Klausur Spezialwissen Schaden 2011 (neue PO)

Aufgabe 1 (Tarifierung, 50 Punkte)

Aufgabe 1.1 (Großschäden, Mindestbestandsgröße)

a) (7 Punkte) Welche Charakteristika und Auswirkungen haben Großschäden und wie kann man damit bei der Tarifkalkulation umgehen?

- lange Abwicklung bei Personenschäden
- sehr hohe Einzelschäden möglich
- systematisch für ein Produkt, aber zufällig im Segment
- höhere Mindestbestandsgröße aufgrund höherer Volatilität durch Großschäden
- Großschäden können die Daten zufällig verzerren und somit die Bestimmung einer systematisch tariflichen Differenzierung erschweren
- Kupierung bei Großschäden bzw. Berücksichtigung beim Gesamtniveau
- Beschaffung adäquater Rückversicherungsdeckung

b) (2 Punkte) Nennen Sie mindestens zwei Möglichkeiten, die man zur Definition einer Großschadengrenze heranziehen kann.

- Tschebychev-Ungleichung
- Reduktion des Variationskoeffizienten: Suche nach Knickpunkt
- Anpassung einer Verteilung bei verschiedenen Kappungsgrenzen

c) (10 Punkte) Um auf Basis eines Datenbestandes hinreichend zuverlässige Aussagen treffen zu können, sollte hierbei eine bestimmte Datenmenge zugrunde liegen. Leiten Sie die Formeldarstellung her für die Mindestbestandsgröße unter Verwendung einer Normalapproximation für den Gesamtschaden sowie einer maximal tolerierten relativen Abweichung und bewerten Sie diese.

Hinweis: Gehen Sie von $P(\sqrt{n}\frac{|SB-\mu|}{\sigma} \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\alpha$ als Normalapproximation aus. Dabei ist SB der beobachtete Schadenbedarf, μ bzw. σ dessen Erwartungswert bzw. Standardabweichung, n die Risikenanzahl, $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ das zweiseitige Quantil der Standardnormalverteilung zum Signifikanzniveau $1-\alpha$.

Der Ausdruck in der obigen Klammer lässt sich umformen zu $\frac{|SB-\mu|}{\mu} \le \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sigma}{\mu}$

Links steht die relative Abweichung. Somit muss die rechte Seite kleiner oder gleich als die maximal tolerierte Abweichung (hier als ε bezeichnet) sein. Damit sollte die Risikenanzahl oberhalb oder gleich der folgenden Untergrenze, der Mindestbestandsgröße liegen:

$$n \ge \frac{u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\sigma^2}{\mu^2}$$

Die Normalapproximation gilt zwar aufgrund des Zentralen Grenzwertsatzes, ist aber für eine nicht-negative Größe wie den Schadenbedarf mit gewisser Vorsicht zu beurteilen. Daher sollte die resultierende Mindestbestandsgröße in ihrer exakten Numerik nicht überinterpretiert werden, d.h. weder ist bei Überschreiten jegliche Schwankung unwahrscheinlich noch ist bei Unterschreiten ein Ergebnis auf Basis des Datenbestandes als völlig unsicher zu bewerten.

d) (6 Punkte) Berechnen Sie die Auswirkung einer Kupierung auf den Variations-koeffizienten im zusammengesetzten Poissonmodell und bewerten Sie das Ergebnis auch hinsichtlich von Mindestbestandsgrößen.

Hinweis: Im zusammengesetzten Poissonmodell gilt für den Variationskoeffizienten

$$\frac{\sigma}{\mu} = \sqrt{\frac{1}{SH} \cdot (VarKo^2(X) + 1)}$$

Dabei ist SH die Schadenhäufigkeit und Varko(X) der Variationskoeffizient der Schadenhöhe.
Für die Berechnungen verwenden Sie: SH = 0,06; E(X) = 4000 und Var(X) = $1{,}024 \cdot 10^9$ bzw. im Fall der Kupierung $E(X_{kup}) = 3500$ und $Var(X_{kup}) = 1{,}1025 \cdot 10^8$.

Im unkupierten Fall gilt Varko(X) = 8 bzw. im kupierten Fall Varko(X_{kup}) = 3
Damit ergibt sich für den gesamten Variationskoeffizienten (gerundet)

$$\frac{\sigma}{\mu} = 32{,}9\ (unkupiert)\ bzw. = 12{,}9\ (kupiert)$$

Die Kupierung reduziert stärker die Standardabweichung als den Erwartungswert, führt somit zu geringeren Mindestbestandsgrößen. Die Kupierung schließt zufällige Einflüsse von Großschäden aus und erlaubt auch bei geringeren Datenbeständen hinreichend gesicherte Aussagen zur systematischen Tarifdifferenzierung.

<u>Aufgabe 1.2 (Klassenbildung)</u>

a) (6 Punkte) Begründen Sie die Sinnhaftigkeit bzw. Notwendigkeit von Klassenbildungen und nennen Sie deren wesentliches Ziel.

- Übersichtlichkeit/Praktikabilität/Verständlichkeit
- Stabilität (in der Zeit: weniger Umstufungen bei dynamischen Zuordnungen)
- Stabilität durch deutliche Prämienunterschiede zwischen den Klassen
- Reduktion Parameteranzahl bei Kalkulation (Stabilität)
- homogene Klassen, d.h. möglichst ähnliche Risiken innerhalb der Klassen
- möglichst viel Varianz/Information, d.h. Differenzierung zwischen den Klassen

b) (5 Punkte) Benennen Sie ein wesentliches Verfahren zur Klassenbildung und beschreiben Sie kurz wesentliche Charakteristika.

