Klausur Spezialwissen Schaden 2010 (neue PO)

Aufgabe 1 (Tarifierung, 50 Punkte)

Aufgabe 1.1 (Ausgleichsverfahren)

a) (9 Punkte) Die Poisson-Verteilung hat die Dichte $f(y_{ij}, \lambda_{ij}) = \frac{(w_{ij}\lambda_{ij})^{y_{ij}}}{y_{ij}!}\exp(-w_{ij}\lambda_{ij})$.

Dabei sei $y_{ij} = w_{ij}r_{ij}$. Leiten Sie hieraus im multiplikativen Ansatz die Gleichungen des Marginalsummenverfahrens durch ML-Schätzung ab.

b) (8 Punkte) Gegeben seien für zwei Dimensionen mit jeweils zwei Ausprägungen die folgende Bestandsverteilung sowie die zugehörigen Schadenbedarfe.

Bestandsverteilung:

Jahreseinheiten	1	2	Gesamt
1	600	400	1000
2	800	400	1200
Gesamt	1400	800	2200

Schadenbedarfe (ganzzahlig gerundet):

SB	1	2	Gesamt
1	200	400	280
2	300	500	367
Gesamt	257	450	327

Stellen Sie hierfür die Startgleichungen des Marginalsummenverfahrens auf (nicht iterieren oder lösen). Dabei bezeichne in den Marginalsummengleichungen der Index i Zeilen und der Index j Spalten.

c) (8 Punkte) Vergleichen Sie das Marginalsummenverfahren mit dem Simon-Bailey-Verfahren und begründen Sie Ihre Bewertung.

Aufgabe 1.2 (Gewichtungsverfahren)

a) (5 Punkte) Nennen Sie das wesentliche Ziel von Gewichtungsverfahren.

b) (9 Punkte) Beschreiben Sie inhaltlich und formelmäßig (im Fall zweier Dimensionen) die Gewichtung mit dem individuellen Bestand sowie die Gewichtung mit dem Gesamtbestand.

c) (5 Punkte) Gegeben sei die folgende Tabelle mit Bestandsverteilungen und zugehörigen Schadenbedarfen für ein VU und den Markt.

VU	Altersgruppe	Jahreseinheiten	Schadenbedarf
	1	100	150
	2	400	200
	3	500	300
	4	200	400
	Gesamt	1200	271
…			
Markt	1	4000	140
	2	5000	200
	3	6000	320
	4	5000	420
	Gesamt	20000	279

Berechnen Sie den gewichteten Schadenbedarf des VU mit der <u>Gewichtung mit dem individuellen Bestand</u>. Wie ist der Vergleich VU vs. Markt?

d) (6 Punkte) Gegeben sei die folgende Tabelle mit Bestandsverteilungen und zugehörigen Schadenbedarfen für ein VU und den Markt.

VU	Altersgruppe	Jahreseinheiten	Schadenbedarf
	1	10	1000
	2	240	200
	3	500	300
	4	250	400
	Gesamt	1000	308
…			
Markt	1	4000	140
	2	5000	200
	3	6000	320
	4	5000	420
	Gesamt	20000	279

Berechnen Sie den gewichteten Schadenbedarf des VU mit der <u>Gewichtung mit dem Gesamtbestand</u>.
Bewerten Sie das Ergebnis und dessen Implikation auf die Bewertung von diesem Verfahren.

Klausur Spezialwissen Schaden 2010 (neue PO)

Aufgabe 1 (Tarifierung, 50 Punkte)

Aufgabe 1.1 (Ausgleichsverfahren)

a) (9 Punkte) Die Poisson-Verteilung hat die Dichte $f(y_{ij}, \lambda_{ij}) = \frac{(w_{ij}\lambda_{ij})^{y_{ij}}}{y_{ij}!} \exp(-w_{ij}\lambda_{ij})$.

