Klausur Spezialwissen Schaden 2013 (neue PO)

Aufgabe 1 (Tarifierung, 50 Punkte)

Aufgabe 1.1 (GLM)

a) (10 Punkte) Die Dichten der Verteilungen aus der Exponentialfamilie genügen der Darstellung $f(x;\vartheta,\Phi) = C(x,\Phi)\cdot \exp((x\vartheta - b(\vartheta))/a(\Phi))$

Die Dichte der Gamma-Verteilung sei gegeben durch $f(x) = \frac{(\frac{\alpha}{\mu})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{\alpha}{\mu}x}$

Zeigen Sie, dass die Gammaverteilung zur Exponentialfamilie gehört.

Die Dichte der Gamma-Verteilung lässt sich darstellen als

$$\boldsymbol{f(x) = C(x,\alpha)\cdot \exp\left(-\frac{\alpha}{\mu}x + \alpha log\frac{1}{\mu}\right) = C(x,\alpha)\cdot \exp(-\frac{\alpha}{\mu}x - \alpha\left(-log\frac{1}{\mu}\right))}$$

mit einer Funktion C. Setzt man weiter $\boldsymbol{\vartheta = -\frac{1}{\mu}}$, so folgt

$$\boldsymbol{f(x) = C(x,\alpha)\cdot \exp(\alpha(x\vartheta - \left(-log(-\vartheta)\right)))}$$

Damit hat man $\boldsymbol{b(\vartheta) = -log(-\vartheta)}$und $\boldsymbol{a(\Phi) = a(\alpha) = \frac{1}{\alpha}}$

b) (10 Punkte) Leiten Sie die Maximum-Likelihood-Schätzer für die beiden Parameter μ und α der Gamma-Verteilung aus der Log-Likelihood-Funktion her.
Hinweis: Implizite Darstellungen sind ausreichend.

Der log-Likelihood lautet:

$$\boldsymbol{\log L = \sum_{i=1}^{n}(\alpha log\frac{\alpha}{\mu} - log\Gamma(\alpha) + (\alpha-1)logx_i - \frac{\alpha}{\mu}x_i)}$$

Ableitung nach μ ergibt $\boldsymbol{\frac{\partial logL}{\partial\mu} = \sum_i(\frac{-\alpha}{\mu} + \frac{\alpha}{\mu^2}x_i)}$

Nullsetzen führt auf $\boldsymbol{\frac{1}{n}\sum_i x_i = \mu}$

Ableitung nach α ergibt $\boldsymbol{\frac{\partial logL}{\partial\alpha} = \sum_i(log\frac{\alpha}{\mu} + 1 - \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + logx_i - \frac{x_i}{\mu})}$

Nullsetzen führt hier auf

$\boldsymbol{n\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = n\left(1 + log\frac{\alpha}{\mu}\right) + \sum_i\left(logx_i - \frac{x_i}{\mu}\right) = nlog\frac{\alpha}{\mu} + \sum_i logx_i}$ **mit der Lösung für μ**

c) (10 Punkte) Im multiplikativen Modell und unter Annahme einer Poisson-Verteilung führt die Nullsetzung der Ableitung des Log-Likelihood bei zwei Merkmalen auf:

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} w_{ij}(y_{ij} - u_i v_j)x_{ij} = 0$$

Dabei ist x_{ij} ein Zeilenvektor der Designmatrix.

Leiten Sie für den Fall I=J=2 die Design-Matrix und daraus die Gleichungen des Marginalsummenverfahrens her.

Die Design-Matrix ist in diesem Fall (I+J Spalten und IJ Zeilen, jeweils also 4):

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Im folgenden ist x_{ij} ein Zeilenvektor der Design-Matrix. Damit gilt

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} w_{ij}(y_{ij} - u_i v_j)x_{ij} = 0$$

Somit liefert die komponentenweise Betrachtung die Gleichungen des Marginalsummenverfahrens:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{w_{11}(y_{11} - u_1 v_1)} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{w_{11}(y_{11} - u_1 v_1)} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{w_{12}(y_{12} - u_1 v_2)} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{w_{12}(y_{12} - u_1 v_2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{w_{21}(y_{21} - u_2 v_1)} \\ \boldsymbol{w_{21}(y_{21} - u_2 v_1)} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{w_{22}(y_{22} - u_2 v_2)} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{w_{22}(y_{22} - u_2 v_2)} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Damit ergeben sich folgende vier Gleichungen des Marginalsummenverfahrens:

I: $\boldsymbol{w_{11}y_{11} + w_{12}y_{12} = w_{11}u_1v_1 + w_{12}u_1v_2}$

II: $\boldsymbol{w_{21}y_{21} + w_{22}y_{22} = w_{21}u_2v_1 + w_{22}u_2v_2}$

III: $\boldsymbol{w_{11}y_{11} + w_{21}y_{21} = w_{11}u_1v_1 + w_{21}u_2v_1}$

IV: $\boldsymbol{w_{12}y_{12} + w_{22}y_{22} = w_{12}u_1v_2 + w_{22}u_2v_2}$

Aufgabe 1.2 (Abhängigkeiten und Umsetzung des Risikomodells in den Tarif)

a) (6 Punkte) Überlegen Sie, ob die folgenden Tabellenpaare Abhängigkeiten zeigen und beschreiben Sie diese kurz.

Fall1:

Bestandsgröße	Wohneigentum ja	Wohneigentum nein	Gesamt
Junge VN	200	600	800
Ältere VN	600	200	800
Gesamt	800	800	1.600

Schadenbedarf	Wohneigentum ja	Wohneigentum nein	Gesamt
Junge VN	150	180	172,5
Ältere VN	100	120	105
Gesamt	112,5	165	138,75

Fall 2:

Bestandsgröße	Wohneigentum ja	Wohneigentum nein	Gesamt
Junge VN	200	100	300
Ältere VN	600	300	900
Gesamt	800	400	1.200

Schadenbedarf	Wohneigentum ja	Wohneigentum nein	Gesamt
Junge VN	125	180	143,33
Ältere VN	100	120	106,67
Gesamt	106,25	135	115,83

Im ersten Fall zeigt sich eine Abhängigkeit im Bestand (bei jungen weniger Wohneigentum als bei älteren), aber immer derselbe Unterschied im Schadenbedarf zwischen jungen und älteren sowie Wohneigentum ja/nein.
Im zweiten Beispiel liegt keine Abhängigkeit im Bestand vor (immer dieselben Verhältnisse), wohl aber im Schadenbedarf (geringerer Unterschied zwischen jung/älter bei vorhandenem Wohneigentum und bei jungen größerer Unterschied zwischen Wohneigentum ja/nein als bei älteren).

b) (8 Punkte) Welche der folgenden Tabellen zeigen Abhängigkeiten? Was würden Sie bzgl. der Umsetzung in den Tarif tun und begründen Sie dies?

