente beträgt 400 € + 26 · 5 € = 530 € und wird wegen des vorzeitigen Bezugs der Altersrente um 24 · 0,4 % gekürzt. Damit ergibt sich unter Berücksichtigung von a) folgende Formel für den Teilwert zum 31.10.2015:

$$A_{54} - \frac{A_{32}}{a^{a}_{32,63-32}} \cdot a^{a}_{54,63-54} \text{ mit}$$

$$A_{54} = 12 \cdot (485 \cdot {}^{(12)}a^{aiA}_{54} + 5 \cdot \frac{D^a_{55}}{D^a_{54}} \cdot {}^{(12)}_{<}a^{aiA}_{55} - 24 \cdot 0{,}4\% \cdot 530 \cdot \frac{D^a_{63}}{D^a_{54}} \cdot {}^{(12)}a^{aiA}_{63})$$

und

$$A_{32} = 12 \cdot (400 \cdot {}^{(12)}a^{aiA}_{32} + 5 \cdot \frac{D^a_{38}}{D^a_{32}} \cdot {}^{(12)}_{<}a^{aiA}_{38} - 24 \cdot 0{,}4\% \cdot 530 \cdot \frac{D^a_{63}}{D^a_{32}} \cdot {}^{(12)}a^{aiA}_{63})$$

Zu c) (6 Punkte)

Die abgelaufene Dauer m betrug am 31.10.2015 54-32 = 22 Jahre. Nach der Näherungsformel

$_{m+1}V_x \approx {}_{m}V_x \cdot \frac{m+1}{m} \cdot 1{,}03$ ergibt sich ein Schätzwert zum 31.10.2016 von

$100\% \cdot \frac{23}{22} \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}10 = 118{,}4\%$. Der Schätzwert für den Zuwachs beträgt 18,4 %.

Zu d) (6 Punkte)

Die bis zum Alter 65 erreichbare Leistung von 540 € wird in 33 Dienstjahren erworben. Pro Dienstjahr beträgt die Rente damit 540 € / 33 / 5.000 € = 0,33 % des Gehaltes. Nach der Näherungsformel für die Kosten einer Versorgungszusage können damit die Kosten auf 1,3 x 0,33/0,1 = 4,3 % abgeschätzt werden. Wegen der fehlenden Anwartschaft auf Witwenrente ergibt sich ein Schätzwert von = 0,75 x 4,3 % = 3,2 %.

Aufgabe 7 (30 Punkte)

Zu a) (8 Punkte)

Es gilt für $m \geq 0$:

$${}_mV_x^{pro} = \sum_{k\geq 0} v^k \, {}_kp_{x+m} \left({}_{m+k}\hat{L}_x - {}_{m+k}\hat{P}_x \right)$$

mit

v: Diskontierungsfaktor $v = \frac{1}{1+i}$

${}_kp_{x+m}$: Wahrscheinlichkeit eines x+m-Jährigen des betrachteten Bestandes, das Alter x+m+k im Bestand zu erleben

${}_{m+k}\hat{P}_x$: Erwartungswert der Prämienleistungen des Jahres]m+k, m+k+1], die durch Erreichen des Alters x+m+k verursacht werden, diskontiert auf den Beginn dieses Jahres

${}_{m+k}\hat{L}_x$: Erwartungswert der gesamten Leistung, die durch Erreichen des Altersintervalls [x+m+k, x+m+k+1[ausgelöst werden kann, diskontiert auf den Beginn dieses Jahres

Zu b) (10 Punkte)

$$\begin{aligned} v^{m+1} \, {}_{m+1}p_x \, {}_{m+1}V_x^{retro} &= v^{m+1} \, {}_{m+1}p_x \frac{r^{m+1}}{{}_{m+1}p_x} \left[{}_0V_x^{retro} + \sum_{k=0}^{m} v^k \, {}_kp_x \left({}_k\hat{P}_x - {}_k\hat{L}_x \right) \right] \\ &= {}_0V_x^{retro} + \sum_{k=0}^{m-1} v^k \, {}_kp_x \left({}_k\hat{P}_x - {}_k\hat{L}_x \right) + v^m \, {}_mp_x \left({}_m\hat{P}_x - {}_m\hat{L}_x \right) \\ &= v^m \, {}_mp_x \, {}_mV_x^{retro} + v^m \, {}_mp_x \left({}_m\hat{P}_x - {}_m\hat{L}_x \right) \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$v^{m+1} \, {}_{m+1}p_x \, {}_{m+1}V_x^{retro} = v v^m \ \ p_{x+m} \, {}_mp_x \, {}_{m+1}V_x^{retro} = v^m \, {}_mp_x \, {}_mV_x^{retro} + v^m \, {}_mp_x \left({}_m\hat{P}_x - {}_m\hat{L}_x \right)$$

Und damit: $v \, p_{x+m} \, {}_{m+1}V_x^{retro} = {}_mV_x^{retro} + \left({}_m\hat{P}_x - {}_m\hat{L}_x \right)$

Also: ${}_mV_x^{retro} + {}_m\hat{P}_x = {}_m\hat{L}_x + v \, p_{x+m} \, {}_{m+1}V_x^{retro}$

Zu c) (4 Punkte)

Die Sparprämie ist wie folgt definiert:

$${}_mP_x^S = v \, {}_{m+1}V_x - {}_mV_x$$

Somit gilt für m = 0,1,...:

$$ {}_{m+1}V_x = r \cdot \left({}_mV_x + {}_mP_x^S \right) $$

und damit folgt:

$$ {}_mV_x = r^m \, {}_0V_x + \sum_{k=0}^{m-1} r^{m-k} \, {}_kP_x^S $$

Zu d) (5 Punkte)

Es gilt:

$$ {}_mV_x + {}_m\hat{P}_x = {}_m\hat{L}_x + v\,p_{x+m}\,{}_{m+1}V_x $$

Mit ${}_m\hat{P}_x = {}_mP_x^S + {}_mP_x^R$ folgt somit:

$$ \begin{aligned} {}_mP_x^R &= {}_m\hat{L}_x + v\,p_{x+m}\,{}_{m+1}V_x - {}_mV_x - {}_mP_x^S \\ &= {}_m\hat{L}_x + v\,p_{x+m}\,{}_{m+1}V_x - {}_mV_x - v\,{}_{m+1}V_x + {}_mV_x \\ &= {}_m\hat{L}_x + v\,p_{x+m}\,{}_{m+1}V_x - v\,{}_{m+1}V_x \\ &= {}_m\hat{L}_x - v\,q_{x+m}\,{}_{m+1}V_x \end{aligned} $$

Zu e) (3 Punkte)

Wegen ${}_m\hat{P}_x = {}_m\hat{L}_x$ gilt:

$$ v\,p_{x+m}\,{}_{m+1}V_x = {}_mV_x + {}_m\hat{P}_x - {}_m\hat{L}_x = {}_mV_x $$

Somit folgt wegen ${}_0V_x = 0$: ${}_mV_x = 0 \ \forall m$

Und damit ${}_mP_x^S = v\,{}_{m+1}V_x - {}_mV_x = 0$ sowie ${}_mP_x^R = {}_m\hat{P}_x - {}_mP_x^S = {}_m\hat{L}_x$