Dabei sei $y_{ij} = w_{ij} r_{ij}$. Leiten Sie hieraus im multiplikativen Ansatz die Gleichungen des Marginalsummenverfahrens durch ML-Schätzung ab.

Die Likelihood-Funktion ist $L = \prod_{ij} f(y_{ij}, \lambda_{ij})$

Der multiplikative Ansatz ist $\lambda_{ij} = u_i v_j$

Logarithmieren ergibt: $\log L = \sum_{ij} (w_{ij} r_{ij} \log(w_{ij} u_i v_j) - w_{ij} u_i v_j - \log(y_{ij}!))$

Ableitung nach u_i führt auf: $\frac{\partial \log L}{\partial u_i} = \sum_j (\frac{w_{ij} r_{ij}}{u_i} - w_{ij} v_j)$

Nullsetzen liefert: $\sum_j w_{ij} u_i v_j = \sum_j w_{ij} r_{ij}$

und analog: $\sum_i w_{ij} u_i v_j = \sum_i w_{ij} r_{ij}$

b) (8 Punkte) Gegeben seien für zwei Dimensionen mit jeweils zwei Ausprägungen die folgende Bestandsverteilung sowie die zugehörigen Schadenbedarfe.

Bestandsverteilung:

Jahreseinheiten	1	2	Gesamt
1	600	400	1000
2	800	400	1200
Gesamt	1400	800	2200

Schadenbedarfe (ganzzahlig gerundet):

SB	1	2	Gesamt
1	200	400	280
2	300	500	367
Gesamt	257	450	327

Stellen Sie hierfür die Startgleichungen des Marginalsummenverfahrens auf (nicht iterieren oder lösen). Dabei bezeichne in den Marginalsummengleichungen der Index i Zeilen und der Index j Spalten.

Gemäß dem Ergebnis aus a) ergibt sich:

I: $u_1(600v_1 + 400v_2) = 600*200 + 400*400 \Leftrightarrow u_1(3v_1 + 2v_2) = 1400$

II: $u_2(800v_1 + 400v_2) = 800*300 + 400*500 \Leftrightarrow u_2(2v_1 + v_2) = 1100$

III: $v_1(600u_1 + 800u_2) = 600*200 + 800*300 \Leftrightarrow v_1(3u_1 + 4u_2) = 1800$

IV: $v_2(400u_1 + 400u_2) = 400*400 + 400*500 \Leftrightarrow v_2(u_1 + u_2) = 900$

c) (8 Punkte) Vergleichen Sie das Marginalsummenverfahren mit dem Simon-Bailey-Verfahren und begründen Sie Ihre Bewertung.

Das Simon-Bailey-Verfahren überschätzt im multiplikativen Modell systematisch die beobachteten Werte.
Dieses ist beim Marginalsummenverfahren nicht der Fall, da gerade durch das Verfahren die beobachteten Randwerte reproduziert werden.

Zudem versucht das Simon-Bailey-Verfahren die beobachteten Werte auf Ebene der untersten Tarifzellen zu approximieren. Dadurch wird es ausreißerempfindlich.
Auch dies ist nicht der Fall beim Marginalsummenverfahren aufgrund der beschriebenen Reproduktion der beobachteten Randwerte, die auf größeren Beständen beruhen und dadurch i.a. stabiler sind.

Aufgabe 1.2 (Gewichtungsverfahren)

a) (5 Punkte) Nennen Sie das wesentliche Ziel von Gewichtungsverfahren.

Das wesentliche Ziel ist der Vergleich von Kennzahlen wie zB Schadenbedarf aus verschiedenen Beständen unter Ausschaltung des Einflusses unterschiedlicher Bestandszusammensetzungen durch Zugrundelegung einer einheitlichen Bestandszusammensetzung.

b) (9 Punkte) Beschreiben Sie inhaltlich und formelmäßig (im Fall zweier Dimensionen) die Gewichtung mit dem individuellen Bestand sowie die Gewichtung mit dem Gesamtbestand.