Fall1:

Anzahl schadenfreier Jahre	1	2	3	4	5
Schadenbedarf junger VN	1000	800	600	400	200
Schadenbedarf älterer VN	500	400	300	200	100

Fall 2:

Anzahl schadenfreier Jahre	1	2	3	4	5
Schadenbedarf junger VN	1000	900	750	500	300
Schadenbedarf älterer VN	500	400	300	200	100

Fall 3:

Anzahl schadenfreier Jahre	1	2	3	4	5
Schadenbedarf junger VN	1000	800	600	400	195
Schadenbedarf älterer VN	500	400	300	200	100

Im ersten Fall zeigt sich keine Abhängigkeit (immer doppelt so hoher Schadenbedarf bei jungen wie bei älteren), in den anderen beiden Beispielen liegt eine Abhängigkeit vor (unterschiedliche Verhältnisse zwischen jungen und älteren je nach Anzahl schadenfreier Jahre).
Eine Umsetzung in den Tarif liegt in den ersten Fällen nahe, da entweder keine Abhängigkeit oder eine deutliche vorliegt. Den dritten Fall kann man wie den ersten behandeln, da nur bei fünf schadenfreien Jahren eine Abweichung von

der Unabhängigkeit vorhanden und dies auch nur sehr schwach ausgeprägt ist; hier gilt einfach vor exakt.

c) (6 Punkte) Nennen Sie drei Ursachenbereiche, die zu Abweichungen zwischen Risikomodell und Tarif führen können und erläutern Sie kurz die Art der Abweichungen.

Mögliche Ursachenbereiche für Abweichungen zwischen Risikomodell und Tarif sind:

- **IT/System können Beschränkungen hinsichtlich der Umsetzbarkeit verursachen.**
- **Markt/Wettbewerb können Anpassungen nahelegen, um wettbewerbsfähig zu bleiben.**
- **Umgehungsmöglichkeiten z.B. bei sogenannten weichen Merkmalen wie etwa Garage in der Kraftfahrtversicherung.**
- **Erklärbarkeit/Verständlichkeit: Ein Mangel daran kann die Verkaufbarkeit reduzieren.**
- **Rechtliche Anforderungen/Gegebenheiten können Tarifkriterien untersagen wie etwa Unisex die Verwendung des Geschlechts.**

2. Aufgaben zur Schadenreservierung (Spezialwissen 2013) (50 Punkte)

Sei C_{ik} , $1 \leq i,k \leq n$, der Schadenstand von Anfalljahr i nach k Abwicklungsjahren und $S_{ik} := C_{ik} - C_{i,k-1}$ der Zuwachs. Die C_{ik} für $i+k \leq n+1$ seien bekannt. Etwaige andere Bezeichnungen müssen von Ihnen definiert werden, auch wenn sie mit denen des Skriptums übereinstimmen.

2.1. Großschadenbehandlung (4+4=8 Punkte)

2.1.1. Wieso sollte man einen Großschaden (z. B. einen, der mit über € 1.000.000 im Abwicklungsdreieck steckt) vor Anwendung des Chain-Ladder-Verfahrens aus dem Abwicklungsdreieck herausnehmen?

2.1.2. Sie haben also den Großschaden aus dem Abwicklungsdreieck herausgenommen und dann das Chain-Ladder-Verfahren auf das so bereinigte Dreieck angewandt. Wieso sollten Sie die so (ggfs. mit Tail) geschätzten Reserven $\hat{R}_i$ für einige Anfalljahre i noch erhöhen (Sie brauchen nicht dazulegen, um welchen Betrag)? Um welche Jahre handelt es sich dabei (außer dem Jahr, aus dem der Großschaden herausgenommen wurde)?

Lösung:

2.1.1. Das Abwicklungsverhalten eines Großschadens beeinflusst insbesondere beim Chain-Ladder-Verfahren in besonders starkem Maße das Abwicklungsverhalten seines ganzen Anfalljahres sowie die Höhe der Abwicklungsfaktoren-Schätzer $\hat{f}_k$ ab dem Abwicklungsjahr, in dem der Schaden „groß“ wurde. Da das Abwicklungsverhalten eines Großschadens aber in der Regel erheblich von dem der Normalschäden abweicht, sollte der Großschaden herausgenommen werden. Insbesondere, wenn der Schaden bereits maximal reserviert ist, würde er eine Fehlschätzung der Abwicklung der anderen Schäden bewirken.

2.1.2. Wenn der Großschaden erst in einem Abwicklungsjahr $k > 1$ als „groß“ erkennbar geworden ist, kann auch in jedem Anfalljahr $i > n+1-k$, wo Abwicklungsjahr k noch nicht beobachtet wurde, das Gleiche mit gewisser Wahrscheinlichkeit passieren. Daher muss $\hat{R}_i$ für diese i geeignet erhöht werden.

2.2. Zuwachsquotenmodell (3+3+6=12 Punkte)

Die Annahmen des Zuwachsquoten-Modells mit Tail lauten bekanntlich:
(a) Die Zuwächse S_{ik} sind unabhängig.
(b) $E(S_{ik}) = v_i\, m_k$ mit bekannten v_i , $1 \leq i \leq n$, und unbekannten m_k , $1 \leq k \leq n+1$.
(c) $Var(S_{ik}) = v_i\, s_k^2$ mit unbekannten s_k^2.

2.2.1. Berechnen Sie $Var(\hat{m}_k)$ für $\hat{m}_k := \sum_{i=1}^{n+1-k} S_{ik} \Big/ \sum_{i=1}^{n+1-k} v_i$, $1 \leq k \leq n$.
(Sie können das Ergebnis auch ohne Rechnung einfach hinschreiben.)

2.2.2. Geben Sie einen erwartungstreuen Schätzer für den Parameter s_k^2, $1 \leq k \leq n-1$, an.

2.2.3. Der Reserveschätzer lautet $\hat{R}_i = v_i(\hat{m}_{n+2-i} + \ldots + \hat{m}_{n+1})$. Welche Größen müssen zusätzlich zu den in 2.2.2 angegebenen Parameterschätzern noch festgelegt werden, um $Var(\hat{R}_i)$ schätzen zu können? Skizzieren Sie, wie man diese Größen zumindest näherungsweise festlegen kann.

Lösung:

2.2.1. $\mathrm{Var}(\hat{m}_k) = \dfrac{\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{ik}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i\right)^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n+1-k} \mathrm{Var}(S_{ik})}{\left(\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i\right)^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i\, s_k^{\,2}}{\left(\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i\right)^2} = \dfrac{s_k^{\,2}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i}.$

2.2.2. $\hat{s}_k^{\,2} = \dfrac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n+1-k} v_i \left(\dfrac{S_{ik}}{v_i} - \hat{m}_k\right)^2$, was nur für $k < n$ definiert ist.

