Klausur Spezialwissen Schaden 2012 (neue PO)

Aufgabe 1 (Tarifierung, 50 Punkte)

Aufgabe 1.1 (Erfahrungstarifierung)

a) (10 Punkte) Berechnen Sie anhand der folgenden Tabelle den mittleren SF-Index sowie den 100%-Beitrag und erläutern Sie deren Bedeutung/Notwendigkeit für den Fall, dass man die Schadenbedarfe der einzelnen SF-Klassen aus der Gesamtzeile (welcher Wert ist heranzuziehen?) mittels der Beitragssätze herleiten bzw. reproduzieren möchte.

SF-Klasse	Bestand	Schadenbedarf	SF-Index	100%-Beitrag	Beitragssatz
0	1.000	800	---	---	200
1	4.000	400	---	---	100
2	5.000	160	---	---	40
3	10.000	120	---	---	30
Gesamt	20.000	220	?	?	---

- Der mittlere SF-Index ergibt sich als mit der Bestandsverteilung gewichtetes Mittel der Beitragssätze zu 55%. Damit ist der 100%-Beitrag als Quotient des Gesamtschadenbedarfs und mittlerer SF-Index 220/0,55 = 400
- Die Festlegung der 100%-Bezugsklasse führt i.d.R. nicht zu einem mittleren Beitragssatz von 100%. Setzt man daher die Beitragssätze der einzelnen SF-Klassen direkt auf den mittleren Schadenbedarf an, ergibt dies eine Fehltarifierung. Dies wird vermieden, wenn die Beitragssätze auf den 100%-Beitrag (= mittlerer Schadenbedarf dividiert durch den mittleren SF-Index) angesetzt werden.

b) (12 Punkte) Berechnen Sie in derselben Situation die Beitragssätze, den mittleren SF-Index und den 100%-Beitrag, wenn die 100%-Bezugsklasse die Klasse 0 ist. Bitte die folgenden Fragen nur qualitativ beantworten: Welche Änderungen stellen Sie fest? Was bleibt unverändert? Gibt es Auswirkungen auf die Bestimmung der Schadenbedarfe der einzelnen SF-Klassen aus dem 100%-Beitrag mittels der Beitragssätze? Worauf ist also zu achten, wenn zwei Staffeln von Beitragssätzen zu vergleichen sind?

Es ergibt sich:

SF-Klasse	**Bestand**	**Schadenbedarf**	**SF-Index**	**100%-Beitrag**	**Beitragssatz**
0	**1.000**	**800**	**---**	**---**	**100**
1	**4.000**	**400**	**---**	**---**	**50**
2	**5.000**	**160**	**---**	**---**	**20**
3	**10.000**	**120**	**---**	**---**	**15**
Gesamt	**20.000**	**220**	**27,5%**	**800**	**---**

- Der mittlere SF-Index sinkt, folglich steigt der 100%-Beitrag.
- Unverändert bleiben die Relativitäten zwischen den SF-Klassen und das Ergebnis der Bestimmung der Schadenbedarfe einzelner SF-Klassen aus dem 100%-Beitrag mittels der Beitragssätze.

- Ein Vergleich nur der Beitragssätze reicht nicht aus, da ein beispielsweise niedrigerer Beitragssatz für dieselbe SF-Klasse aufgrund eines höheren 100%-Beitrages nicht zwingend zu einem niedrigeren Beitrag führt. Daher ist ein Vergleich der absoluten Beiträge notwendig.

c) (6 Punkte) Gegeben sei folgende Rückstufungsregel zur Tabelle in 1.1 a): Befindet sich ein Risiko in SF 3 und verursacht einen Schaden, erfolgt eine Rückstufung in SF 1.
Berechnen Sie, bis zu welcher Höhe (ausgedrückt in Prozent des 100%-Beitrages) es für den Versicherungsnehmer günstiger ist, einen Schaden selbst zu tragen als diesen von der Versicherung bezahlen zu lassen und die Mehrprämie in der Folgezeit aufgrund der Rückstufung zu entrichten.

Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass in der Folgezeit sich kein weiterer Schaden ereignet (für ein schadenfreies Jahr wird um eine Klasse aufgerückt bzw. bleibt der Versicherungsnehmer in der höchsten Klasse) und von Änderungen bzgl. Preis sowie der Berücksichtigung von Zinsen und Inflation abstrahiert wird.

Die Beitragssätze geben die Prämie in Prozent des 100%-Beitrages wider. Daher ist hier die durch die Rückstufung verursachte Mehrprämie als Summe der Differenzen zwischen dem Beitragssatz der jeweiligen SF-Klasse und dem Beitragssatz der Ausgangsklasse (da die höchste Klasse) darstellbar. Dabei ist solange zu summieren bis aufgrund der angenommenen Schadenfreiheit in der Folgezeit wieder die Ausgangsklasse erreicht ist. Damit erhält man:

Mehrbeitrag in Prozent des 100%-Beitrages = (100 – 30) + (40 – 30) = 80%

<u>Aufgabe 1.2 (Auswahl der Tarifmerkmale)</u>

a) (14 Punkte) Ziel der Auswahl von Tarifmerkmalen ist es, nur hinreichend signifikante Merkmale ins Risiko- bzw. Tarifmodell aufzunehmen.
Hierfür wird im Fall der klassischen linearen Regression ein F-Test durchgeführt.
In folgender Situation einer solchen linearen Regression sei das Ausgangsmodell gegeben durch:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 \; mit \; Y' = (1, 3, 8, 9, 4, 8, 9) \; und \; X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dabei gehören die Spalten der Matrix X zu den jeweiligen Elementen des Parametervektors, also die erste Spalte zu β_0 usw. und repräsentieren jeweils eine erklärende Variable (Konstante, X_1 etc.).

Für die Bestimmung eines Schätzers für den Parametervektor, der die Summe der Abweichungsquadrate minimiert, benötigt man:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{216}\begin{bmatrix} 36 & 0 & -12 \\ 0 & 54 & 0 \\ -12 & 0 & 28 \end{bmatrix}$$

$$=> X'Y = \begin{bmatrix} 42 \\ -3 \\ 39 \end{bmatrix}, b = (X'X)^{-1}X'Y = \frac{1}{216}\begin{bmatrix} 1044 \\ -162 \\ 588 \end{bmatrix}, b'X'Y = 311{,}42 \; und \; Y'Y = 316$$

Hierbei ist b der Schätzer für den Parametervektor β.
Damit erhält man für die Summe der Abweichungsquadrate:

$$SoS(b) = Y'Y - b'X'Y = 316 - 311{,}42 = 4{,}58$$

Stellen Sie für die Hypothese, dass das zweite Merkmal nicht signifikant ist, also $\beta_2 = 0$ einen Test auf.
Wie verhält sich hierfür die Summe der Abweichungsquadrate im Vergleich zur bisherigen und aus welchem Grund? Wieviele Freiheitsgrade haben die Summen der Abweichungsquadrate und die Differenz der beiden Summen der Abweichungsquadrate? Wie ist das Testergebnis?