Das Verfahren nach Ward ist charakterisiert durch:
- Ausgangspunkt sind sämtliche zu klassifizierende Objekte

- Zusammenlegung der Objekte/Klassen mit minimalem Zuwachs der Varianz innerhalb der Klassen
- Damit möglichst hohe Varianz zwischen den Klassen und möglichst geringe Varianz innerhalb der Klassen, d.h. möglichst homogene und klar getrennte Klassen
- Definition der Klassenanzahl nach Informationsverlust

c) (6 Punkte) Verifizieren Sie die folgende Zerlegung der Gesamtvarianz in die Varianz innerhalb und zwischen den Klassen:

Es gebe h Klassen mit jeweils m_k Objekten und zugehörigen Gewichten n_{jk} (zB Jahreseinheiten; Gesamtgewicht sei n, je Klasse n_k). Dann gilt mit den Werten der Objekte x_{jk} (z.B. Schadenbedarfsindizes), Klassenmitteln x_k und zugehörigen Gewichten n_k sowie Gesamtmittel x_G:

$$\sigma_G^2 = \sum_{k=1}^{h}\sum_{j=1}^{m_k}(x_{jk}-\overline{x_G})^2\frac{n_{jk}}{n} = \sum_{k=1}^{h}\sum_{j=1}^{m_k}(x_{jk}-x_k)^2\frac{n_{jk}}{n} + \sum_{k=1}^{h}(x_k-\overline{x_G})^2\frac{n_k}{n}$$

In jeden der Klammerterme der linken Doppelsumme wird eingefügt $x_k - x_k$. Beim Ausmultiplizieren entstehen die beiden Doppelsummen oben sowie ein gemischter Term:

$$2\sum_{k=1}^{h}\sum_{j=1}^{m_k}(x_{jk}-x_k)(x_k-\overline{x_G})\frac{n_{jk}}{n} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{h}(x_k-\overline{x_G})\sum_{j=1}^{m_k}(x_{jk}-x_k)n_{jk} = 0$$

Dabei steht das letzte Gleichheitszeichen, da die Summe rechts nach Definition der x_k sich zu Null ergibt.

d) (8 Punkte) Der Informationsverlust ist definiert als gewichtetes Mittel der Varianzen innerhalb der Klassen dividiert durch die Gesamtvarianz, d.h.

$$I = \frac{1}{\sigma_G^2}\sum_{k=1}^{h}\sigma_k^2\frac{n_k}{n}$$

Erläutern Sie diese Größe kurz.

In der folgenden Tabelle seien etwa 5 Regionen mit zugehörigem Bestand und Indexwerten betrachtet. Der mittlere Index ist 100, die Gesamtvarianz 1765.

Region	Bestand	Index
1	1000	50
2	2000	75
3	4000	80
4	2500	150
5	500	210
Gesamt	10000	100

Bei Zusammenfassung zweier Klassen ist der Zuwachs der Varianz innerhalb der Klassen

$$\frac{n_p \cdot n_q}{n(n_p+n_q)}\cdot(x_p-x_q)^2$$

Berechnen Sie diesen Zuwachs sowie den zugehörigen Informationsverlust jeweils für die Zusammenfassung der Klassen 1 und 2 bzw. 4 und 5 und bewerten Sie die Ergebnisse kurz.

Der Informationsverlust liegt zwischen 0 und 1 (1 bei einer Klasse und Null, wenn jedes Objekt eine eigene Klasse bildet) und beschreibt, wie viel Varianz/Information durch Klassenbildung innerhalb der Klassen ist und also im Sinne der Differenzierung verloren geht. Je geringer die Klassenanzahl, desto geringer die ausgenutzte Information.

Die Varianzzunahme ist für „1+2“ bei 41,7 sowie für „4+5“ bei 150,0 und somit ist der Informationsverlust für „1+2“ bei 2,4% sowie für „4+5“ bei 8,5% (gerundete Werte).
Die erste Zusammenfassung führt trotz der hohen Gewichte aufgrund der näher beieinander liegenden Indexwerte zu geringerem Informationsverlust als die Zusammenfassung „4+5“, bei der die Indexwerte deutlich voneinander abweichen.

Klausur zum Spezialwissen Schadenversicherung 2011

Aufgabe 2 (Schadenreservierung, 50 Punkte)

Sei C_{ik}, $1 \leq i, k \leq n$, der Schadenstand von Anfalljahr i nach k Abwicklungsjahren und $S_{ik} = C_{ik} - C_{i,k-1}$ der Zuwachs. Die Realisierungen für $i+k \leq n+1$ seien bekannt. Benutzen Sie diese Bezeichnungen bei der Beantwortung der nachfolgenden Aufgaben. Zur Verkürzung der Schreibarbeit können Sie die Bezeichnung $A_{ik} := \{C_{i1}, \ldots, C_{ik}\}$ verwenden. Jede zusätzliche Bezeichnung muss definiert/erklärt werden. (Anzahl Punkte in Klammern)

Weiterer Hinweis:
In Ergänzung zur Formelsammlung wird hier noch die Formel für die Iterativität der Covarianz angeben: $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(\,\mathrm{Cov}(X, Y \mid Z)\,) + \mathrm{Cov}(\,E(X|Z), E(Y|Z)\,)$.