Beide Verfahren dienen zum Vergleich von Kennzahlen eines Teilbestands mit denen des übergeordneten und den Teilbestand umfassenden Bestands.

Bei der individuellen Gewichtung wird die gewichtete Kennzahl wie zB der Schadenbedarf mit den Schadenbedarfen des übergeordneten Bestandes und den Beständen des Teilbestandes berechnet, dh zum Vergleich, der um reine Bestandsverteilungseffekte bereinigt ist, wird als einheitliche Bestandesverteilung diejenige des Teilbestandes zugrunde gelegt und die gemessene Kennzahl des Teilbestandes mit der gewichteten des übergeordneten Bestandes verglichen.

So ergibt sich zB der gewichtete Schadenbedarf im Fall von zwei Dimensionen zu:

$SB_i^{gew} = \sum_j \frac{w_{ij}}{w_{i.}} SB_j$ **und der gemessene Schadenbedarf zu:** $SB_i = \sum_j \frac{w_{ij}}{w_{i.}} SB_{ij}$

Dabei sind Bestandsgrößen mit w und Schadenbedarfe mit SB bezeichnet. Punkte im Index stehen für Summationen.

Bei der Gewichtung mit dem Gesamtbestand wird die gewichtete Kennzahl wie zB der Schadenbedarf mit den Schadenbedarfen des Teilbestandes und den Beständen des übergeordneten Bestandes berechnet, dh zum Vergleich, der um reine Bestandsverteilungseffekte bereinigt ist, wird als einheitliche Bestandsverteilung diejenige des Gesamtbestandes zugrunde gelegt und die gemessene Kennzahl des Gesamtbestandes mit der gewichteten des Teilbestandes verglichen.

So ergibt sich zB der gewichtete Schadenbedarf im Fall von zwei Dimensionen zu:

$SB_i^{gew} = \sum_j \frac{w_{.j}}{w_{..}} SB_{ij}$ **und der gemessene Schadenbedarf zu:** $SB = \sum_j \frac{w_j}{w_{..}} SB_j$

Dabei sind Bestandsgrößen mit w und Schadenbedarfe mit SB bezeichnet. Punkte im Index stehen für Summationen.

c) (5 Punkte) Gegeben sei die folgende Tabelle mit Bestandsverteilungen und zugehörigen Schadenbedarfen für ein VU und den Markt.

VU	Altersgruppe	Jahreseinheiten	Schadenbedarf
	1	100	150
	2	400	200
	3	500	300
	4	200	400
	Gesamt	1200	271
…			
Markt	1	4000	140
	2	5000	200
	3	6000	320
	4	5000	420
	Gesamt	20000	279

Berechnen Sie den gewichteten Schadenbedarf des VU mit der <u>Gewichtung mit dem individuellen Bestand</u>. Wie ist der Vergleich VU vs. Markt?

Der gewichtete Schadenbedarf des VU ist hier 282 (ganzzahlig gerundet) und somit liegt das VU unter dem vergleichbaren Schadenbedarf des Marktes.

d) (6 Punkte) Gegeben sei die folgende Tabelle mit Bestandsverteilungen und zugehörigen Schadenbedarfen für ein VU und den Markt.

VU	Altersgruppe	Jahreseinheiten	Schadenbedarf
	1	10	1000
	2	240	200
	3	500	300
	4	250	400
	Gesamt	1000	308

…			
Markt	1	4000	140
	2	5000	200
	3	6000	320
	4	5000	420
	Gesamt	20000	279

Berechnen Sie den gewichteten Schadenbedarf des VU mit der Gewichtung mit dem Gesamtbestand.
Bewerten Sie das Ergebnis und dessen Implikation auf die Bewertung von diesem Verfahren.