Hinweise: - Das benötigte Quantil der F-Verteilung ist F(q;n-p;0,95) = 7,71
- Sofern invertierbar ist das Inverse der Matrix $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Die Hypothese führt zu folgendem neuen Modell:

$$\boldsymbol{E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 \; mit \; Y' = (1,3,8,9,4,8,9) \; und \; Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

Damit ergibt sich:

$$\boldsymbol{(Z'Z)^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{=> Z'Y = \begin{bmatrix} 42 \\ -3 \end{bmatrix}, a = (Z'Z)^{-1}Z'Y = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 168 \\ -21 \end{bmatrix}, a'Z'Y = 254{,}25 \; und \; Y'Y = 316}$$

Dabei ist a der Schätzer für den Parametervektor im neuen Modell.

Somit erhält man für die Summe der Abweichungsquadrate:

$$\boldsymbol{SoS(a) = Y'Y - a'Z'Y = 316 - 254{,}25 = 61{,}75}$$

Diese ist also immer größer, da im neuen Modell weniger Parameter involviert sind und folglich die Abweichung systematisch höher ist.
Weiter ist n = 7 (Anzahl Beobachtungen), p = 3 (Anzahl Parameter im Ausgangsmodell), n-p = 4, q = 1 (Anzahl der Bedingungen aus der Hypothese an die Parameter). Somit hat SoS(b) n-p = 4 Freiheitsgrade, SoS(a) n-(p-q) = 5 Freiheitsgrade und also die Differenz SoS(a) – SoS(b)
n-(p-q)-(n-p) = q = 1 Freiheitsgrad.

Damit folgt für die F-Testgröße F(q;n-p):

$$\frac{\frac{\boldsymbol{SoS(a) - SoS(b)}}{\boldsymbol{q}}}{\frac{\boldsymbol{SoS(b)}}{\boldsymbol{n-p}}} = \frac{\mathbf{61{,}75 - 4{,}58}}{\mathbf{4{,}58/4}} = \mathbf{49{,}93}$$

(gerundet auf 2 Nachkommastellen)

Das Quantil von F(q;n-p;0,95) ist hier: F(1;4;0,95) = 7,71

Die Hypothese, dass das zweite Merkmal nicht signifikant ist, wird also abgelehnt.

b) (8 Punkte) Die R^2-Statistik ist gegeben durch:

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2}{\sum(Y_i - \overline{Y})^2}$$

Dabei sind die Y_i die beobachteten Werte, die $\hat{Y}_i$ die Werte, die sich aus der Regressionsgleichung unter Verwendung der Zeilen der Matrix X und des Parametervektors b ergeben und $\overline{Y}$ der für beide gleiche Mittelwert.
Berechnen Sie für das Ausgangsmodell die R^2-Statistik und erläutern Sie deren Bedeutung.

Mit dem Parametervektor b lautet das Ausgangsmodell:

$$\boldsymbol{E(Y)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{216}}(\mathbf{1044} - \mathbf{162}\boldsymbol{X_1} + \mathbf{588}\boldsymbol{X_2})$$

Damit ergeben sich folgende Werte aus der Regressionsgleichung (gerundet auf 2 Nachkommastellen):

i	1	2	3	4	5	6	7
Regr.wert	1,36	2,86	6,81	8,31	4,83	7,56	10,28

Beispielhaft berechnet sich der erste Wert aus der Regression zu

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{216}}(\mathbf{1044} - \mathbf{162} - \mathbf{588}) = \mathbf{1{,}36}$$

Der Mittelwert ist 6.
Damit ergibt sich die R^2-Statistik zu: 59,50/64 = 92,97% (wie oben gerundet)

Die R^2-Statistik beschreibt den Anteil der Varianz in den Beobachtungen, der durch die Regression erklärt wird, d.h. je größer die R^2-Statistik desto besser werden die Beobachtungen durch die Regression abgebildet.

Spezialwissen-Klausur 2012, Aufgabe 2: Schadenreservierung (50 Punkte)

Sei C_{ik}, $1 \le i, k \le n$, der Schadenstand von Anfalljahr i nach k Abwicklungsjahren und $S_{ik} = C_{ik} - C_{i,k-1}$ der Zuwachs. Die Realisierungen für $i+k \le n+1$ seien bekannt. Benutzen Sie diese Bezeichnungen bei der Beantwortung der nachfolgenden Aufgaben. Jede sonstige, in der Aufgabenstellung nicht vorkommende Bezeichnung muss definiert/erklärt werden.

<u>2.1.a.</u> In welchem Sinne ist E(R) der beste Prognosewert für die nächste Realisierung einer Zufallsvariablen R? (3 Punkte)

<u>2.1.b.</u> Nennen Sie je eine Voraussetzung, unter der die individuellen Abwicklungsfaktoren $F_{ik} = C_{ik}/C_{i,k-1}$ und $F_{i,k+1} = C_{i,k+1}/C_{ik}$ bei gegebenem $C_{i,k-1}$ unkorreliert bzw. negativ korreliert sind. (5 Punkte)

<u>2.2</u> Im Zuwachsquoten-Modell gelten bekanntlich folgende Annahmen:

i) Alle Zuwächse S_{ik} sind unabhängig.

ii) $E(S_{ik}) = v_i\, m_k$ mit bekannten $v_i > 0$ und unbekannten m_k.

iii) $Var(S_{ik}) = v_i\, s_k^2$.

Zusätzlich wird in dieser Aufgabe 2.2 angenommen, dass die s_k^2 bekannt sind.

Die Parameter m_k werden wie üblich mittels $\hat{m}_k = S_{(k)} / v_{(k)}$ geschätzt, wobei

$$S_{(k)} := \sum_{i=1}^{n+1-k} S_{ik} \quad \text{und} \quad v_{(k)} := \sum_{i=1}^{n+1-k} v_i \,.$$

Damit gilt $Var(\hat{m}_k) = s_k^2 / v_{(k)}$, was Sie im Folgenden verwenden können.