1.1. Nennen Sie die drei Modellannahmen des Zuwachsquoten(ZQ)-Modells. (3)

1.2. Das ZQ-Modell kann für jedes Abwicklungsjahr k auch als lineare Regression interpretiert werden. Was ist bei dieser Interpretation die unabhängige Variable, die abhängige Variable, die Steigung sowie der y-Achsenabschnitt? (4)

1.3. Geben Sie für den Erwartungswertparameter des ZQ-Modells einen erwartungstreuen Schätzer mit minimaler Varianz an, der auf allen relevanten Daten beruht. (3)

1.4. Berechnen Sie die Varianz des Schätzers von 1.3. (4)

2.1. Nennen Sie die drei Modellannahmen des Chain-Ladder(CL)-Modells. (3)

2.2. Wie kann man die spezielle Form der Varianzannahme von 2.1 begründen? (3)

2.3. Geben Sie im CL-Modell das standardisierte Residuum von C_{ik} bei bekannten Modellparametern an. (3)

2.4. Klären Sie durch Rechnung, ob die standardisierten Residuen von C_{ik} und $C_{i,k+1}$ im CL-Modell bei bekannten Parametern positiv korreliert oder negativ korreliert oder unkorreliert sind. (12)

3. Welche zusätzliche Modellannahme legt man bei der Berechnung des Prognosefehlers bei Aggregation von zwei Reservierungssegmenten $\{C_{ik}\}$ und $\{D_{ik}\}$ mit möglicherweise unterschiedlichen Modellannahmen zu Grunde? (5)

4.1. Wie lauten die drei Modellannahmen des Munich Chain Ladder (MCL) Modells? Benutzen Sie dabei die bisherige Bezeichnung C_{ik} für die bezahlten Schäden und die entsprechende Bezeichnung D_{ik} für die angefallenen Schäden. (6)

4.2. Wie kann man die Erwartungswert-Annahmen des MCL-Modells an Hand von Plots der beobachteten Daten prüfen (insbesondere in den ersten Abwicklungsjahren)? (4)

Musterlösung:

1.1. (ZQ1) Die S_{ik} , $1 \leq i, k \leq n$, sind unabhängig.

(ZQ2) $E(S_{ik}) = v_i m_k$ mit bekannten Volumina v_i und unbekannten Parametern m_k.

(ZQ3) $Var(S_{ik}) = v_i s_k^2$ mit unbekannten Parametern s_k^2.

1.2. Für festes k ist $E(S_{ik}) = v_i m_k$, $1 \leq i \leq n$, eine lineare Regression von S_{ik} nach v_i , d.h. v_i ist die unabhängige Variable, S_{ik} die abhängige Variable, m_k die Steigung bei einem y-Achsenabschnitt von 0. (Vgl. Skript S. 46, 75)

1.3. $\hat{m}_k = \sum_{i=1}^{n+1-k} S_{ik} \Big/ \sum_{i=1}^{n+1-k} v_i$ erfüllt die geforderten Eigenschaften.

1.4. $Var(\hat{m}_k) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n+1-k} Var(S_{ik})}{\left(\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i\right)^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i s_k^2}{\left(\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i\right)^2} = \dfrac{s_k^2}{\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i}$.

2.1. (CL1) Die Anfalljahre $\{C_{i1}, \ldots, C_{in}\}$, $1 \leq i \leq n$, sind unabhängig.

(CL2) $E(C_{ik} \mid A_{i,k-1}) = C_{i,k-1}\, f_k$ mit unbekannten Parametern f_k.

(CL3) $Var(C_{ik} \mid A_{i,k-1}) = C_{i,k-1}\, \sigma_k^2$ mit unbekannten Parametern σ_k^2.

2.2. Die spezielle Form von CL3 hängt damit zusammen, wie der Parameter f_k geschätzt wird. Unter CL3 hat der übliche Schätzer $\hat{f}_k = \sum_{i=1}^{n+1-k} C_{i,k-1} F_{ik} \Big/ \sum_{i=1}^{n+1-k} C_{i,k-1}$ mit $F_{ik} = C_{ik}/C_{i,k-1}$ minimale Varianz (gegenüber anderen Linearkombinationen der F_{ik}). Bei anderen Varianzannahmen ergeben sich andere Schätzer für f_k. (Vgl. Skript S. 16, 36)

2.3. Das standardisierte Residuum von C_{ik} im CL-Modell bei bekannten Parametern ist

$$Res(C_{ik}) = \frac{C_{ik} - E(C_{ik} \mid A_{i,k-1})}{\sqrt{Var(C_{ik} \mid A_{i,k-1})}} = \frac{C_{ik} - C_{i,k-1} f_k}{\sqrt{C_{i,k-1}\sigma_k^2}} .$$

2.4. Wegen der Iterativität der Covarianz gilt $Cov(\, Res(C_{ik}), Res(C_{i,k+1})\,) =$

$= E\,(\, Cov(\, Res(C_{ik}), Res(C_{i,k+1}) \mid A_{ik}\,)\,) + Cov(\, E(Res(C_{ik}) \mid A_{ik}), E(Res(C_{i,k+1}) \mid A_{ik})\,)$.

Da $Res(C_{ik})$ eine Funktion von A_{ik}, also bedingt konstant ist, ist $Cov(\, Res(C_{ik}), Res(C_{i,k+1}) \mid A_{ik}\,) = 0$, d.h. der erste Summand ist = 0.

Wegen CL2 ist weiterhin $E(C_{i,k+1} - C_{ik}f_k \mid A_{ik}) = 0$ und somit $E(Res(C_{i,k+1})|A_{ik}) = 0$.
Daher ist auch der zweite Summand $Cov(E(Res(C_{ik})|A_{ik}), E(Res(C_{i,k+1})|A_{ik})) = 0$.

Insgesamt ist also $Cov(Res(C_{ik}), Res(C_{i,k+1})) = 0$, d.h. die Residuen sind unkorreliert!

3. Seien $\{C_{ik}\}$ und $\{D_{ik}\}$ die kumulierten Schadendaten der beiden Segmente und $Res(C_{ik})$ bzw. $Res(D_{ik})$ die zugehörigen standardisierten Residuen wie sie sich aus dem jeweiligen stochastischen Modell ergeben. Dann wird zur Berechnung des Prognosefehlers bei Aggregation der Segmente zusätzlich zu den Modellannahmen für jedes Segment lediglich angenommen, dass der Korrelationskoeffizient

$$\rho_k := \frac{Cov\left(Res(C_{ik}), Res(D_{ik})\right)}{\sqrt{Var\left(Res(C_{ik})\right) \cdot Var\left(Res(D_{ik})\right)}}$$

für festes k nicht vom Anfalljahr i abhängt, wobei Var und Cov bedingt, gegeben alles bis einschließlich Abwicklungsjahr k-1, zu berechnen sind.