2.2.3. Wegen $\mathrm{Var}(\hat{R}_i) = v_i^{\,2}\left(\mathrm{Var}(\hat{m}_{n+2-i}) + \ldots + \mathrm{Var}(\hat{m}_{n+1})\right)$ sind nur die Größen $\mathrm{Var}(\hat{m}_k)$ zu schätzen. Angesichts von 2.2.1 und 2.2.2 braucht man sich nur noch um $\mathrm{Var}(\hat{m}_n)$ und $\mathrm{Var}(\hat{m}_{n+1})$ zu kümmern. Für $\mathrm{Var}(\hat{m}_n) = s_n^{\,2}/v_1$ braucht man einen Schätzer für $s_n^{\,2}$, den man z. B. als $\min\{\hat{s}_k^{\,2} \mid 1 \le k \le n-1\}$ oder aus einer Extrapolation der $\ln(\hat{s}_k^{\,2})$ gegen k (oder gegen $\ln(|\hat{m}_k|)$) erhalten kann. Dagegen muss man $\mathrm{Var}(\hat{m}_{n+1})$ direkt schätzen, z. B. über ein 95%-Konfidenzintervall für die Tailquote m_{n+1} , dessen Länge etwa dem Vierfachen des Standardfehlers $\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{m}_{n+1})}$ entspricht.

2.3. <u>Chain-Ladder-Modell</u> (2+6=8 Punkte)

2.3.1. Was besagen die Modellannahmen für $E(C_{n3} \mid C_{n1}, C_{n2})$ und $\mathrm{Var}(C_{n3} \mid C_{n1}, C_{n2})$?

2.3.2. Berechnen Sie $\mathrm{Var}(C_{n3} \mid C_{n1})$.

Lösung:

2.3.1. $E(C_{n3} \mid C_{n1}, C_{n2}) = C_{n2}\, f_3$ mit einem unbekannten Parameter f_3.
$\mathrm{Var}(C_{n3} \mid C_{n1}, C_{n2}) = C_{n2}\, \sigma_3^{\,2}$ mit einem unbekannten Parameter $\sigma_3^{\,2}$.

2.3.2. Gemäß der Iterativität von (auch bedingten)Varianzen (vgl. Formelsammlung) gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(C_{n3} \mid C_{n1}) &= E[\mathrm{Var}(C_{n3} \mid C_{n1}, C_{n2}) \mid C_{n1}] + \mathrm{Var}[E(C_{n3} \mid C_{n1}, C_{n2}) \mid C_{n1}] \\
&= E[C_{n2}\, \sigma_3^{\,2} \mid C_{n1}] + \mathrm{Var}[C_{n2}\, f_3 \mid C_{n1}] \qquad \text{(gemäß 2.3.1)} \\
&= C_{n1}\, f_2\, \sigma_3^{\,2} + C_{n1}\, \sigma_2^{\,2}\, f_3^{\,2} .
\end{aligned}$$

2.4. <u>Munich Chain Ladder</u> (4+8=12 Punkte)

Der Fundamentalsatz der Munich Chain Ladder besagt, dass ein aktuell überdurchschnittliches P/I-Verhältnis (oder I/P-Verhältnis) bei separater Anwendung der Chain Ladder auf das Paid- und auf das Incurred-Dreieck im gleichen Maße überdurchschnittlich bleibt (P/I = Paid / Incurred). Bezeichnen Sie mit C_{ik} bzw. $\hat{C}_{ik}$ die Paid-Daten und mit D_{ik} bzw. $\hat{D}_{ik}$ die Incurred-Daten.

2.4.1. Formulieren Sie den genauen Sachverhalt in Form einer Gleichung.

2.4.2. Formulieren Sie den analogen Sachverhalt für das Zuwachsquoten-Modell zuerst in Worten (wie oben) und dann als Gleichung (wie in 2.4.1).

Lösung:

2.4.1. $\dfrac{\hat{C}_{ik}/\hat{D}_{ik}}{\sum_{j=1}^{n}\hat{C}_{jk}\Big/\sum_{j=1}^{n}\hat{D}_{jk}} = \dfrac{C_{i,n+1-i}/D_{i,n1+-i}}{\sum_{j=1}^{n}\hat{C}_{j,n+1-i}\Big/\sum_{j=1}^{n}\hat{D}_{j,n+1-i}}$ für alle k > n+1-i

mit $\hat{C}_{jk} := C_{jk}$, $\hat{D}_{jk} := D_{jk}$ für j+k ≤ n+1 bzw. gemäß Chain Ladder sonst.

2.4.2. Im Zuwachsquoten-Modell ist das Analogon (additiv statt multiplikativ) zum I/P-Verhältnis die Einzelfallreserve-Quote. Also gilt: Eine aktuell überdurchschnittliche Reservequote $(D_{i,n+1-i} - C_{i,n+1-i})/v_i$ bleibt bei separater Anwendung des Zuwachsquoten-Verfahrens auf Zahlungen und auf angefallene Schäden im gleichen Maße überdurchschnittlich, d. h.

$$\frac{\hat{D}_{ik}-\hat{C}_{ik}}{v_i} - \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\hat{D}_{jk}-\hat{C}_{jk}\right)}{\sum_{j=1}^{n}v_j} = \frac{D_{i,n+1-i}-C_{i,n+1-i}}{v_i} - \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\hat{D}_{j,n+1-i}-\hat{C}_{j,n+1-i}\right)}{\sum_{j=1}^{n}v_j} \text{ für } k > n+1-i$$

mit dem Volumenmaß v_i des Zuwachsquotenmodells. (Beachte, dass auch „im gleichen Maße" sich bei additiv statt multiplikativ von einem Quotienten in eine Differenz übersetzt.) Diese Gleichung kann tatsächlich aus dem Zuwachsquotenmodell hergeleitet werden.

2.5. Bornhuetter/Ferguson (4+6=10 Punkte)

Sie haben externe Schätzer $\hat{q}_i$, $1 \le i \le n$, für die Endschadenquoten U_i/v_i sowie $\hat{f}_k$, $2 \le k \le n$, für die Chain-Ladder-Abwicklungsfaktoren einschließlich eines Tailfaktors $\hat{f}_\infty$. „Extern" meint hier, dass die Schätzer von anderen Gesellschaften oder aus einem ähnlichen, aber anderen Geschäftssegment stammen, aber jedenfalls nicht aus dem Geschäft, auf das Sie sie anwenden wollen.

2.5.1. Wie können Sie ausschließlich hiermit den Bornhuetter/Ferguson-Reserveschätzer $\hat{R}_i^{BF}$ bei bekanntem Volumenmaß v_i berechnen?