<u>2.2.a.</u> Berechnen Sie $Cov(S_{ik}, \hat{m}_k)$ für $i \le n+1-k$. (4 Punkte)

<u>2.2.b.</u> Im Folgenden betrachten wir die Residuen

$$\hat{r}_{ik} := \frac{S_{ik} - v_i \hat{m}_k}{\sqrt{v_i}\, s_k} \,.$$ Berechnen Sie $Var(\hat{r}_{ik})$. (4 Punkte)

<u>2.2.c.</u> Welches Problem ergibt sich aus 2.2.b für den Plot aller Residuen $\hat{r}_{ik}$ gegen die Anfall- oder Kalenderjahre, und wie sollte man das Problem beseitigen? (3 Punkte)

<u>2.2.d.</u> Wieso sollte man die beiden Plots von 2.2.c anschauen? (3 Punkte)

<u>2.2.e.</u> Berechnen Sie $Cov(\hat{r}_{1k}, \hat{r}_{2k})$ und beantworten Sie damit die Frage, ob die Residuen des Abwicklungsjahres k positiv oder negativ oder gar nicht korreliert sind. (5 Punkte)

<u>2.2.f.</u> Welche Konsequenz ergibt sich aus 2.2.e für die Durchführbarkeit eines (nicht-parametrischen) Residuen-Bootstrap zur Ermittlung des Schätzfehlers des Reserveschätzers? (3 Punkte)

(Fortsetzung nächste Seite)

2.3.a. Beschreiben Sie mit Worten oder mit einer Formel, wieso eine getrennte Anwendung der Chain-Ladder-Methode (mit den üblichen Schätzern) einerseits auf die Zahlungen $\{C_{ik}\}$ und andererseits auf die angefallenen Schäden $\{D_{ik}\}$ in der Regel zu nicht übereinstimmenden Endstandsschätzern $\hat{C}_{in} \neq \hat{D}_{in}$ führt, auch wenn für die Abwicklung des ältesten Anfalljahrs $C_{1n} = D_{1n}$ gilt. (5 Punkte)

2.3.b. Klären Sie durch Rechnung, ob die Modellannahme

$E\left(\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}} \middle| A_{i,k-1}\right) = a_k^C + b_k^C \frac{D_{i,k-1}}{C_{i,k-1}}$ der Munich-Chain-Ladder auch die Erwartungswert-Annahme des gewöhnlichen Chain-Ladder-Modells für die kumulierten Daten $\{C_{ik}\}$ erfüllt. Definieren Sie zuvor, wofür die Bezeichnung $A_{i,k-1}$ steht. (6 Punkte)

2.4.a. Passt es zum Bornhuetter/Ferguson-Modell, einen vom Pricing stammenden Schätzer $\hat{U}_i$ für die Reserve-Prognose $\hat{R}_i = \hat{U}_i(1 - \hat{z}_{n+1-i})$ beizubehalten, auch wenn der aktuelle Zahlungs-Schadenstand $C_{i,n+1-i}$ inzwischen deutlich größer als $\hat{U}_i$ ist (und Rückgänge nicht möglich sind)? Begründen Sie Ihre Antwort. (4 Punkte)

2.4.b. Sie haben die Schadenreserve mit dem Zuwachsquotenverfahren mit Tailquote $\hat{m}_{n+1}$ prognostiziert gemäß $\hat{R}_i^{ZQT} = v_i(\hat{m}_{n+2-i} + ... + \hat{m}_n + \hat{m}_{n+1})$ mit $\hat{m}_k$, $1 \le k \le n$, wie in Aufgabe 2.2 sowie mit bekannten v_i und $\hat{m}_{n+1}$. Geben Sie Schätzer $\hat{U}_i$ und $\hat{z}_k$ an, so dass damit die Bornhuetter/Ferguson-Reserve-Prognose $\hat{R}_i^{BF} = \hat{U}_i(1 - \hat{z}_{n+1-i})$ den gleichen Wert annimmt wie $\hat{R}_i^{ZQT}$ für alle i = 1, …, n. (5 Punkte)

ENDE von Aufgabe 2

Lösung:

2.1.a. Der Erwartungswert E(R) minimiert den mittleren quadratischen Fehler $E(R - t)^2$ aller möglichen Prognosewerte t und ist in diesem Sinne der beste Prognosewert.

2.1.b. Unter der CL-Modellannahme $E(F_{ik} \mid C_{i1}, \ldots, C_{i,k-1}) = f_k$ sind F_{ik}, $F_{i,k+1}$ unkorreliert. Dagegen sind F_{ik}, $F_{i,k+1}$ negativ korreliert unter der ZQ-Modellannahme, dass die Zuwächse $S_{i1}, \ldots, S_{in}$ unabhängig sind.

2.2.a. $\operatorname{Cov}(S_{ik}, \hat{m}_k) = \operatorname{Cov}\left(S_{ik}, \frac{S_{(k)}}{v_{(k)}}\right) = \frac{1}{v_{(k)}} \operatorname{Cov}(S_{ik}, S_{1k} + ... + S_{n+1-k,k}) = \frac{\operatorname{Var}(S_{ik})}{v_{(k)}} = \frac{v_i s_k^2}{v_{(k)}}$.

$$\underline{2.2.b.}\ \mathrm{Var}(\hat{r}_{ik}) = \frac{\mathrm{Var}(S_{ik} - v_i\,\hat{m}_k)}{v_i\,s_k^{\;2}} = \frac{1}{v_i\,s_k^{\;2}}\Big(\mathrm{Var}(S_{ik}) - 2v_i\mathrm{Cov}(S_{ik},\hat{m}_k) + v_i^{\;2}\mathrm{Var}(\hat{m}_k)\Big) =$$

$$= \frac{v_i s_k^{\;2} - 2v_i^{\;2}s_k^{\;2}/v_{(k)} + v_i^{\;2}s_k^{\;2}/v_{(k)}}{v_i s_k^{\;2}} = 1 - \frac{v_i}{v_{(k)}}\ .$$

2.2.c. Gemäß 2.2.b haben die Residuen $\hat{r}_{ik}$ des Abwicklungsdreiecks unterschiedliche Varianzen, die insbesondere in den späten Abwicklungsjahren deutlich kleiner als 1 sind. Für einen aussagefähigen Plot aller Residuen müssen diese daher so korrigiert werden, dass ihre Varianz = 1 wird. Das wird durch die Korrektur $\hat{\hat{r}}_{ik} = \hat{r}_{ik}\Big/\sqrt{1 - v_i / v_{(k)}}$ erreicht.

2.2.d. Aus einem Plot der Residuen gegen die Anfalljahre kann man etwaige Einflüsse des Anfalljahrs erkennen, wie z. B. eine gravierende Änderung der Portefeuillezusammensetzung oder der Policenbedingungen sowie einen erheblichen Wettbewerbseinfluss auf die Prämie als Volumenmaß v_i.

Im Plot gegen die Kalenderjahre zeigen sich evt. Kalenderjahr-bedingte Einflüsse auf die Schadenabwicklung wie Inflation oder Änderungen bei der Schadenregulierung, der Einzelfallreservierung oder der Rechtsprechung.