4.1. (MCL1) Die Anfalljahre $\{C_{i1}, \ldots, C_{in}, D_{i1}, \ldots, D_{in}\}$, $1 \le i \le n$, sind unabhängig.

(MCL2) $E\left(\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}} \middle| A^{C,D}_{i,k-1}\right) = a^C_k + b^C_k \cdot \frac{D_{i,k-1}}{C_{i,k-1}}$ mit unbekannten Parametern a^C_k, b^C_k, wobei

$A^{C,D}_{i,k-1} := \{C_{i1}, \ldots, C_{i,k-1}, D_{i1}, \ldots, D_{i,k-1}\}$, sowie

$E\left(\frac{D_{ik}}{D_{i,k-1}} \middle| A^{C,D}_{i,k-1}\right) = a^D_k + b^D_k \cdot \frac{C_{i,k-1}}{D_{i,k-1}}$ mit unbekannten Parametern a^D_k, b^D_k.

(MCL3) $Var\left(\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}} \middle| A^{C,D}_{i,k-1}\right) = \frac{(\tau^C_k)^2}{C_{i,k-1}}$, $Var\left(\frac{D_{ik}}{D_{i,k-1}} \middle| A^{C,D}_{i,k-1}\right) = \frac{(\tau^D_k)^2}{D_{i,k-1}}$

mit unbekannten Parametern τ^C_k, τ^D_k.

4.2. Für festes k ist die erste Annahme von MCL2 eine lineare Regression von $C_{ik}/C_{i,k-1}$ nach $D_{i,k-1}/C_{i,k-1}$, die mittels eines entsprechenden X-Y-Plots der beobachteten Datenpaare $(D_{i,k-1}/C_{i,k-1}, C_{ik}/C_{i,k-1})$, $1 \le i \le n+1-k$, auf ihre Plausibilität geprüft werden kann, insbesondere in den ersten Abwicklungsjahren. Dasselbe gilt analog für die zweite Annahme von MCL2.

Klausur Spezialwissen Schaden 2011 (neue PO)

Aufgabe 3 (Risikoteilung, 50 Punkte)

1. Was ist die grundlegende Annahme bezüglich der Schadenhöhenverteilung der Einzelrisiken bei der Feuer-Exposurequotierung? (2 Punkte)

2. Nennen Sie Probleme, die bei der Feuer-Exposurequotierung in der Praxis auftreten können. (8 Punkte)

3. Gegeben sei das folgende Risikoprofil:

Band Nr.	Versicherungs-summe	Anzahl Risiken	Prämie
1	1.000	10.000	6.000
2	2.000	4.000	4.000
3	4.000	500	2.000
Summe		14.500	12.000

   Führen Sie eine Feuer-Exposurequotierung für einen Schadenexzedenten pro Risiko 1.000 xs 1.000 durch. Verwenden Sie hierbei die Exposurekurve $G\colon [0,1] \to [0,1]$, $x \mapsto \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^2$ und eine Schadenquote von 75%. (12 Punkte)

4. Wie berechnet man die Schadenhöhenverteilung eines Einzelrisikos aus der Exposurekurve und umgekehrt? (6 Punkte)

5. In der Haftpflichtversicherung wird häufig die sogenannte Zuschlagsquotierung verwendet.

   - Erläutern Sie die grundlegende Modellannahme.
   - Gegeben sei ein Risiko mit einer Prämie von $s_0 := 1.000$ für eine Deckungssumme von $v_0 := 1.000.000$. Leiten Sie unter der Annahme eines Zuschlagssatzes von $z := 10\%$ die zugehörige stetige Prämienfunktion $S_z(v)$ her (d.h. die Prämie in Abhängigkeit von der Deckungssumme).

   (6 Punkte)

6. Gegeben sei eine Prämienfunktion $S\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $S^{-1}(0) = \{0\}$. Erläutern Sie, was es bedeutet, S durch ein kollektives Modell darzustellen. Nennen Sie Kriterien, anhand derer man entscheiden kann, ob die Prämienfunktion S durch ein kollektives Modell darstellbar ist.

   Entscheiden Sie, ob die beiden folgenden Prämienfunktionen durch kollektive Modelle darstellbar sind (mit Begründung):

   - $S_a(v) := v + \ln(v+1)$
   - $S_b(v) := v\exp(-v)$

   Geben Sie für die Prämienfunktion $S_c(v) := \ln(v+1)$ ein darstellendes kollektives Modell an. (16 Punkte)

Klausur Spezialwissen Schaden 2011 (neue PO)

Lösung zu Aufgabe 3 (Risikoteilung)

Zu 1:

Die grundlegende Annahme bei der Feuer-Exposurequotierung ist, dass die Schadengrade aller Einzelrisiken identisch verteilt sind. Der Schadengrad ist hierbei definiert als die Schadenhöhe dividiert durch die Versicherungssumme.

zu 2:

Probleme, die in der Praxis bei Feuer-Exposurequotierungen auftreten:

- Die Schätzung der Originalschadenquote ist oft schwierig:
  - Schadenquote der exponierenden Risiken evtl. verschieden zur Schadenquote des Gesamtportefeuilles
  - In der Regel wird die Feuer-Schadenquote benötigt. Dem Rückversicherer ist jedoch oft nur die Schadenquote inklusive Leitungswasser, Sturm, etc. bekannt
- Originalfranchisen verschieben das Verhältnis zwischen Groß- und Kleinschäden
- PML versus Versicherungssumme
- PMLs werden von jedem Erstversicherer individuell festgelegt
- Es können PML-Verschätzer auftreten (also Schäden, die größer als der PML sind)
- Unterschiedliche Profiltypen: Policen-Profil, Top Location-Profil, Location-Profil

Zu 3:

Für jedes Band bezeichne bezeichne d die Priorität in % der Versicherungssumme und e den Plafond in % der Versicherungssumme. Dann sieht die Exposure-Rechnung wie folgt aus:

Band Nr.	Risikoprämie	d	e	$G(\min(d,1))$	$G(\min(e,1))$	Risikoprämie XL
1	4.500	100%	200%	100%	100%	0
2	3.000	50%	100%	58%	100%	1.250
3	1.500	25%	50%	31%	58%	406
Summe	9.000					1.656

Die Risikoprämie im XL berechnet sich hierbei als $[G(\min(e,1)) - G(\min(d,1))]$ multipliziert mit der Brutto-Risikoprämie.