2.5.2. Wie können Sie in einer ersten groben Weise ohne stochastisches Modell und ohne Berechnung der eigenen Abwicklungsfaktoren prüfen, ob diese externen Schätzer einigermaßen zu den Daten Ihres Abwicklungsdreiecks passen?

Lösung:

2.5.1. $\hat{R}_i^{BF} = \hat{U}_i\left(1-\hat{z}_{n+1-i}\right)$ mit $\hat{U}_i := v_i\hat{q}_i$ und $\hat{z}_k := \left(\hat{f}_{k+1}\cdot\ldots\cdot\hat{f}_n\cdot\hat{f}_\infty\right)^{-1}$.

2.5.2. Bei Anwendung der externen Parameter nehmen Sie implizit an, dass Ihre Daten $\{S_{ik} \mid i+k \le n+1\}$ nur zufällig von den BF-Schätzern $\hat{S}_{ik} := \hat{U}_i(\hat{z}_k - \hat{z}_{k-1})$ der Erwartungswerte $E(S_{ik})$ abweichen. Daher sollten die Vorzeichen $\operatorname{sgn}\left(S_{ik}-\hat{S}_{ik}\right)$ auch zufällig über das Abwicklungsdreieck verteilt sein und insbesondere nicht in einer Zeile, Spalte oder Diagonale stark dominieren.

Klausur Spezialwissen Schaden 2013

Aufgabe 3 (Risikoteilung, 50 Punkte)

Zur Tarifierung eines Kraftfahrt-Haftpflicht-XLs für das Anfalljahr 2014 soll eine Burning Cost-Rechnung durchgeführt werden. Der XL deckt 9.000 xs 1.000 und ist mit einer APK10 ausgestattet, wobei zur Stabilisierung der Lohn- und Gehaltsindex verwendet wird. Das Basisjahr für die Stabilisierungsklausel ist 2013. Als Beobachtungszeitraum dienen die Anfalljahre 2010-2012. Es sind folgende Informationen verfügbar:

Jahr	GNPI	Stückprämie	Schadenhäufigkeit	Lohn- und Gehaltsindex
2010	10.000	10,0	9,5%	100,0
2011	11.000	11,0	9,0%	102,1
2012	12.000	12,0	9,0%	104,3
Prognose für 2013	12.500	13,0	8,5%	106,5
Prognose für 2014	13.200	12,0	8,5%	110,2

Experten gehen davon aus, dass der Lohn- und Gehaltsindex nach 2014 jährlich um 4% steigt. Ferner sind für den Beobachtungszeitraum 2010-2012 die Großschäden (mit Abwicklung) bekannt, deren Aufwand die Priorität von 1.000 übersteigen:

			Abwicklungsjahr		
Schaden Nr.	**Anfalljahr**		1	2	3
1	2010	Kumulierte Zahlungen	0	200	200
		Aufwand	1.200	1.200	1.200
2	2011	Kumulierte Zahlungen	200	300	
		Aufwand	1.700	2.000	
3	2011	Kumulierte Zahlungen	500	500	
		Aufwand	1.100	1.100	
4	2012	Kumulierte Zahlungen	0		
		Aufwand	1.500		

3.1 Beschreiben Sie kurz zwei Möglichkeiten einen sinnvollen Prämienindex zu konstruieren und berechnen Sie mit beiden Varianten einen Prämienindex für unser Beispiel. Entscheiden Sie sich für die folgende Rechnung für einen der beiden Indizes.

3.2 Berechnen Sie den Schadenindex für die Jahre 2010-2016 unter der Annahme einer Superimposed Inflation von 2%.

3.3 Verwenden Sie das im Skript beschriebene Vorgehen zur Indexierung der Großschäden in das Anfalljahr 2014 („As-if-Schäden“).

3.4 Berechnen Sie das Abwicklungsdreieck der indexierten und stabilisierten xs-Schadenaufwände.

3.5 Berechnen Sie den indexierten Burning Cost für den Beobachtungszeitraum 2010-2012.

3.6 Verwenden Sie das Chain Ladder-Verfahren sowie einen Tail-Faktor von 1,5 um den IBNR-indexierten Burning Cost zu berechnen.

3.7 Angenommen der IBNR-indexierte Burning Cost wird als Schätzer für die erwartete Schadenlast im XL verwendet. Welche Kritik kann man ganz allgemein an diesem Vorgehen üben? Weshalb ist der indexierte Burning Cost in diesem konkreten Fall ein sehr unsicherer Schätzer?

Hinweise:

- Runden Sie Ihre (Zwischen-)Ergebnisse in vernünftiger Weise. Es ist erlaubt mit gerundeten Zwischenergebnissen weiterzurechnen.
- Sollten Sie bei Aufgabe 3.3 zu keinem Ergebnis kommen, so rechnen Sie in den folgenden Teilaufgaben mit der Annahme weiter, dass die Schäden durch die Indexierung nicht verändert werden.

Klausur Spezialwissen Schaden 2013

Lösung zu Aufgabe 3

3.1 Eine Möglichkeit besteht darin, direkt die Stückprämie als Prämienindex zu verwenden. Dies bedeutet effektiv, dass man als Volumenmaß die Zahl der Jahreseinheiten verwendet.
Eine andere Möglichkeit ist es, zusätzlich den Trend in der Schadenhäufigkeit zu berücksichtigen und den Quotient aus Stückprämie und Schadenhäufigkeit als Prämienindex zu verwenden. Das Volumenmaß ist dann die (erwartete) Anzahl an Schäden (Groß- und Kleinschäden) des jeweiligen Anfalljahres. Die folgende Tabelle zeigt die beiden Möglichkeiten:

Jahr	**Prämienindex 1**	**Prämienindex 2**
2010	10,0	105,3
2011	11,0	122,2
2012	12,0	133,3
2013	13,0	152,9
2014	12,0	141,2

Im Folgenden verwenden wir Prämienindex 1.