Sind solche Einflüsse erkennbar, sollten die betroffenen Daten bei der Parameter-Schätzung ignoriert (oder ihr Einfluss reduziert) werden.

$$\underline{2.2.e.}\ \mathrm{Cov}(\hat{r}_{1k},\hat{r}_{2k}) = \frac{1}{\sqrt{v_1 v_2 s_k^{\;2}}}\mathrm{Cov}(S_{1k} - v_1\hat{m}_k, S_{2k} - v_2\hat{m}_k)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{v_1 v_2 s_k^{\;2}}}\big(0 - v_2\mathrm{Cov}(S_{1k},\hat{m}_k) - v_1\mathrm{Cov}(S_{2k},\hat{m}_k) + v_1 v_2\mathrm{Var}(\hat{m}_k)\big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{v_1 v_2 s_k^{\;2}}}\left(-\frac{v_1 v_2}{v_{(k)}}s_k^{\;2} - \frac{v_1 v_2}{v_{(k)}}s_k^{\;2} + \frac{v_1 v_2}{v_{(k)}}s_k^{\;2}\right) = -\frac{\sqrt{v_1 v_2}}{v_{(k)}}\ .$$

Die Residuen eines Abwicklungsjahres sind also negativ korreliert.

2.2.f. Wegen 2.2.e ist ein Residuen-Bootstrap zu Ermittlung des Schätzfehlers nicht sinnvoll durchführbar, da die Residuen dafür unabhängig oder zumindest unkorreliert sein sollten. (Die Korrelation ist hier besonders in den späten Abwicklungsjahren k erheblich, denn z. B. bei lauter gleichen Volumina $v_i = v$ ergibt sich als Korrelationskoeffizient $-1/(n-k)$. In der Praxis kommt noch das Problem hinzu, dass auch die s_k^2 geschätzt werden müssen.)

2.3.a. Bei getrennter Anwendung der Chain-Ladder-Methode bleibt der Paid-to-Incurred-Stand $\hat{C}_{ik} / \hat{D}_{ik}$ für alle $k > n+1-i$ im gleichen Ausmaß unter- oder überdurchschnittlich, wie es der aktuelle Stand $C_{i,n+1-i}/D_{i,n+1-i}$ ist, und bleibt daher auch im Endstand unter- oder überdurchschnittlich, so dass sich keine Gleichheit $\hat{C}_{in} = \hat{D}_{in}$ ergibt. Als Formel:

$$\frac{\hat{C}_{in} / \hat{D}_{in}}{\sum_{j=1}^{n} \hat{C}_{jn} \Big/ \sum_{j=1}^{n} \hat{D}_{jn}} = \frac{C_{i,n+1-i} / D_{i,n+1-i}}{\sum_{j=1}^{n} \hat{C}_{j,n+1-i} \Big/ \sum_{j=1}^{n} \hat{D}_{j,n+1-i}} \;.$$

2.3.b. $A_{i,k-1} := A^C_{i,k-1} \cup A^D_{i,k-1}$ mit $A^C_{i,k-1} := \{C_{i1}, \ldots, C_{i,k-1}\}$, $A^D_{i,k-1} := \{D_{i1}, \ldots, D_{i,k-1}\}$. Ein Unterschied zwischen MCL und CL besteht darin, dass MCL auf $A_{i,k-1}$ bedingt, CL dagegen nur auf $A^C_{i,k-1}$ bzw. $A^D_{i,k-1}$. Aus der MCL-Modellannahme

$$E\left(\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}} \middle| A_{i,k-1}\right) = a^C_k + b^C_k \frac{D_{i,k-1}}{C_{i,k-1}}$$

folgt, wenn nur auf $A^C_{i,k-1}$ bedingt wird, wegen der Iterativität des Erwartungswerts

$$E\left(\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}} \middle| A^C_{i,k-1}\right) = E\left(E\left(\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}} \middle| A_{i,k-1}\right) \middle| A^C_{i,k-1}\right) = E\left(a^C_k + b^C_k \frac{D_{i,k-1}}{C_{i,k-1}} \middle| A^C_{i,k-1}\right) = a^C_k + b^C_k E\left(\frac{D_{i,k-1}}{C_{i,k-1}} \middle| A^C_{i,k-1}\right)$$

und der letzte Erwartungswert ist im allgemeinen nicht konstant, so dass die CL-Modellannahme $E\left(\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}} \middle| A^C_{i,k-1}\right) = f_k$ nicht erfüllt ist.

2.4.a. Gemäß dem BF-Modell ist $\hat{U}_i$ ein Schätzer für den erwarteten (unbedingten!) Endstand $E(U_i)$. Der wahre Endstand U_i wird also – wie immer – über oder unter seinem Erwartungswert liegen. In den Fällen, wo er deutlich größer als sein Erwartungswert ausfällt, kann natürlich auch schon zu einem früheren Abwicklungszeitpunkt der (Zwischen-)Stand $C_{i,n+1-i} > E(U_i)$ sein, ohne dass deswegen der Erwartungswertschätzer $\hat{U}_i$ untauglich würde. Daher passt es zum BF-Modell, $\hat{U}_i$ beizubehalten.

2.4.b. Wählt man $\hat{U}_i = v_i \, \hat{m}_+$ mit $\hat{m}_+ := \hat{m}_1 + \ldots + \hat{m}_{n+1}$, dann ergibt sich aus $\hat{R}^{BF}_i = \hat{R}^{ZQT}_i$ die weitere Bedingung $\hat{z}_{n+1-i} = 1 - \frac{\hat{m}_{n+2-i} + \ldots + \hat{m}_{n+1}}{\hat{m}_+} = \frac{\hat{m}_1 + \ldots + \hat{m}_{n+1-i}}{\hat{m}_+}$, also $\hat{z}_k = \frac{\hat{m}_1 + \ldots + \hat{m}_k}{\hat{m}_+}$

(und das ist zugleich auch das BF-Standard-Pattern $\hat{y}_k = S_{(k)} / \hat{U}_{(k)} = \hat{m}_k / \hat{m}_+$).

Klausur Spezialwissen Schaden 2012

Aufgabe 3 (Risikoteilung, 50 Punkte)

Aufgabe 3.1: (15 Punkte)

Bei einer Quote sei ein Gewinnanteil von 50% vereinbart, wobei als Verwaltungskostensatz des Rückversicherers 5% angesetzt werden. Es gebe einen Verlustvortrag, der auf drei Jahre begrenzt ist. Nach sechs Jahren hat man folgenden Verlauf:

Vertragsjahr (VJ)	RV-Prämie	Provision	Schadenquote
1	200.000	20%	90%
2	200.000	15%	95%
3	220.000	10%	70%
4	220.000	10%	80%
5	240.000	15%	85%
6	240.000	10%	70%

Berechnen Sie die Gewinnanteile der sechs Vertragsjahre.

Aufgabe 3.2: (20 Punkte)

Ein Erstversicherer (EV) zeichnet folgende Beteiligung an einem gelayerten Programm für ein Risiko:

Layer Nr. i	Haftung c_i (für 100%)	Priorität d_i (für 100%)	Anteil σ_i des EV	Prämie p_i für den Anteil des EV
1	20.000	0	40%	200
2	20.000	20.000	50%	50
3	40.000	40.000	10%	5

Wir betrachten nun einen XL pro Risiko 15.000 xs 5.000, in den der EV das Risiko einbringt.