Zu 4:

Bezeichnet $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ die Verteilungsfunktion der Schadenhöhe eines Einzelrisikos und v dessen Versicherungssumme, so ist die Schadengradverteilung gegeben durch die Verteilungsfunktion $F_G\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \mapsto F(vx)$. Die zugehörige Exposurekurve ist dann gegeben durch

$$G\colon [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto \frac{\int_0^x (1-F_G(t))\,dt}{\int_0^1 (1-F_G(t))\,dt} = \frac{\int_0^x (1-F(vt))\,dt}{\int_0^1 (1-F(vt))\,dt}.$$

Umgekehrt lässt sich F_G wie folgt aus G berechnen:

$$F_G(x) = \begin{cases} 1 - \frac{G'(x)}{G'(0)} & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{für } x \ge 1. \end{cases}$$

Folglich ist

$$F(x) = F_G(x/v) = \begin{cases} 1 - \frac{G'(x/v)}{G'(0)} & \text{für } 0 \le x < v \\ 1 & \text{für } x \ge v. \end{cases}$$

zu 5:

Grundlegende Annahme bei der Zuschlagsquotierung: Eine Verdoppelung der Deckungssumme kostet immer den gleichen prozentualen Zuschlag (= Zuschlagssatz) auf die Prämie.

Aus dieser Annahme folgt für das konkrete Beispiel sofort

$$S_z(2^n v_0) = (1+z)^n s_0$$

für $n \in \mathbb{Z}$. Setzt man in diese Formel $n = \log_2(v/v_0)$ ein, so erhält man die (eindeutige) stetige Fortsetzung

$$S_z(v) = (1+z)^{\log_2(v/v_0)} s_0 = (v/v_0)^{\log_2(1+z)} s_0 = \left(\frac{v}{1.000.000}\right)^{\log_2(1,1)} \cdot 1.000.$$

zu 6:

Eine Prämienfunktion S wird durch das kollektive Modell $\sum_{i=1}^N X_i$ dargestellt, wenn

$$S(v) = E\left(\sum_{i=1}^N \min(X_i, v)\right) = E(N)E(\min(X, v))$$

für alle $v \ge 0$ gilt (wobei X wie die X_i verteilt ist). Laut Skript gilt folgender

Satz: Eine Prämienfunktion $S\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $S^{-1}(0) = \{0\}$ lässt sich genau dann durch ein kollektives Modell darstellen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) S ist konkav

b) $\lim_{v\to 0} \frac{S(v)}{v} < \infty$ (d.h. S ist bei 0 rechtsseitig differenzierbar)

c) $\lim_{v\to\infty} S'(v) = 0$ (wobei S' die rechtsseitige Ableitung von S bezeichnet)

Mit diesem Satz folgt:

- $S_a(v) := v + \ln(v+1)$ ist nicht durch ein kollektives Modell darstellbar, da $S_c'(v) = 1 + \frac{1}{v+1}$ für $x \to \infty$ nicht gegen null geht
- Es ist $S_b'(v) = \exp(-v) - v\exp(-v)$ und $S_b''(v) = -\exp(-v) - \exp(-v) + v\exp(-v) = (v-2)\exp(-v)$. Wegen $S''(v) > 0$ für $v > 2$ ist S_b nicht konkav und somit nicht durch ein kollektives Modell darstellbar.

Es ist $S_c'(v) = \frac{1}{v+1}$. Für ein darstellendes kollektives Modell $\sum_{i=1}^N X_i$ von S_c gilt

$$E(N) = S_c'(0) = 1 \quad \text{und} \quad F_{X_i}(v) = 1 - \frac{S_c'(v)}{S_c'(0)} = 1 - \frac{1}{v+1}.$$

Die Zufallsgröße N kann man beispielsweise Poisson-verteilt wählen.

Klausur Spezialwissen Schaden 2011 (neue PO)

Aufgabe 4 (Modellierung, 30 Punkte)
Hinweis: Aussagen aus dem Skript und den Vorbereitungsaufgaben dürfen ohne erneuten Beweis verwendet werden.

a) (Eigenschaften von Risikomaßen) (10 Punkte)

Sei $\mathcal{G}$ eine gegenüber Addition abgeschlossene Menge von Risiken, wobei für $X \in \mathcal{G}$ auch $\lambda \cdot X + a \in \mathcal{G}$ für alle $\lambda \geq 0, a \in \mathbb{R}$ gelte. Ein Risikomaß ρ heißt *konvex* (auf $\mathcal{G}$), falls gilt:

A1: $\rho(X + a) = \rho(X) + a$ für alle $X \in \mathcal{G}$, $a \in \mathbb{R}$.

A2: $\rho(X) \leq \rho(Y)$ für alle $X, Y \in \mathcal{G}$ mit $X \leq Y$ fast sicher.