3.2 Die folgende Tabelle zeigt die Berechnung des Schadenindex:

Jahr	**L&G-Index**	**Steigerung L&G-Index**	**Steigerung Schadenindex**	**Schadenindex**
2010	100,0	0,0%	0,0%	100,0
2011	102,1	2,1%	4,1%	104,1
2012	104,3	2,2%	4,2%	108,4
2013	106,5	2,1%	4,1%	112,9
2014	110,2	3,5%	5,5%	119,1
2015	114,6	4,0%	6,0%	126,2
2016	119,2	4,0%	6,0%	133,8

3.3 Zuerst berechnen wir die dekumulierte Darstellung der Großschäden:

			Abwicklungsjahr		
Schaden Nr.	**Anfalljahr**		1	2	3
1	2010	Dekumulierte Zahlungen	0	200	0
		Reserve	1.200	1.000	1.000
2	2011	Dekumulierte Zahlungen	200	100	
		Reserve	1.500	1.700	
3	2011	Dekumulierte Zahlungen	500	0	
		Reserve	600	600	
4	2012	Dekumulierte Zahlungen	0		
		Reserve	1.500		

Dekumulierte Zahlungen bzw. Reserven aus dem k-ten Abwicklungsjahr von Anfalljahr i werden mit dem „Indexierungs-Faktor“ $I^S_{2014+k-1}\big/I^S_{i+k-1}$ indexiert (wobei I^S_j den Schadenindex im Jahr j bezeichnet). Die folgende Tabelle zeigt die Indexierungsfaktoren:

	Abwicklungsjahr		
Anfalljahr	1	2	3
2010	1,19	1,21	1,23
2011	1,14	1,16	
2012	1,10		

Mit diesen Faktoren erhalten wir die indexierten Großschäden in dekumulierter Darstellung:

Schaden Nr.	Anfalljahr		Abwicklungsjahr 1	2	3
1	2010	Dekumulierte Zahlungen	0	242	0
		Reserve	1.429	1.212	1.234
2	2011	Dekumulierte Zahlungen	229	116	
		Reserve	1.716	1.979	
3	2011	Dekumulierte Zahlungen	572	0	
		Reserve	686	698	
4	2012	Dekumulierte Zahlungen	0		
		Reserve	1.647		

In kumulierter Darstellung:

Schaden Nr.	Anfalljahr		Abwicklungsjahr 1	2	3
1	2010	Kumulierte Zahlungen	0	242	242
		Aufwand	1.429	1.455	1.476
2	2011	Kumulierte Zahlungen	229	345	
		Aufwand	1.944	2.324	
3	2011	Kumulierte Zahlungen	572	572	
		Aufwand	1.258	1.270	
4	2012	Kumulierte Zahlungen	0		
		Aufwand	1.647		

3.4 In den Jahren 2014 und 2015 ist der Lohn- und Gehaltsindex im Vergleich zu 2013 noch um weniger als 10% gestiegen. In 2016 übersteigt der Index dann die 10% Marge. Für die As-if-Schäden greift die Stabilisierung also ab dem dritten Abwicklungsjahr. Die Stabilisierung muss also bei der Berechnung des indexierten und stabilisierten xs-Schadendreiecks nur für das dritte Abwicklungsjahr des Anfalljahres 2010 berücksichtigt werden.
Für den As-if-Schaden aus dem Anfalljahr 2010 wird die Priorität im dritten Abwicklungsjahr mit folgendem Stabilisierungsfaktor angepasst:

$$\frac{242+1.234}{242+\frac{106,5}{119,2}\cdot 1.234}=1,103$$

Die stabilisierte Priorität im dritten Abwicklugsjahr beträgt also 1.103. Man erhält folgendes Abwicklungsdreieck der stabilisierten und indexierten xs-Schadenaufwände:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr 1	2	3
2010	429	455	373
2011	1.202	1.594	
2012	647		

3.5 Das revalorisierte GNPI von Anfalljahr *i* erhält man, indem man das GNPI des Anfalljahres *i* mit dem Quotient aus Prämienindex 2014 und Prämienindex des Jahres *i* multipliziert. Die folgende Tabelle zeigt die revalorisierten Prämien der Anfalljahre 2010-2012:

Jahr	Revalorisiertes GNPI
2010	12.000
2011	12.000
2012	12.000

Wir erhalten den indexierten Burning Cost:

$$\frac{373+1.594+647}{12.000+12.000+12.000}=7{,}26\%\,.$$

3.6 Die Chain Ladder-Rechnung liefert

	Abwicklungsjahr		
Anfalljahr	1	2	3
2010	429	455	373
2011	1.202	1.594	*1.309*
2012	647	*813*	*667*

Mit dem Tail-Faktor von 1,5 erhalten wir den IBNR-indexierten Burning Cost

$$\frac{373+1.309+667}{12.000+12.000+12.000}\cdot 1{,}5=9{,}79\%\,.$$

3.7 Allgemeine Kritik:

- Es sollte zusätzlich ein Preis für den unbestrichenen Teil der Deckung angesetzt werden.
- Das Verfahren bildet Rentenkomponenten nicht differenziert ab (eine „korrekte" Berücksichtigung ist jedoch sehr schwierig, wenn nicht unmöglich).
- Eine IBNR-Rechnung auf xs-Schäden ist für individuelle Portefeuilles häufig nicht robust.
- Chain Ladder wird auf ein Dreieck angewendet, das nicht inflationsbereinigt ist (aber zumindest hat man innerhalb der Spalten einheitliche Wertverhältnisse).

Kritik im konkreten Beispiel:

- Der Beobachtungszeitraum ist viel zu kurz (und entsprechend die Anzahl der bekannten Abwicklungsjahre).
- Die Anzahl der Schäden ist für eine aussagekräftige Burning Cost-Rechnung (und natürlich auch für die IBNR-Rechnung) viel zu gering.
- Es sind nur die Schäden bekannt, die die Priorität übersteigen. Da die Schäden durch die Indexierung größer werden müssen die Schäden ab einer niedrigeren Meldegrenze bekannt sein.

Klausur Spezialwissen Schaden 2013

Aufgabe 4 Modellierung (15 Punkte)
Parameterrisiko beim Zeichnungsrisiko und Simulation von Zufallszahlen

Bei der Modellierung des Zeichnungsrisikos werde angenommen, dass die Schadenanzahlen $Y_1, Y_2, ...$ eine $NB(1,p)$-Verteilung mit demselben unbekannten Parameter p aus dem Intervall [0;1] besitzen, und dass die Y_i für gegebenes p stochastisch unabhängig sind.
Weiterhin liege eine Stichprobe $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{N}_0^n$ von $n \geq 2$ beobachteten voneinander unabhängigen Schadenanzahlen vor.

4.1 Bestimmen Sie einen geeigneten Schätzer für p bei gegebener Stichprobe y.

4.2 Zeigen Sie, dass die A-posteriori-Verteilung des Parameters unter Annahme eines gleichverteilten Priors auf dem Parameterraum durch eine Beta(α, β)-Verteilung gegeben ist, und bestimmen Sie α und β bei gegebener Stichprobe y.

4.3 Zeigen Sie, dass die Dichte einer Beta(α, β)-Verteilung mit $\alpha, \beta \geq 1$ beschränkt ist. Beschreiben Sie, wie man diese Verteilung unter Verwendung des Acceptance-Rejection-Verfahrens simulieren kann, und zeigen Sie, dass die Annahmewahrscheinlichkeit eines Wertes eine Funktion der verwendeten Normierungskonstante c ist.