Der gewichtete Schadenbedarf des VU ist hier 440. Dieses Ergebnis ist stark von dem Ausreißer in der Altersgruppe 1 des VU beeinflusst. Dieser Schadenbedarf von 1000 ist beim VU vor dem Hintergrund eines geringen Bestandes in der betreffenden Altersgruppe zu sehen. Durch den Bestand des Marktes in dieser Altersgruppe, der einen deutlich höheren Anteil als beim VU hat, erhält dieser Ausreißer bei diesem Gewichtungsverfahren ein hohes Gewicht, dh dieses Gewichtungsverfahren ist ausreißerempfindlich. Bei Gewichtung mit dem individuellen Bestand wird dies vermieden.

Klausur zum Spezialwissen Schadenversicherungsmathematik 2010

Aufgabe 2 (Schadenreservierung, 50 Punkte)

Sei $C_{i,k}$, $1 \le i, k \le n$, der Schadenstand von Anfalljahr i nach k Abwicklungsjahren und $S_{i,k} = C_{i,k} - C_{i,k-1}$ der Zuwachs ($C_{i,0} := 0$) . Die Realisierungen für $i+k \le n+1$ seien bekannt. Benutzen Sie diese Bezeichnungen bei der Beantwortung folgender Fragen:

2.1. Zu stochastischen Reservierungsmodellen allgemein:

2.1.a. Im laufenden Geschäftsjahr kommen zum bisher bekannten Abwicklungsdreieck die Realisierungszuwächse $S_{1,n+1}$, $S_{2,n}$, …, $S_{n,2}$ hinzu (ohne das neue Anfalljahr). Erklären Sie anschaulich, nicht formelmäßig, dass die daraus letztlich resultierende Geschäftsjahres-Volatilität des Reserverisikos größer ist als nur $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} S_{i,n+2-i}\right)$. (6 Punkte)

2.1.b. Wie kann man prüfen, ob die neu hinzugekommenen Realisierungen $S_{1,n+1}$, $S_{2,n}$, …, $S_{n,2}$ bis auf zufällige Abweichungen zur letztjährigen Prognose passen? (6 Punkte)

2.2. Zum Chain-Ladder-Modell:

2.2.a. Bei der Chain Ladder (CL) wird häufig ein Tailfaktor $\hat{f}_\infty$ für die Restabwicklung nach Abwicklungsjahr n verwendet, d.h. der Endstand von Anfalljahr i wird durch $\hat{C}_{i,\infty} = \hat{C}_{i,n} \cdot \hat{f}_\infty$ geschätzt. Die zugehörige Rekursionsformel für den Prognosefehler lautet dann

$$\left(\mathrm{p.e.}(\hat{C}_{i,\infty})\right)^2 = \left(\mathrm{p.e.}(\hat{C}_{i,n})\right)^2 \hat{f}_\infty^2 + \hat{C}_{i,n}^2 \left(\hat{\mathrm{V}}\mathrm{ar}(F_{i,\infty} \mid A_{i,n}) + \hat{\mathrm{V}}\mathrm{ar}(\hat{f}_\infty \mid B_n)\right) .$$

Beschreiben Sie, wie man hierbei zu Schätzern für die beiden $\hat{\mathrm{V}}\mathrm{ar}$ -Terme kommt? (10 Punkte)

2.2.b. Wie lautet die Kovarianzannahme des CL-Modells für die Abwicklungsschemata $\{ C_{i,k}^{(1)} \}$ und $\{ C_{i,k}^{(2)} \}$ aus zwei Geschäftssegmenten? Definieren Sie die dabei zusätzlich benutzten Bezeichnungen. (5 Punkte)

Fortsetzung siehe nächstes Blatt

Aufgabe 2 (Schadenreservierung), Fortsetzung

2.3. Zum Zuwachsquotenmodell:

2.3.a. Wie lautet die Kovarianzannahme des ZQ-Modells für die Abwicklungsschemata $\{ C^{(1)}_{i,k} \}$ und $\{ C^{(2)}_{i,k} \}$ aus zwei Geschäftssegmenten? Definieren Sie die dabei zusätzlich benutzten Bezeichnungen. (5 Punkte)