1. Bestimmen Sie die Haftungsabschnitte, die der Rückversicherungslayer am Originalrisiko deckt.
2. Führen Sie eine Zuschlagsquotierung für den XL durch. Verwenden Sie hierbei eine Schadenquote von 60% und einen Zuschlagssatz von 20%.

Aufgabe 3.3: (15 Punkte)

Gegeben sei ein Schadenexzedent C xs D. Es bezeichne $\pi_{m,x}$ die *Basisprämie bei m Wiederauffüllungen zu $x \cdot 100\%$ pra*, d.h. $\pi_{m,x}$ ist die Upfront-Prämie bei der die erwartete Prämie (inklusive Wiederauffüllungsprämie) mit der erwarteten Schadenlast im XL übereinstimmt.

1. Zeigen Sie dass $\pi_{m,x} = \dfrac{\pi_{m,0}}{1 + x/C \cdot \pi_{m-1,0}}$ gilt.
2. Leiten Sie eine analoge Formel für die Basisprämie $\pi^k_{m,x}$ bei m Wiederauffüllungen zu $x \cdot 100\%$ pra und einem AAD von $k \cdot C$ her. Auf der rechten Seite sollten hierbei nur Basisprämien mit freien Wiederauffüllungen und ohne AAD vorkommen.

Klausur Spezialwissen Schaden 2012

Lösung zu Aufgabe 3 (Risikoteilung)

Zu 3.1:

Vertragsjahr 1:
Gewinn $= 200.000 \cdot (100\% - 90\% - 20\% - 5\%) = -30.000$
$\Rightarrow$ kein Gewinnanteil

	aus VJ 1
Verlustvortrag ins VJ 2	30.000

Vertragsjahr 2:
Gewinn $= 200.000 \cdot (100\% - 95\% - 15\% - 5\%) = -30.000$
$\Rightarrow$ kein Gewinnanteil

	aus VJ 1	aus VJ 2
Verlustvortrag ins VJ 3	30.000	30.000

Vertragsjahr 3:
Gewinn $= 220.000 \cdot (100\% - 70\% - 10\% - 5\%) = 33.000$
$\Rightarrow$ vollständige Tilgung des Verlustvortrags aus VJ 1,
die verbleibenden 3.000 werden zur Tilgung des Verlustvortrags aus VJ 2 verwendet,
kein Gewinnanteil

	aus VJ 1	aus VJ 2	aus VJ 3
Verlustvortrag ins VJ 4	0	27.000	0

Vertragsjahr 4:
Gewinn $= 220.000 \cdot (100\% - 80\% - 10\% - 5\%) = 11.000$
$\Rightarrow$ die 11.000 werden zur Tilgung des Verlustvortrags aus VJ 2 verwendet,
kein Gewinnanteil

	aus VJ 2	aus VJ 3	aus VJ 4
Verlustvortrag ins VJ 5	16.000	0	0

Vertragsjahr 5:
Gewinn $= 240.000 \cdot (100\% - 85\% - 15\% - 5\%) = -12.000$
$\Rightarrow$ kein Gewinnanteil,
der Verlust aus VJ 2 wird nicht weiter vorgetragen

	aus VJ 3	aus VJ 4	aus VJ 5
Verlustvortrag ins VJ 6	0	0	12.000

Vertragsjahr 6:
Gewinn $= 240.000 \cdot (100\% - 70\% - 10\% - 5\%) = 36.000$
$\Rightarrow$ 12.000 werden zur Tilgung des Verlustvortrages aus VJ 5 verwendet,
auf die verbleibenden 24.000 wird ein Gewinnanteil von 12.000 bezahlt

Zu 3.2:

Zu 1: Es sei $C := 15.000$ und $D := 5.000$. Im ersten Schritt berechnen wir den Haftungsabschnitt c_i^{RV} xs d_i^{RV}, den der Rückversicherungslayer C xs D am Originallayer c_i xs d_i deckt. Hierzu berechnen wir zuerst die kumulierte Haftung der ersten i Originallayer

$$h_i := \sum_{\nu=1}^{i} \sigma_\nu c_\nu.$$

Falls $D \geq h_i$ oder $C + D \leq h_{i-1}$, so setzen wir $c_i^{\mathrm{RV}} := 0$ und $d_i^{\mathrm{RV}} := 0$. Ansonsten ist

$$c_i^{\mathrm{RV}} = \frac{[\min(C+D, h_i) - \max(D, h_{i-1})]^+}{\sigma_i} \quad \text{und} \quad d_i^{\mathrm{RV}} = d_i + \frac{[D - h_{i-1}]^+}{\sigma_i}.$$

Mit diesen Formeln erhalten wir

Layer Nr. i	Kumulierte Haftung h_i des EV	Haftung c_i^{RV} des RV	Haftung d_i^{RV} des RV
1	8.000	7.500	12.500
2	18.000	20.000	20.000
3	22.000	20.000	40.000

Zu 2: Sei $\zeta := \log_2(1+20\%) \approx 0{,}263$. Der Anteil π_i des Rückversicherers am Schadenbedarf des i-ten Originallayers berechnet sich als

$$\pi_i = \frac{(c_i^{\mathrm{RV}} + d_i^{\mathrm{RV}})^\zeta - (d_i^{\mathrm{RV}})^\zeta}{(c_i + d_i)^\zeta - (d_i)^\zeta}.$$

Mit $s_i := 60\% \cdot p_i$ erhält man den erwarteten Schaden $\hat{s}_i$ des Rückversicherers aus dem dem i-ten Originallayer mittesl $\hat{s}_i = \pi_i \cdot s_i$.

Layer Nr. i	Schadenbedarf s_i des EV	Anteil π_i des RV am erw. Schaden	Erw. Schaden $\hat{s}_i$ des RV
1	120	11,63%	13,95
2	30	100,00%	30,00
3	3	56,27%	1,69
Summe			45,64

Die Zuschlagsquotierung liefert also einen Schadenbedarf von 45,64 für den RV-Layer.

Zu 3.3:

Zu 1: Es bezeichne $\hat{S}_m$ die Schadenlast im XL bei m Wiederauffüllungen. Dann gilt auf Grund der Definition der Basisprämie

$$\begin{aligned} E(\hat{S}_m) &= \pi_{m,0} \\ E(\hat{S}_m) &= E(\pi_{m,x} + x \cdot \min(m, \hat{S}_m/C) \cdot \pi_{m,x}) \\ &= \pi_{m,x} + x/C \cdot E(\min(mC, \hat{S}_m)) \cdot \pi_{m,x}. \end{aligned}$$

Mit $E(\min(mC, \hat{S}_m)) = \pi_{m-1,0}$ folgt

$$\pi_{m,0} = \pi_{m,x} + x/C \cdot \pi_{m-1,0} \cdot \pi_{m,x} = \pi_{m,x} \cdot (1 + x/C \cdot \pi_{m-1,0})$$

und hieraus die Behauptung.