Hinweise zu Aufgabe 4:
Die Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.
Nachfolgende Tabelle darf ohne Beweis verwendet werden:

Verteilung	Dichte	Erwartungswert
$NB(1,p)$ mit $p \in [0;1]$	$f(k) = p^k(1-p),\ k \in \mathbb{N}_0$	$\frac{p}{1-p}$
Beta(α, β) mit $\alpha, \beta \geq 1$	$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1}\,ds},\ 0 \leq x \leq 1$	wird nicht benötigt

Klausur Spezialwissen Schaden 2013

Lösung zu Aufgabe 4 Modellierung: Parameterrisiko beim Zeichnungsrisiko

4.1 Vorbemerkung: Die Verteilungsfamilie für die Schadenanzahl Y_1 ist gegeben durch

$$\mathcal{P} = (P_p^{Y_1})_{0\leq p\leq 1} = (NB(1,p))_{0\leq p\leq 1},$$

bzw. für $Y = (Y_1, ..., Y_n)$ mit $Y_1, ..., Y_n$ i.i.d. bei gegebenem p durch

$$\widehat{\mathcal{P}} = (P_p^{Y})_{0\leq p\leq 1} = (\bigotimes_{i=1}^{n} P_p^{Y_i})_{0\leq p\leq 1} = (NB(1,p)^{(n)})_{0\leq p\leq 1}.$$

Lösungsvariante 1: Momentenmethode
Zu lösen ist das Gleichungssystem

$$E_p(Y_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Mit $P_p^{Y_1} = NB(1,p)$ folgt (vgl. Hinweis) $E_p(Y_1) = \frac{p}{1-p}$. Zu lösen ist daher $\frac{p}{1-p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$. Über $np = \sum_{i=1}^{n} y_i - p\sum_{i=1}^{n} y_i$ und $p(n + \sum_{i=1}^{n} y_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i$ ergibt sich als Lösung des Gleichungssystems der Momentenmethode-Schätzer für p:

$$\widehat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i + n} \quad \text{(alternativ} \quad \widehat{p} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i + 1}).$$

Lösungsvariante 2: Maximum Likelihood Schätzer
Die Likelihood-Funktion ist gegeben durch

$$L(p|y) = \prod_{i=1}^{n} p^{y_i}(1-p) = p^{\sum_{i=1}^{n} y_i}(1-p)^n.$$

Die Log-Likelihood-Funktion ist entsprechend gegeben durch

$$l(p|y) = \ln(L(p|y)) = \sum_{i=1}^{n} y_i \ln(p) + n\ln(1-p).$$

Mit $\frac{d}{dp}l(p|y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{p} - \frac{n}{1-p}$ folgt:

$$\frac{d}{dp}l(p|y) \overset{>}{\underset{<}{=}} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{p} \overset{>}{\underset{<}{=}} \frac{n}{1-p} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} y_i \overset{>}{\underset{<}{=}} p(n + \sum_{i=1}^{n} y_i)$$

und damit

$$\frac{d}{dp} l(p|y) \underset{<}{\overset{>}{=}} 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \underset{>}{\overset{<}{=}} \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n y_i + n}.$$

Aus dem Monotonieverhalten der ersten Ableitung ergibt sich schließlich zusammen mit $\lim_{p \to 0} l(p|y) = \lim_{p \to 1} l(p|y) = -\infty$, dass die Log-Likelihood-Funktion und damit die Likelihood-Funktion ein absolutes Maximum besitzt bei

$$\widehat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n y_i + n}.$$

Dies ist der Maximum-Likelihood-Schätzer für p.

4.2 Der Parameter p werde als Realisierung einer Zufallsgröße Λ aufgefasst, d.h. es gelte $NB(1,p) = P_p^{Y_i} = P^{Y_i|\Lambda=p}$ mit (Zähl-)Dichte $f_p^{Y_i} = f^{Y_i|\Lambda=p}$.
Die Dichte der A-posteriori-Verteilung des Parameters auf dem Parameterraum [0;1] bei gegebener Stichprobe $y = (y_1, ..., y_n)$ als Realisierung von $Y = (Y_1, ..., Y_n)$ ist gegeben durch

$$g^{\Lambda|Y=y}(p) \quad = \quad \frac{f^{Y|\Lambda=p}(y)}{\int_0^1 f^{Y|\Lambda=s}(y)\, ds}.$$

Mit $f^{Y|\Lambda=p} \sim P^{Y|\Lambda=p} = P_p^Y = NB(1,p)^{(n)}$ ergibt sich für den Zähler

$$f^{Y|\Lambda=p}(y) = f_p^Y(y) = \prod_{i=1}^n f_p^{Y_i}(y_i) = \prod_{i=1}^n f_p^{Y_1}(y_i) = \prod_{i=1}^n p^{y_i}(1-p) = p^{\sum_{i=1}^n y_i}(1-p)^n$$

und für den Nenner

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^{Y|\Lambda=s}(y)\, ds &= \int_0^1 \prod_{i=1}^n f_s^{Y_1}(y_i)\, ds = \int_0^1 \prod_{i=1}^n s^{y_i}(1-s)\, ds \\ &= \int_0^1 s^{\sum_{i=1}^n y_i}(1-s)^n\, ds. \end{aligned}$$

Zusammengesetzt folgt mit $r := \sum_{i=1}^n y_i$

$$g^{\Lambda|Y=y}(p) = \frac{p^r(1-p)^n}{\int_0^1 s^r(1-s)^n\, ds}.$$

Dies entspricht gemäß Hinweis der Dichte der Beta$(r+1, n+1)$-Verteilung, d.h. der Beta$(\sum_{i=1}^n y_i + 1, n+1)$-Verteilung:

$$P^{\Lambda|Y=y} = \text{Beta}(\sum_{i=1}^n y_i + 1, n+1).$$

Bemerkung:
Der Zähler bestimmt die Dichte und damit die Verteilung schon eindeutig, da der Nenner lediglich der Normierung dient.