2.3.b. Berechnen Sie den aus der Modellannahme 2.3.a resultierenden Korrelationskoeffizienten zwischen den Endständen $C^{(1)}_{i,n}$ und $C^{(2)}_{i,n}$ unter der zusätzlichen, zum ZQ-Modell passenden Annahme, dass alle $S^{(1)}_{i,k}$, $S^{(2)}_{j,m}$ mit $(i,k) \neq (j,m)$ unabhängig sind. (9 Punkte)

2.4. Zum Bornhuetter/Ferguson-Modell:

2.4.a. Wie lauten die Annahmen des Bornhuetter/Ferguson-Modells? (4 Punkte)

2.4.b. Wie kann man die darin vorkommende Varianzannahme rechtfertigen? (5 Punkte)

Lösung:

2.1.a. Am Ende des Geschäftsjahres werden mit Hilfe der neuen Realisierungen $S_{i,n+2-i}$ auch neue Reserve- bzw. Endstandsschätzer $\hat{C}_{i,\infty}^{(n+1)}$ ermittelt, deren Abweichung von den bisherigen $\hat{C}_{i,\infty}^{(n)}$ in $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} S_{i,n+2-i}\right)$ nicht enthalten ist, aber die Geschäftsjahresvolatilität ebenfalls beeinflusst.

2.1.b. Man berechne auf Basis des bei der letztjährigen Abwicklungsprognose benutzten stochastischen Modells die standardisierten Residuen $r_{i,n+2-i}$, $1 \le i \le n$, der neuen Realisierungen $S_{i,n+2-i}$. Diese sollten möglichst gleichmäßig um 0 streuen, also nicht überwiegend positiv (oder überwiegend negativ) sein und zwischen -3 und +3 liegen. (Genaueren Aufschluss liefert ein t-Test der Hypothese, dass der Mittelwert der $r_{i,n+2-i}$ gleich 0 ist.)

2.2.a. Gemäß dem um die Tailspalte erweiterten CL-Modell gilt

$$\mathrm{Var}(F_{i,\infty}|A_{i,n}) = \mathrm{Var}\left(\frac{C_{i,\infty}}{C_{i,n}} \mid A_{i,n}\right) = \frac{\sigma_\infty^2}{C_{i,n}} \text{ mit } A_{i,n} = \{C_{i,1}, \ldots, C_{i,n}\}.$$

Für $C_{i,n}$ hat man den CL-Schätzer $\hat{C}_{i,n}$; für σ_∞^2 erhält man einen Schätzer aus einem Plot der $\ln(\hat{\sigma}_k^2)$ gegen $\ln(\hat{f}_k - 1)$, $1 \le k \le n-1$, und Ablesen über $\hat{f}_\infty - 1$.

$\hat{\mathrm{V}}\mathrm{ar}(\hat{f}_\infty \mid B_n) = \left(\mathrm{s.e.}(\hat{f}_\infty)\right)^2$ ist das Quadrat des Standardfehlers von $\hat{f}_\infty$. Dieser Standardfehler kann durch Festlegung eines 95%-Konfidenzintervalls um $\hat{f}_\infty$ gewonnen werden, welches (unter Normalverteilungsannahmen) etwa viermal so groß wie $\mathrm{s.e.}(\hat{f}_\infty)$ ist.