Zu 2: Es bezeichne $\hat{S}_m^k$ die Schadenlast im XL bei m Wiederauffüllungen und einem AAD von $k \cdot C$. Wie in Teil 1 gilt dann

$$\begin{aligned} E(\hat{S}_m^k) &= \pi_{m,0}^k \\ E(\hat{S}_m^k) &= E(\pi_{m,x}^k + x \cdot \min(m, \hat{S}_m^k/C) \cdot \pi_{m,x}^k) \\ &= \pi_{m,x}^k + x/C \cdot E(\min(mC, \hat{S}_m^k)) \cdot \pi_{m,x}^k. \end{aligned}$$

Mit $E(\min(mC, \hat{S}_m^k)) = \pi_{m-1,0}^k$ folgt

$$\pi_{m,0}^k = \pi_{m,x}^k + x/C \cdot \pi_{m-1,0}^k \cdot \pi_{m,x}^k = \pi_{m,x}^k \cdot (1 + x/C \cdot \pi_{m-1,0}^k)$$

und somit

$$\pi_{m,x}^k = \frac{\pi_{m,0}^k}{1 + x/C \cdot \pi_{m-1,0}^k}.$$

Aus $\hat{S}_m^k = \hat{S}_{m+k} - \hat{S}_{k-1}$ erhalten wir durch Bildung der Erwartungswerte

$$\pi_{m,0}^k = \pi_{m+k,0} - \pi_{k-1,0}.$$

Einsetzen liefert

$$\pi_{m,x}^k = \frac{\pi_{m+k,0} - \pi_{k-1,0}}{1 + x/C \cdot (\pi_{m+k-1,0} - \pi_{k-1,0})}.$$

Klausur Spezialwissen Schaden 2012

Aufgabe 4 Modellierung: Parameterrisiko beim Zeichnungsrisiko (15 Punkte)

Bei der Modellierung des Zeichnungsrisikos auf Basis des kollektiven Modells werde angenommen, dass alle Schadenhöhen Y_i eine $Exp(\lambda)$-Verteilung (gleich $\Gamma(1, \lambda)$-Verteilung) mit demselben unbekannten Parameter $\lambda > 0$ besitzen, und dass die Y_i für gegebenes λ stochastisch unabhängig seien. Es liege weiterhin eine Stichprobe $\widehat{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}_+^n$ von $n \geq 2$ beobachteten voneinander unabhängigen Schadenhöhen vor.

4.1 Zeigen Sie, dass der Momenten-Methode-Schätzer für λ gegeben ist durch $\widehat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n y_i}$.

4.2 Zeigen Sie, dass die A-posteriori-Verteilung des Parameters unter Annahme eines gleichverteilten Priors auf einem hinreichend großen Bereich des Parameterraums näherungsweise durch eine $\Gamma(n+1, \sum_{i=1}^n y_i)$-Verteilung gegeben ist.

4.3 Zeigen Sie, dass die A-posteriori-Vorhersageverteilung der Schadenhöhe unter derselben Annahme wie in 4.2 näherungsweise eine Pareto-Typ II-Verteilung mit den Parametern $a = n + 1$ und $b = \sum_{i=1}^n y_i$ ist.

4.4 Untersuchen Sie, ob durch den Übergang von der Modellierung der Schadenhöhe ohne Berücksichtigung der Parameterunsicherheit unter Verwendung des Schätzers aus 4.1 hin zur Modellierung mit Einbeziehung der Parameterunsicherheit mittels der A-posteriori-Vorhersageverteilung aus 4.3 der Erwartungswert und/oder die Varianz der Schadenhöhenverteilung vergrößert werden.

Hinweis zu Aufgabe 4:
Nachfolgende Tabelle darf ohne Beweis verwendet werden:

Verteilung	Dichte	Erwartungswert	Varianz
$\Gamma(\alpha, \beta)$	$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$
Pareto-Typ II (a, b)	$g(x) = \frac{a}{b} \cdot (1 + \frac{x}{b})^{-(a+1)}$	$\frac{b}{a-1}$	$\frac{b^2 a}{(a-1)^2(a-2)}$

Klausur Spezialwissen Schaden 2012

Lösung zu Aufgabe 4 Modellierung: Parameterrisiko beim Zeichnungsrisiko

4.1 Die zu betrachtende Verteilungsfamilie für die Schadenhöhe Y_1 ist gegeben durch

$$\mathcal{P} = (P_\lambda^{Y_1})_{\lambda>0} = (Exp(\lambda))_{\lambda>0},$$

bzw. für $Y = (Y_1, ..., Y_n)$ mit $Y_1, ..., Y_n$ stochastisch unabhängig und identisch verteilt bei gegebenem λ durch

$$\widehat{\mathcal{P}} = (P_\lambda^{Y})_{\lambda>0} = (\bigotimes_{i=1}^{n} P_\lambda^{Y_i})_{\lambda>0} = (Exp(\lambda)^{(n)})_{\lambda>0}.$$

Zu lösen ist nun das Gleichungssystem

$$E_\lambda(Y_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Mit $Y_1 \sim Exp(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$ folgt (vgl. Hinweis) $E_\lambda(Y_1) = \frac{1}{\lambda}$. Zu lösen ist daher das GLS

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Dessen Lösung ist sofort ersichtlich gegeben durch $\widehat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} y_i}$.

4.2 Der Parameter λ werde als Realisierung einer Zufallsgröße Λ aufgefasst. Entsprechend kann die Verteilungsannahme formuliert werden als $Exp(\lambda) = P_\lambda^{Y_i} = P^{Y_i|\Lambda=\lambda}$ mit Dichte $f_\lambda^{Y_i} = f^{Y_i|\Lambda=\lambda}$.
Gemäß Skript gilt dann bei gegebener Stichprobe $\widehat{y} = (y_1, ..., y_n)$ als Realisierung von $Y = (Y_1, ..., Y_n)$ unter den gegebenen Annahmen die folgende Näherung für die Dichte der A-posteriori-Verteilung des Parameters:

$$g^{\Lambda|Y=\widehat{y}}(\lambda) \quad \approx \quad \frac{f^{Y|\Lambda=\lambda}(\widehat{y})}{\int_0^\infty f^{Y|\Lambda=s}(\widehat{y})\,ds}$$