4.3 Die Dichte f der Beta(α, β)-Verteilung mit $\alpha, \beta \geq 1$ ist auf ihrem kompakten Träger [0;1] stetig. Damit ist sie auf [0;1] beschränkt und nimmt ihr Maximum an.
Alternativ folgt aus $0 \leq x \leq 1$ sofort $0 \leq (1-x) \leq 1$ und damit wegen $\alpha,\ \beta \geq 1$ schließlich $0 \leq x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \leq 1$. Entsprechend gilt $f(x) \leq (\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1}\,ds)^{-1}$ für $0 \leq x \leq 1$. Mit $a = 0$ und $b = 1$ kann man das Acceptance-Rejection-Verfahren folgendermaßen anwenden:

1) Wählt man $c = \max\{f(x) :\ 0 \leq x \leq 1\}$ (oder größer), so folgt, dass $g(x) := \frac{f(x)}{c} \leq 1$ für alle $0 \leq x \leq 1$ gilt.
Bemerkung: Als Wahl von c bietet sich alternativ $(\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1}\,ds)^{-1}$ an: Dann gilt (wie oben gezeigt) $\frac{f(x)}{c} \leq 1$, und man spart sich die analytisch aufwändige Suche nach $\max\{f(x) :\ 0 \leq x \leq 1\}$.
2) Man simuliere U_1 und U_2 stochastisch unabhängig identisch Rechteck(0,1)-verteilt und erhalte Realisierungen u_1 und u_2.
3) Falls $u_2 \leq g(u_1)$ gilt, so behalte man den Wert u_1 als Simulationsergebnis (Acceptance), sonst verwerfe man ihn (Rejection).
4) Man führe das Verfahren so oft durch, bis die gewünschte Anzahl akzeptierter Realisierungen vorliegt.

Die Annahmebedingung ist $U_2 \leq g(U_1)$, die Annahmewahrscheinlichkeit entsprechend

$$P(U_2 \leq g(U_1)).$$

Mit $h(u_1, u_2) = 1_{[0,g(u_1)]}(u_2)$ und der i.i.d. Rechteck(0,1)-Verteilung von U_1 und U_2 ergibt sich

$$\begin{aligned}
P(U_2 \leq g(U_1)) &= \int_{[0,1]\times[0,1]} h(u_1, u_2) dP^{(U_1,U_2)}(u_1, u_2) \\
&= \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} h(u_1, u_2) dP^{U_2}(u_2)\, dP^{U_1}(u_1) \\
&= \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} 1_{[0,g(u_1)]}(u_2) du_2\, du_1 \\
&= \int_{[0,1]} \int_{[0,g(u_1)]} du_2\, du_1 \\
&= \int_{[0,1]} g(u_1) du_1 \\
&= \int_{[0,1]} \frac{f(u_1)}{c} du_1 \\
&= \frac{1}{c} \int_{[0,1]} f(u_1) du_1 \\
&= \frac{1}{c}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 – Modellierung B – 15 Punkte

Sie arbeiten seit drei Jahren beim Spezialversicherer „XYZ“, der nach einem Strategiewechsel sein Haftpflichtgeschäft in den Run-Off geschickt hat und nur noch Sturmdeckungen für gewerbliche Risiken verkauft. Ihr Vorstand hat Sie mit den ökonomischen Risikotragfähigkeitsberechnungen betraut und möchte von Ihnen wissen, wie hoch das versicherungstechnische Risiko für das laufende Kalenderjahr 2013 per 31.12.2012 ist.

Hinweis: Vereinfacht sollen Zinseffekte, Risikomarge und Steuern außer Acht gelassen werden.

Grundinformationen:

1.) Per 31.12.2012 betragen die ökonomischen Eigenmittel von „XYZ“ 50 GE (=Geldeinheiten).

2.) Abwicklung des Altgeschäfts:

a) Per 31.12.2012 beläuft sich die (nominale) Best-Estimate-Reserve $\hat{R}^{(2012)}$ für angefallene Haftpflichtschäden auf 100 GE.

b) Unter Best-Estimate-Annahmen werden im Kalenderjahr 2013 50 GE für angefallene Haftpflichtschäden gezahlt werden.

c) Aus dem internen Modell liegen die folgenden drei Realisationen der Bedarfsreserve $R^{(2012)}$ (= Summe der zukünftigen Zahlungen bis zur Endabwicklung) vor:

Simulationspfad M	${}^{(M)}R^{(2012)}$
1	102
2	90
3	108

3.) Neugeschäft:

a) Die verdiente Prämie für Sturmdeckungen im Anfalljahr 2013 beträgt 50 GE, die Kosten für Schadenregulierung und Versicherungsbetrieb belaufen sich auf 20 GE.

b) Ein Rückversicherungsmakler hat Ihnen folgende AEP-Kurve für endabgewickelte Sturmschäden des Anfalljahres 2013 zur Verfügung gestellt:

Wiederkehrperiode / Jährigkeit	Höhe der Sturmschäden
50	25
100	75
200	200

c) Die in 2013 anfallenden Sturmschäden werden am Ende des Kalenderjahres 2013 vollständig abgewickelt sein.

Aufgaben:

5.1. Zeichnungsrisiko CAT – 7 Punkte

a) Wie ist die AEP-Kurve allgemein definiert? (2 Punkte)

b) Gegeben seien die folgenden drei Realisationen einer gleichverteilten Zufallsgröße u, die im internen Modell vorsimuliert wurden:

Simulationspfad M	${}^{(M)}u$
1	0,362
2	0,019
3	0,994

Erzeugen Sie unter Verwendung der AEP-Kurve des Anfalljahres 2013 (siehe Grundinformationen 3b) die zugehörigen Sturmschäden pro Simulationspfad. (3 Punkte)

c) Berechnen Sie das ultimative Anfalljahresergebnis T_{2013} des Versicherers „XYZ“ in jedem Simulationspfad. Wie hoch ist das geschätzte Anfalljahresergebnis $\hat{T}_{2013}^{(2013)}$ am Ende des Kalenderjahres 2013? (2 Punkte)

5.2. Reserverisiko - 5 Punkte

a) Erläutern Sie die grundsätzliche Funktionsweise des Recognition Pattern-Ansatzes zur Überleitung der Ultimate-Sicht in die Kalenderjahressicht. (2 Punkte)

b) Verwenden Sie den Recognition-Pattern-Ansatz, um pro Simulationspfad das einjährige ökonomische Abwicklungsergebnis des Versicherers „XYZ“ im Kalenderjahr 2013 zu berechnen. (3 Punkte)

5.3. Aggregation der Einzelrisiken und Ergebnisauswertung – 3 Punkte

a) Berechnen Sie pfadweise das ökonomische versicherungstechnische Ergebnis des Versicherers „XYZ“ im Kalenderjahr 2013. In welchen Simulationspfaden erleidet „XYZ“ einen Verlust? (1,5 Punkte)
Hinweis: Die zwischen Zeichnungsrisiko CAT und Reserverisiko bestehenden Abhängigkeiten sind bei der Simulation der Zufallsgröße u (siehe Aufgabe 1b) und der Bedarfsreserve $R^{(2012)}$ (siehe Grundinformationen 2c) bereits berücksichtigt worden.

b) Wie hoch sind die ökonomischen Eigenmittel des Versicherers „XYZ“ am 31.12.2013, wenn die Kapitalanlage zunächst nicht berücksichtigt wird? (1,5 Punkte)