2.2.b. $\mathrm{Cov}\left(\frac{C_{i,k}^{(1)}}{C_{i,k-1}^{(1)}}, \frac{C_{i,k}^{(2)}}{C_{i,k-1}^{(2)}} \mid A_{i,k-1}^{(1,2)}\right) = \frac{\rho_k}{\sqrt{C_{i,k-1}^{(1)} \cdot C_{i,k-1}^{(2)}}}$ mit $A_{i,k-1}^{(1,2)} = \{C_{i,1}^{(1)}, \ldots, C_{i,k-1}^{(1)}, C_{i,1}^{(2)}, \ldots, C_{i,k-1}^{(2)}\}$ und einem unbekannten Parameter ρ_k ; gleichwertig ist $\mathrm{Cov}\left(C_{i,k}^{(1)}, C_{i,k}^{(2)} \mid A_{i,k-1}^{(1,2)}\right) = \rho_k \sqrt{C_{i,k-1}^{(1)} \cdot C_{i,k-1}^{(2)}}$.

2.3.a. In Analogie zur entsprechenden CL-Annahme 2.2.b ergibt sich die ZQ-Annahme

$\mathrm{Cov}\left(\frac{S_{i,k}^{(1)}}{v_i^{(1)}}, \frac{S_{i,k}^{(2)}}{v_i^{(2)}}\right) = \frac{r_k}{\sqrt{v_i^{(1)} \cdot v_i^{(2)}}}$ mit den Volumenmaßen $v_i^{(1)}$, $v_i^{(2)}$ und einem unbekannten Parameter r_k ; gleichwertig ist $\mathrm{Cov}\left(S_{i,k}^{(1)}, S_{i,k}^{(2)}\right) = r_k \sqrt{v_i^{(1)} \cdot v_i^{(2)}}$.

2.3.b. Der Korrelationskoeffizient ist definiert als $\rho_{12} = \frac{\mathrm{Cov}(C_{i,n}^{(1)}, C_{i,n}^{(2)})}{\sqrt{\mathrm{Var}(C_{i,n}^{(1)})\mathrm{Var}(C_{i,n}^{(2)})}}$ (vgl. FS). Für j = 1, 2 gilt $\mathrm{Var}(C_{i,n}^{(j)}) = \mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} S_{i,k}^{(j)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(S_{i,k}^{(j)}) = v_i^{(j)}(s^{(j)})^2$ mit $(s^{(j)})^2 := \sum_{k=1}^{n} (s_k^{(j)})^2$ gemäß der ZQ-Modellannahme $\mathrm{Var}(S_{i,k}^{(j)}) = v_i^{(j)}(s_k^{(j)})^2$ mit dem Volumenmaß $v_i^{(j)}$. Gemäß der Covarianzannahme von 2.3.a und der zusätzlichen Unabhängigkeitsannahme ergibt sich $\mathrm{Cov}(C_{i,n}^{(1)}, C_{i,n}^{(2)}) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{k=1}^{n} S_{i,k}^{(1)}, \sum_{k=1}^{n} S_{i,k}^{(2)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Cov}(S_{i,k}^{(1)}, S_{i,k}^{(2)}) = \sum_{k=1}^{n} r_k \sqrt{v_i^{(1)} v_i^{(2)}}$ und daraus schließlich $\rho_{12} = \frac{r}{s^{(1)} s^{(2)}}$ mit $r := \sum_{k=1}^{n} r_k$.

2.4.a. Die B/F-Modellannahmen lauten:

(0) Zusätzlich zu den eingangs verwendeten Bezeichnungen gibt es noch eine Tail-Spalte k = n+1, derart dass $C_{i,n+1}$ der Schadenendstand ist.

(1) Die Zuwächse $S_{i,k}$ $1 \le i \le n$, $1 \le k \le n+1$, sind unabhängig.

(2) Es gilt $E(S_{i,k}) = x_i y_k$ mit unbekannten Parametern x_i, y_k mit $y_1 + \ldots + y_{n+1} = 1$.

(3) $\mathrm{Var}(S_{i,k}) = x_i s_k^2$ mit unbekannten s_k^2 .