Mit $f^{Y|\Lambda=\lambda} \sim P^{Y|\Lambda=\lambda} = P_\lambda^Y = Exp(\lambda)^{(n)}$ und $r := \sum_{i=1}^n y_i$ ergibt sich für den Zähler

$$f^{Y|\Lambda=\lambda}(\widehat{y}) = f_\lambda^Y(\widehat{y}) = \prod_{i=1}^{n} f_\lambda^{Y_i}(y_i) = \prod_{i=1}^{n} f_\lambda^{Y_1}(y_i) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda y_i} = \lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^n y_i} = \lambda^n e^{-\lambda r}$$

und für den Nenner

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f^{Y|\Lambda=s}(\widehat{y})\,ds &= \int_0^\infty \prod_{i=1}^{n} f_s^{Y_1}(y_i)\,ds = \int_0^\infty \prod_{i=1}^{n} se^{-sy_i}\,ds \\ &= \int_0^\infty s^n e^{-s\sum_{i=1}^n y_i}\,ds = \int_0^\infty s^n e^{-sr}\,ds.\end{aligned}$$

Durch „geschickte“ Ergänzung (analog zu den Übungsaufgaben) erhält man

$$\int_0^\infty s^n e^{-sr}\, ds = \frac{\Gamma(n+1)}{r^{n+1}} \cdot \int_0^\infty \frac{r^{n+1}}{\Gamma(n+1)} s^{n+1-1} e^{-rs}\, ds = \frac{\Gamma(n+1)}{r^{n+1}} \cdot 1$$

(da der Integralterm als Integral über die Dichte der $\Gamma(n+1, r)$-Verteilung 1 ergibt). Zusammengesetzt ergibt sich

$$g^{\Lambda|Y=\widehat{y}}(\lambda) \approx \frac{r^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \lambda^{n+1-1} e^{-r\lambda},$$

und damit

$$P^{\Lambda|Y=\widehat{y}} \approx \Gamma(n+1, r) = \Gamma(n+1, \sum_{i=1}^n y_i).$$

4.3 Die Stichprobe $\widehat{y}$ werde wie in 4.2 als Realisierung von $Y = (Y_1, ..., Y_n)$ angesehen. Die Dichte der A-posteriori-Vorhersageverteilung von Y_{n+1} besitzt denselben Täger $\mathbb{R}_+$ wie $P_\lambda^{Y_{n+1}} = P_\lambda^{Y_1}$. Für $x > 0$ ist damit die Dichte der A-posteriori-Vorhersageverteilung an der Stelle x gegeben durch

$${}_{\widehat{y}}f^{Y_{n+1}}(x) := f^{Y_{n+1}|Y=\widehat{y}}(x) = \int_0^\infty f^{Y_{n+1}|\Lambda=\lambda}(x) \cdot g^{\Lambda|Y=\widehat{y}}(\lambda)\, d\lambda.$$

Mit dem Ergebnis aus 4.2 und $r := \sum_{i=1}^n y_i$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
{}_{\widehat{y}}f^{Y_{n+1}}(x) &\approx \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \cdot \frac{r^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \lambda^{n+1-1} e^{-r\lambda}\, d\lambda \\
&= \frac{r^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty \lambda^{n+2-1} e^{-(r+x)\lambda}\, d\lambda \\
&= \frac{r^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+2)}{(r+x)^{n+2}} \cdot \int_0^\infty \frac{(r+x)^{n+2}}{\Gamma(n+2)} \lambda^{n+2-1} e^{-(r+x)\lambda}\, d\lambda \\
&= \frac{r^{n+1}}{(r+x)^{n+2}} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot 1 \\
&= \frac{n+1}{r} \cdot \left(\frac{r}{r+x}\right)^{n+2} \\
&= \frac{n+1}{r} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{r}x}\right)^{n+2} \\
&= \frac{n+1}{r} \cdot \left(1 + \frac{1}{r}x\right)^{-(n+1+1)}.
\end{aligned}$$

Dies entspricht gemäß Hinweis der Dichte einer Pareto-Typ II-Verteilung mit Parametern $a = n+1$ und $b = r = \sum_{i=1}^n y_i$.

4.4 Bei der Modellierung der Schadenhöhe ohne PU unter Verwendung des MMS aus 4.1 wird eine $Exp(\widehat{\lambda}) = \Gamma(1, \widehat{\lambda})$-Verteilung mit $\widehat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n y_i}$ angesetzt. Gemäß Hinweis gilt daher

$$\begin{aligned} E_{\widehat{\lambda}} Y_1 &= \frac{1}{\widehat{\lambda}} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}, \\ Var_{\widehat{\lambda}} Y_1 &= \frac{1}{\widehat{\lambda}^2} = \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Bei der Modellierung mit der Schadenhöhe mit PU unter Verwendung der approximativ ermittelten A-posteriori-Verteilung aus 4.3, also einer Pareto-Typ II-Verteilung, ergibt sich gemäß Hinweis mit $a = n + 1$ und $b = \sum_{i=1}^n y_i$

$$_{\widehat{y}}EY_1 = \frac{b}{a-1} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = E_{\widehat{\lambda}} Y_1$$

und

$$_{\widehat{y}}VarY_1 = \frac{b^2 a}{(a-1)^2(a-2)} = \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2 \cdot (n+1)}{n^2(n-1)} = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n^2} > \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n^2},$$

d.h.

$$_{\widehat{y}}VarY_1 > Var_{\widehat{\lambda}} Y_1.$$

Der Erwartungswert der Schadenhöhe bleibt folglich unverändert, die Varianz vergrößert sich, wenn man zur Modellierung mit PU übergeht.

Aufgabe 5 - Modellierung B

Im folgenden betrachten wir ein Versicherungsunternehmen, welches ausschließlich Geschäft in einer Sparte betreibt (sog. Monoliner). Das Abwicklungsdreieck der kumulierten Zahlungen für angefallene, aber noch nicht abgewickelte Schadenfälle umfasst die Anfalljahre 2009 - 2011 und besitzt zum Stichtag 31.12.2011 die Gestalt:

Anfalljahr / Abwj	1	2	3
2009	5	10	16
2010	10	15	
2011	15		

Von den Reservierungsaktuaren wurden zum Stichtag 31.12.2011 bereits folgende Best-Estimates $\hat{R}_i^{(2011)}$ der nominalen Bedarfsreserven für die Anfalljahre $i \in \{2009, 2010, 2011\}$ ermittelt:

Anfalljahr i	$\hat{R}_i^{(2011)}$
2009	0
2010	9
2011	25

Die Quantifizierung des (ultimativen / einjährigen) Reserverisikos des Unternehmens soll mithilfe des internen Simulationsmodells vorgenommen werden, wobei sich der Begriff Risiko in diesem Kontext durchgehend auf den Eintritt eines aus Unternehmenssicht negativen Ereignisses bezieht!