A3: $\rho\big(\lambda \cdot X + (1-\lambda) \cdot Y\big) \leq \lambda \cdot \rho(X) + (1-\lambda) \cdot \rho(Y)$ für alle $X, Y \in \mathcal{G}$ und $0 \leq \lambda \leq 1$.

ai) Geben Sie eine anschauliche Interpretation für Eigenschaft A3 an.

aii) Beweisen Sie: Ein kohärentes Risikomaß ist konvex.

aiii) Beweisen Sie: Ein konvexes und positiv homogenes Risikomaß ist kohärent.

aiv) Begründen Sie jeweils, ob folgende Risikomaße generell konvex sind:

1) Der Expected Shortfall zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$.
2) Der Value at Risk zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$.

b) (Mehrjähriges Risikokapital) (16 Punkte)

Bei 10 Simulationen des Gesamtrisikos einer Sparte über einen Zeitraum von 2 Jahren ergaben sich folgende Verluste in Mio. EUR (negative Verluste stellen Gewinne dar) bei angenommener stetiger Verlustverteilung:

Szenario	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R_1: Verlust erstes Jahr	2,6	1,4	0,1	-0,3	-0,7	-1,1	-1,4	-1,7	-1,8	-3,8
R_2: Verlust zweites Jahr	-0,3	-0,2	-1,2	-2,3	0,2	3,6	0,6	-1,4	0,3	-0,1

Für die Messung des einjährigen Risikokapitalbedarfs der Sparte im Jahr $k \in \{1, 2\}$ wird jeweils der Expected Shortfall zum Niveau 80%, kurz $ES_{80\%}(R_k)$ angesetzt. Für die Messung des zweijährigen Risikokapitalbedarfs dieser Sparte stehen folgende Ansätze zur Auswahl:

$\rho_1(R_1, R_2) = \max(ES_{80\%}(R_1), ES_{80\%}(R_2)),$

$\rho_2(R_1, R_2) = ES_{80\%}(R_1) + ES_{80\%}(R_2),$

$\rho_3(R_1, R_2) = ES_{80\%}(\max(R_1, R_1 + R_2)).$

Aufgabe 4 Fortsetzung (Modellierung, 30 Punkte)

bi) Bestimmen Sie aus den Simulationsergebnissen $\rho_1(R_1, R_2)$, $\rho_2(R_1, R_2)$ und $\rho_3(R_1, R_2)$.

bii) Welche anschauliche Bedeutung besitzen der einjährige und der mittels ρ_1, ρ_2 bzw. ρ_3 ermittelte zweijährige Risikokapitalbedarf?

biii) Wie beurteilen Sie jeweils den mittels ρ_1, ρ_2 bzw. ρ_3 ermittelten Risikokapitalbedarf hinsichtlich der Aspekte Sicherheit und Kapitalkosten für einen zweijährigen Betrachtungszeitraum, wenn die Vorgabe besteht, eine zweijährige Quantils- und Exzessreserve zum Sicherheitsniveau 80% vorzuhalten?

c) (Solvency II) (4 Punkte)

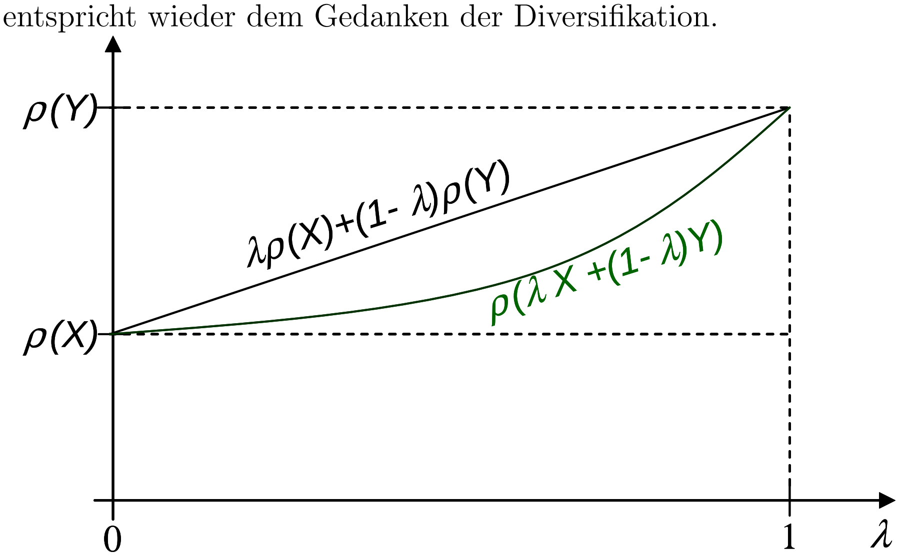
Ordnen Sie den Use Test in den Kontext von Solvency II ein und geben Sie vier inhaltlich verschiedene Punkte an, welche zum Bestehen des Use Tests beitragen können.

Klausur Spezialwissen Schaden 2011 (neue PO)

Lösung zu Aufgabe 4 (Modellierung, 30 Punkte)

a) (Eigenschaften von Risikomaßen) (10 Punkte)

ai) Anschauliche Interpretation von Eigenschaft A3:
Für $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ ist die Aussage trivial. Für $0 < \lambda < 1$ bedeutet A3: Ersetzt man bei einem Risiko X einen beliebigen Anteil $(1-\lambda)\cdot X$ durch einen entsprechenden Anteil $(1-\lambda)\cdot Y$ eines weiteren Risikos, so ist das Gesamtrisiko dieser Mischung $\rho\big(\lambda\cdot X + (1-\lambda)\cdot Y\big)$ nicht größer, als wenn die beiden Risiken einzeln gemessen werden und die Risikomaßzahlen im selben Verhältnis $\lambda\cdot\rho(X) + (1-\lambda)\cdot\rho(Y)$ zusammengesetzt werden. Durch Mischen zweier Risiken erhält man daher eine Position, die gegenüber derselben Mischung der Risikomaßzahlen der beiden Risiken stand alone betrachtet kein größeres, und unter Umständen sogar echt kleineres Gesamtrisiko aufweist. Dies entspricht wieder dem Gedanken der Diversifikation.