Lösungen

5.1. Zeichnungsrisiko CAT

a) Bezeichnet S den zufälligen Jahresgesamtschaden einer Naturgefahr und F_S die Verteilungsfunktion von S, so ist die AEP-Kurve (*AEP = Aggregate Exceedance Probability*) definiert als:

$$AEP(T) := F_S^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right).$$

$T > 0$ wird auch als *Wiederkehrperiode* oder *Jährigkeit* bezeichnet.

b) Zur Simulation des Jahresgesamtschadens ist die Inverse F_S^{-1} pfadweise auf die Realisierungen von u anzuwenden. Um F_S^{-1} zu bestimmen. sind aus den aufgeführten Wiederkehrperioden $t_\mathrm{j}, j = 1, .., 3$ zunächst die Quantilniveaus $q\left(t_\mathrm{j}\right)$ zu berechnen:

Wiederkehrperiode t_j	$q(t_j) = 1 - \frac{1}{t_j}$
50	$0{,}98 = 1 - 0{,}02$
100	$0{,}99 = 1 - 0{,}01$
200	$0{,}995 = 1 - 0{,}005$

Wir setzen

$$F_S^{-1}(q) := \begin{cases} 0 & , \quad q < 0{,}98 \\ 25 & , \quad 0{,}98 \leq q < 0{,}99 \\ 75 & , \quad 0{,}99 \leq q < 0{,}995 \\ 200 & , \quad 0{,}995 \leq q \end{cases}$$

Die Sturmschäden S ergeben sich mittels $S = F_S^{-1}(u)$:

Simulationspfad M	${}^{(M)}S$
1	$0 = F_S^{-1}(0{,}362)$
2	$0 = F_S^{-1}(0{,}019)$
3	$75 = F_S^{-1}(0{,}994)$

c) Bezeichnen P_{2013} die verdiente Prämie und E_{2013} die Kosten sowie $S_{2013} \coloneqq S$ den endabgewickelten Sturmschaden des Anfalljahres 2013, so ermittelt sich das zugehörige ultimative Anfalljahresergebnis T_{2013} gemäß

$$T_{2013} = P_{2013} - E_{2013} - S_{2013}.$$

Simulationspfad M	${}^{(M)}T_{2013}$
1	$30 = 50 - 20 - 0$
2	$30 = 50 - 20 - 0$
3	$-45 = 50 - 20 - 75$

Beim einjährigen Anfalljahresergebnis $\hat{T}_{2013}^{(2013)}$ geht definitionsgemäß anstelle des tatsächlichen Endschadenaufwands S_{2013} die am Ende des Kalenderjahres 2013 ermittelte (zufallsabhängige) Schätzung $\hat{S}_{2013}^{(2013)}$ für den voraussichtlichen Endschadenaufwand ein:

$$\hat{T}_{2013}^{(2013)} = P_{2013} - E_{2013} - \hat{S}_{2013}^{(2013)}.$$

Da laut Grundinformationen 3c die Sturmschäden am Ende des Kalenderjahres 2013 abgewickelt sind, gilt $\hat{S}_{2013}^{(2013)} = S_{2013}$ und damit $\hat{T}_{2013}^{(2013)} = T_{2013}$, d.h. das einjährige Anfalljahresergebnis stimmt in jedem Pfad mit dem ultimativen Anfalljahresergebnis überein.

5.2. Reserverisiko

a) Beim *Recognition-Pattern-Ansatz* wird das einjährige ökonomische Abwicklungsergebnis

$$\widehat{\mathrm{CDR}}^{(2012\to2013)} = \hat{R}^{(2012)} - S_{[2012,2013]} - \hat{R}^{(2013)}$$

pfadweise approximiert über die Größe:

$$\widehat{\mathrm{CDR}}_{*}^{(2012\to2013)} := a_1 \cdot \left(\hat{R}^{(2012)} - R^{(2012)}\right)$$

Hierbei bezeichnen $S_{[2012,2013]}$ die Zahlungen im Kalenderjahr 2013, $\hat{R}^{(2013)}$ die am Ende des Kalenderjahres 2013 geschätzte Best-Estimate-Reserve und $a_1 > 0$ einen Skalierungsfaktor. Der Ausdruck $\hat{R}^{(2012)} - R^{(2012)}$ entspricht dem *ultimativen ökonomischen Abwicklungsergebnis* $\left(= \widehat{\mathrm{CDR}}^{(2012\to2012+\omega)}\right)$.

b) Werden die im Kalenderjahr 2013 voraussichtlich zu leistenden Zahlungen (= 50 GE) ins Verhältnis zu den bis zur Endabwicklung voraussichtlich zu leistenden Zahlungen (= 100 GE) gesetzt, ergibt sich daraus ein Skalierungsfaktor von $a_1 = 0{,}5$.

Simulationspfad M	${}^{(M)}\widehat{\mathrm{CDR}}^{(2012\to2012+\omega)}$	${}^{(M)}\widehat{\mathrm{CDR}}_{*}^{(2012\to2013)}$
1	$-2 = 100 - 102$	$-1 = 0{,}5 \cdot (-2)$
2	$10 = 100 - 90$	$5 = 0{,}5 \cdot 10$
3	$-8 = 100 - 108$	$-4 = 0{,}5 \cdot (-8)$

5.3. Aggregation der Einzelrisiken und Ergebnisauswertung

a) Das versicherungstechnische Ergebnis des Kalenderjahres 2013 ($=: \mathrm{UW}_{2013}$) setzt sich zusammen aus dem einjährigen ökonomischen Abwicklungsergebnis $\widehat{\mathrm{CDR}}^{(2012\to2013)}$ $\left(\approx \widehat{\mathrm{CDR}}_{*}^{(2012\to2013)}\text{, siehe Aufgabe 2b}\right)$ und dem einjährigen Anfalljahresergebnis $\hat{T}_{2013}^{(2013)}$ ($= T_{2013}$, siehe Aufgabe 1b). Somit gilt:

$$\mathrm{UW}_{2013} \approx \widehat{\mathrm{CDR}}_{*}^{(2012\to2013)} + T_{2013}$$

Beide Größen lassen sich gemäß Hinweis pfadweise addieren.

Simulationspfad M	${}^{(M)}\mathrm{UW}_{2013}$
1	$29 = (-1) + 30$
2	$35 = 5 + 30$
3	$-49 = (-4) + (-45)$

Nur in Simulationspfad 3 erleidet „XYZ“ einen ökonomischen Verlust.

b) Die ökonomischen Eigenmittel von „XYZ“ verändern sich in 2013 genau um das versicherungstechnische Ergebnis des Kalenderjahres 2013:

$$\mathrm{EM}_{2013} = \mathrm{EM}_{2012} + \mathrm{UW}_{2013}$$

Simulationspfad M	${}^{(\mathrm{M})}\mathrm{EM}_{2013}$
1	$79 = 50 + 29$
2	$85 = 50 + 35$
3	$1 = 50 + (-49)$