5.1 Ultimatives Reserverisiko (8 Punkte)

Aus dem internen Modell liegen die folgenden 5 Simulationspfade der *ultimativen Schadenaufwände* U_i für die Anfalljahre 2009 - 2011 vor:

Simulation M	${}^{(M)}U_i$ per Anfalljahr i		
	2009	2010	2011
1	16	21	48
2	16	25	42
3	16	23	33
4	16	27	39
5	16	24	38

5.1.1 Was versteht man allgemein unter dem *„ultimativen Reserverisiko“* ? (2)

5.1.2 Schätzen Sie aus den vorliegenden Simulationsergebnissen das ultimative Reserverisiko des Unternehmens als Value at Risk zum Niveau 75%! (6)

5.2 Einjähriges Reserverisiko (7 Punkte)

Zur Messung des einjährigen Reserverisikos wurde ein stochastisches Re-Reserving im internen Modell durchgeführt - im Ergebnis liegen die folgenden 5 Simulationspfade der *neugeschätzten Ultimates* $\hat{U}_i^{(2012)}$ *am Ende des Kalenderjahres 2012* vor:

Simulation M	${}^{(M)}U_i^{(2012)}$ per Anfalljahr i		
	2009	2010	2011
1	16	21	45
2	16	25	39
3	16	23	36
4	16	27	41
5	16	24	39

5.2.1 Definieren Sie das einjährige ökonomische Abwicklungsergebnis (Hinweis: Analog zum Skript kann Diskontierung vernachlässigt werden!)! (2)

5.2.2 Berechnen Sie aus den vorliegenden Simulationen die Verteilung des (nominalen) ökonomischen Abwicklungsergebnisses im Kalenderjahr 2012 und schätzen Sie davon ausgehend das einjährige Reserverisiko als Value at Risk zum Niveau 75%! (5)

Lösungen

5.1 Ultimatives Reserverisiko

5.1.1 Das ultimative Reserverisiko lässt sich gemäß Skript definieren als Risiko einer Abweichung des endgültigen Schadenaufwands für bereits angefallene Schäden vom geschätzten Erwartungswert (d.h. das Risiko, dass die Best Estimate Rückstellung nicht ausreicht, um sämtliche Verpflichtungen aus angefallenen Schäden zu erfüllen.).

5.1.2 Der Ultimateschätzer $\hat{U}_i^{(2011)}$ eines Anfalljahres ermittelt sich als Summe von Best-Estimate $\hat{R}_i^{(2011)}$ und dem jeweiligen Diagonalstand des Schadenzahlungsdreiecks:

Anfalljahr i	$\hat{U}_i^{(2011)}$
2009	16
2010	24
2011	40

Die für das ultimative Reserverisiko maßgebliche Verlustgröße ist die Differenz Δ_i zwischen dem tatsächlichen Ultimate U_i und dem zum Stichtag 31.12.2011 geschätzten Ultimate $\hat{U}_i^{(2011)}$. Zur Berechnung der Verteilung dieser Verlustgröße werden die Differenzen Δ_i pro Einzelsimulation und Anfalljahr ermittelt und anschließend zum Gesamtverlust Δ durch Addition der Δ_i über alle Anfalljahre aggregiert:

Simulation M	${}^{(M)}\Delta_i := {}^{(M)}U_i - \hat{U}_i^{(2011)}$ per Anfalljahr i		
	2009	2010	2011
1	0	-3	8
2	0	1	2
3	0	-1	-7
4	0	3	-1
5	0	0	-2

${}^{(M)}\Delta := \sum_i {}^{(M)}\Delta_i$
5
3
-8
2
-2

Allgemein ist der Schätzer für den Value at Risk zum Niveau α der $\lfloor(1-\alpha)n+1\rfloor$-größte Verlust einer Stichprobe vom Umfang n, wobei $\lfloor\rfloor$ den ganzzahligen Anteil angibt. Somit lässt sich der Value at Risk der Zufallsgröße Δ zum Niveau 75% mithilfe des zweitgrößten Simulationswertes ($\lfloor 25\% \cdot 5 + 1\rfloor = 2$) schätzen, d.h. es ist

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_{75\%}(\Delta) = 3.$$

5.2 Einjähriges Reserverisiko

5.2.1 Sei ein Schadenportfolio mit n Anfall- und Abwicklungsjahren gegeben. Mit den Bezeichnungen aus dem Skript lässt sich das ökonomische Abwicklungsergebnis $\texttt{CDR}^{(n\to n+1)}$ des Schadenportfolios im Zeitintervall $[n; n+1]$ definieren als:

$$\texttt{CDR}^{(n\to n+1)} := \sum_{j=1}^{n} \texttt{CDR}_j^{(n\to n+1)},$$

wobei das ökonomische Abwicklungsergebnis $\texttt{CDR}_j^{(n\to n+1)}$ des j-ten Anfalljahres wiederum definiert ist als:

$$\texttt{CDR}_j^{(n\to n+1)} := \hat{R}_j^{(n)} - S_{j,n-j+2} - \hat{R}_j^{(n+1)} = \hat{U}_j^{(n)} - \hat{U}_j^{(n+1)}$$

mit
$\hat{R}_j^{(n)}$:= eingehende nominale Best-Estimate-Reserve für Anfalljahr j im Zeitpunkt $t = n$
$S_{j,n-j+2}$:= nominale Zahlungen für Anfalljahr j im Zeitraum $[n; n+1]$
$\hat{R}_j^{(n+1)}$:= ausgehende nominale Best-Estimate-Reserve im Zeitpunkt $t = n+1$
$\hat{U}_j^{(n)}$:= geschätzter Ultimate für Anfalljahr j im Zeitpunkt $t = n$
$\hat{U}_j^{(n+1)}$:= geschätzter Ultimate für Anfalljahr j im Zeitpunkt $t = n+1$.

5.2.2 Die Berechnung des einjährigen ökonomischen Abwicklungsergebnisses lässt sich anhand von

$$\texttt{CDR}^{(2011\to 2012)} = \sum_{i=2009}^{2011} \texttt{CDR}_i^{(2011\to 2012)} \text{ mit } \texttt{CDR}_i^{(2011\to 2012)} = \hat{U}_i^{(2011)} - \hat{U}_i^{(2012)}$$

vornehmen. Dazu sind pfadweise die Differenzen zwischen den Ultimateschätzungen zu Beginn und Ende des Kalenderjahres 2012 zu ermitteln:

Simulation M	${}^{(M)}\texttt{CDR}_i^{(2011\to 2012)}$ per Anfalljahr i		
	2009	2010	2011
1	0	3	-5
2	0	-1	1
3	0	1	4
4	0	-3	-1
5	0	0	1

${}^{(M)}\texttt{CDR}^{(2011\to 2012)}$
-2
0
5
-4
1

Die für das einjährige Reserverisiko maßgebliche Verlustgröße ist das negative ökonomische Abwicklungsergebnis. Der Schätzer für den Value at Risk zum Niveau 75% ist durch den zweitgrößten Simulationswert der **Verlustvariablen** $-\texttt{CDR}^{(2011\to 2012)}$ gegeben, d.h. es ist

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_{75\%}(-\texttt{CDR}^{(2011\to 2012)}) = 2.$$