aii) Sei ρ kohärent. Dann ist ρ translationsinvariant, d.h. A1 ist gegeben, und isoton, d.h. A2 ist gegeben. Für den Nachweis von A3 seien nun $X, Y \in \mathcal{G}$. Im Fall $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ ist A3 offensichtlich erfüllt. Für $0 < \lambda < 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \rho\big(\lambda\cdot X + (1-\lambda)\cdot Y\big) &\overset{\rho\ subadditiv}{\leq} \rho(\lambda\cdot X) + \rho((1-\lambda)\cdot Y) \\ &\overset{\rho\ positiv\ homogen}{=} \lambda\cdot\rho(X) + (1-\lambda)\cdot\rho(Y). \end{aligned}$$

aiii) Sei ρ konvex und positiv homogen auf $\mathcal{G}$. Dann ist ρ per Definition translationsinvariant (A1), isoton (A2) und positiv homogen. Bleibt der Nachweis der Subadditivität:

Seien $X, Y \in \mathcal{G}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\rho(X+Y) &= \rho\big(2\cdot(\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}Y)\big) \\
&\overset{\rho\ positiv\ homogen}{=} 2\cdot\rho((\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}Y)) \\
&\overset{\rho\ konvex,\ \lambda=\frac{1}{2}}{\leq} 2\cdot\big(\frac{1}{2}\cdot\rho(X)+\frac{1}{2}\cdot\rho(Y)\big) \\
&= \rho(X)+\rho(Y).
\end{aligned}$$

Alternative: Für beliebiges $\lambda \in (0,1)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\rho(X+Y) &= \rho\big(\lambda\frac{1}{\lambda}X+(1-\lambda)\frac{1}{1-\lambda}Y\big) \\
&\overset{\rho\ konvex}{\leq} \lambda\cdot\rho\big(\frac{1}{\lambda}X\big)+(1-\lambda)\cdot\rho\big(\frac{1}{1-\lambda}Y\big) \\
&\overset{\rho\ positiv\ homogen}{=} \rho\big(\lambda\frac{1}{\lambda}X\big)+\rho\big((1-\lambda)\frac{1}{1-\lambda}Y\big) \\
&= \rho(X)+\rho(Y).
\end{aligned}$$

aiv) Nur der Expected Shortfall ist generell konvex:

1) Der Expected Shortfall ist (wie z.B. in den Vorbereitungsaufgaben zur Klausur bewiesen) generell ein kohärentes Risikomaß. Gemäß Teilaufgabe aii) ist er folglich konvex auf $\mathcal{G}$.
2) Der VaR ist (wie z.B. in den Vorbereitungsaufgaben zur Klausur bewiesen) positiv homogen. Wäre er generell konvex, so wäre er nach Teilaufgabe aiii) generell kohärent auf $\mathcal{G}$. Es ist jedoch bekannt und mit Beispielen in den Vorbereitungsaufgaben belegt, dass der VaR nicht generell kohärent ist. Folglich ist er nicht generell konvex.

b) (Mehrjähriges Risikokapital) (16 Punkte)

bi) Zunächst erfolgt die Berechnung von $ES_\alpha(R_1)$ und $ES_\alpha(R_2)$:
$n = 10;\ \alpha = 80\% \Rightarrow m = n\cdot(1-\alpha) = 10\cdot 0{,}2 = 2$

$\widehat{R}_1 := R_{1,ord} = (2{,}6;\ 1{,}4;\ 0{,}1;\ -0{,}3;\ -0{,}7;\ -1{,}1;\ -1{,}4;\ -1{,}7;\ -1{,}8;\ -3{,}8)$

$\widehat{ES_{80\%,10}(R_1)} = \frac{1}{2}\cdot(\widehat{R}_{1,1}+\widehat{R}_{1,2}) = \frac{1}{2}\cdot(2{,}6+1{,}4) = 2{,}0$

$\widehat{R}_2 := R_{2,ord} = (3{,}6;\ 0{,}6;\ 0{,}3;\ 0{,}2;\ -0{,}1;\ -0{,}2;\ -0{,}3;\ -1{,}2;\ -1{,}4;\ -2{,}3)$

$\widehat{ES_{80\%,10}(R_2)} = \frac{1}{2}\cdot(\widehat{R}_{2,1}+\widehat{R}_{2,2}) = \frac{1}{2}\cdot(3{,}6+0{,}6) = 2{,}1$

Sei $Z := \max(R_1, R_1+R_2)$. Dann gilt:

Szenario	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R_1: Verlust erstes Jahr	2,6	1,4	0,1	-0,3	-0,7	-1,1	-1,4	-1,7	-1,8	-3,8
R_2: Verlust zweites Jahr	-0,3	-0,2	-1,2	-2,3	0,2	3,6	0,6	-1,4	0,3	-0,1
$R_1 + R_2$:	2,3	1,2	-1,1	-2,6	-0,5	2,5	-0,8	-3,1	-1,5	-3,9
$Z := \max(R_1, R_1 + R_2)$	2,6	1,4	0,1	-0,3	-0,5	2,5	-0,8	-1,7	-1,5	-0,1

$Z_{1,ord} = (2{,}6;\ 2{,}5;\ 1{,}4;\ 0{,}1;\ -0{,}1;\ -0{,}3;\ -0{,}5;\ -0{,}8;\ -1{,}5;\ -1{,}7)$

$\widehat{ES_{80\%,10}}(Z) = \frac{1}{2} \cdot (Z_{1,1} + Z_{1,2}) = \frac{1}{2} \cdot (2{,}6 + 2{,}5) = 2{,}55.$

Damit folgt schließlich die Schätzung:

$\rho_1(R_1, R_2) = \max(2{,}0;\ 2{,}1) = 2{,}1$

$\rho_2(R_1, R_2) = 2{,}0 + 2{,}1 = 4{,}1$

$\rho_3(R_1, R_2) = 2{,}55.$

[Anmerkung am Rande: Für die Berechnung des Risikokapitalbedarfs in der Praxis sind zehn Simulationen i.A. nicht hinreichend.]

bii) Zunächst zum einjährigen Risikokapitalbedarf, gemessen anhand des $ES_{80\%}(R_k)$: Der TailVaR zum Niveau 80% des Risikos R_k gibt den Wert an, der mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80% im Beobachtungsjahr k nicht überschritten wird (Quantilsreserve) zuzüglich dem mittleren Überschaden für den Fall, dass das Quantil überschritten wird (Exzessreserve). Da eine stetige Verlustverteilung angenommen wird, bei der TailVaR und Expected Shortfall übereinstimmen, besitzt der einjährige Expected Shortfall dieselbe Interpretation wie der einjährige TailVaR.

ρ_1 entspricht der größeren der beiden einjährigen Risikokapitalbedarfszahlen. Es berechnet das Kapital, das für jedes einzelne der beiden Jahre stand alone ausreichen würde, um den Risikobedarf zu decken.

ρ_2 entspricht der Summe der beiden einjährigen Risikokapitalbedarfszahlen. In a) wurde gezeigt, dass $ES_{80\%}(R_2) > 0$ ist, daher ist die Summe $ES_{80\%}(R_1) + ES_{80\%}(R_2)$ aufgrund der Subadditivität des Expected Shortfalls ausreichend, um den Bedarf beider Jahre abzudecken.

ρ_3 entspricht dem Expected Shortfall zum Niveau 80% des maximalen kumulierten Verlustes im Laufe der ersten beiden Jahre. Unter Verwendung der Schätzer aus dem Skript und aufgrund nicht vorhandener Bindungen in den Daten entspricht der geschätzte Wert dabei gleichzeitig wieder dem TailVaR zum Nivau 80% des maximalen kumulierten Verlustes und damit der Summe aus Quantils- und Exzessreserve des maximalen kumulierten Verlustes aus beiden Jahren zum Sicherheitsniveau 80%.

biii) ρ_1 entspricht dem größeren der beiden Einjahres-Risikokapitalbedarfszahlen. Damit reicht dieser Betrag zum gewünschten Sicherheitsniveau aus, um das schlechtere der beiden Jahre zu überstehen. Da jedoch nach einem schlechten Jahr ein weiteres schlechtes Jahr folgen oder einem schlechten Jahr ein weiteres schlechtes Jahr vorangehen kann, wird dieser Betrag i.A. nicht ausreichend sein, um auch das gewünschte Sicherheitsniveau für einen zweijährigen Horizont zu erreichen.

ρ_3 entspricht dem Expected Shortfall zum Niveau 80% des maximalen kumulierten Verlusts der beiden Jahre. Damit hält ρ_3 das gewünschte Sicherheitsniveau ein, da das Risikokapital ausreicht, um einen maximalen Verluststand im Verlauf zu bedecken, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% im Laufe der beiden Jahre nicht überschritten wird, sowie zusätzlich den mittleren Exzess, falls der Verluststand dennoch diese Schranke überschreiten sollte.

ρ_2 entspricht der Summe der beiden Einjahres-Risikokapitalbedarfszahlen und bietet damit auf zweijährige Sicht ein mindestens genauso großes Sicherheitsniveau, wie es jeweils der Expected Shortfall zum Niveau 80% auf Einjahres-Sicht bietet. Aus bi) wird ebenso deutlich, dass $\rho_2(R_1, R_2) = 4,1 > \rho_3(R_1, R_2) = 2,55$. Allerdings ist der angesetzte Risikokapitalbedarf bei ρ_2 deutlich höher im Hinblick auf die Kapitalkosten als bei der Verwendung von ρ_3; im Gegensatz zu ρ_3 berücksichtigt ρ_2 nicht den Ausgleich in der Zeit.

Fazit: ρ_1 hält das gewünschte Sicherheitsniveau auf Zweijahres-Sicht nicht ein. ρ_2 und ρ_3 halten das gewünschte Sicherheitsniveau ein, wobei ρ_2 deutlich konservativer ist, da es den Ausgleich in der Zeit nicht berücksichtigt und daher die höheren Kapitalkosten mit sich bringt.

c) (Solvency II) (4 Punkte)

In Säule 1 von Solvency II ist unter anderem das bereitzuhaltende Solvenzkapital, das sog. Solvency Capital Requirement = SCR zu ermitteln. Das SCR kann dabei anhand eines Standardansatzes oder anhand eines internen Risikomodells ermittelt werden. Um das interne Risikomodell hierfür verwenden zu können, ist eine Vielzahl von regulatorischen Anforderungen zu erfüllen. Eine der wichtigsten hiervon ist der Use Test, d.h. die positive Beantwortung der Frage, ob das Modell im Unternehmen „gelebt“ wird, also ob das Modell in angemessener Art und Weise in den Risikomanagement-Prozessen / Risikomanagement-Regelkreisen und Entscheidungsprozessen eingebunden ist. Falls dies gegeben ist, so sollte davon auszugehen sein, dass ein entsprechend hoher interner Qualitätsdruck auf das Modell wirkt.
Punkte, welche beispielsweise zum Bestehen des Use Tests beitragen können:
Verwendung des internen Modells

- im Own Risk and Solvency Assessment / der Risikokapitalbedarfsermittlung und der Allokation des Risikokapitalbedarfs
- in der Rückversicherungsplanung
- in der Asset Allokation
- in der Tarifierung
- bei der Neugeschäftsplanung (z.B. Ermittlung profitabler Sparten, Ermittlung von Sparten mit positivem Diversifikationseffekt auf andere Sparten,...)