2.4.b. Wegen $E(C_{i,n+1}) = x_i$ (gemäß (2)) kann x_i als (unbekanntes) Volumenmaß angesehen werden. Dann entspricht die Varianzannahme (3) in der Form $\mathrm{Var}(S_{i,k} / x_i) = s_k^2 / x_i$ dem üblichen Exposure- oder Volumenmodell, wonach die Varianz von volumenbezogenen Zufallsgrößen umgekehrt proportional zum Volumen ist.

Klausur Spezialwissen Schaden 2010 (neue PO)

Aufgabe 3 (Risikoteilung, 50 Punkte)

Aufgabe 3.1: (35 Punkte)

Ein Erstversicherer hat für sein Sach-Portefeuille folgende Rückversicherungsverträge abgeschlossen:

- Summenexzedent:
  - Maximum 1.000, Anzahl der Maxima: 4
  - Provision 10%
  - Gewinnanteil 30% nach 4% Verwaltungskosten
  - Verlustvortrag bis Tilgung, aktueller Verlustvortrag: 50
- Schadenexzedent 800 xs 200 pro Risiko auf den Summenexzedenten-Selbstbehalt:
  - AAD: 800, AAL: 4.000 (AAD und AAL werden den Einzelschäden gemäß der Reihenfolge des Schadeneintritts zugerechnet)
  - RV-Prämie 4% des GNPI
- Schadenexzedent 800 xs 400 pro Ereignis auf den Selbstbehalt von Summenexzedent und Schadenexzedent pro Risiko:
  - eine bezahlte Wiederauffüllung zu 50% pra
  - Upfront-Prämie: 3% des GNPI

Nach einem Jahr, das durch die Stürme Wanda und Zeno betroffen ist, stellt sich die Schadensituation wie folgt dar:

Band Nr.	VS	Anzahl Risiken	Prämie	Schäden gesamt	Schäden aus Wanda	Zeno
1	300	10.000	3.300	1.700	500	100
2	750	5.000	4.000	2.400	1.000	400
3	2.000	1.200	2.000	1.500	200	100
4	4.000	290	400	600	100	20
5	6.000	10	300	0	0	0
Summe		16.500	10.000	6.200	1.800	620

Hierin enthalten sind folgende Einzelschäden > 200:

Datum	VS	Schadenhöhe	Bemerkung
05.02.	750	750	Wanda
30.03.	750	500	Feuer
03.04.	750	250	Zeno
20.11.	2.000	800	Feuer

Neben Wanda und Zeno sind keine weiteren Kumulschäden eingetreten.

1. Erläutern Sie weshalb ein solches Rückversicherungsprogramm zum Schutz eines Sach-Portefeuilles zweckmäßig ist. Gehen Sie hierbei auf die risikotechnische Funktion der einzelnen Verträge innerhalb des Programms ein.
   Halten Sie ein solches Programm auch bei einem Haftpflicht-Portefeuille für sinnvoll? Begründen Sie Ihre Antwort. (10 Punkte)
2. Berechnen Sie für alle drei Verträge Prämien, Schäden und externe Kosten des Rückversicherers. (25 Punkte)

Aufgabe 3.2: (15 Punkte)

Ein Erstversicherer schließt für sein Portefeuille mit Bruttoprämie P und Jahresschaden S eine Quote mit Abgabesatz q und Provisionssatz p ab. Verwaltungskosten werden vernachlässigt, so dass für die Nettoprämien von Erst- und Rückversicherer gilt

$$\tilde{N} = (1-q)P + pqP, \quad \hat{N} = qP - pqP.$$

Der Erstversicherer hat ein Risikokapital von $\tilde{c}$ und bewertet die Quote mit der Nutzenfunktion

$$\tilde{u}(x) = -e^{-x}.$$

Der Rückversicherer verwendet zur Bewertung des Vertrages ebenfalls das Nutzenmodell und setzt hierbei das Risikokapital $\hat{c}$ an.

1. Wie lautet die Aussage des Satzes von Borch in dieser Situation? (3 Punkte)

2. Bestimmen Sie eine Nutzenfunktion $\hat{u}(x)$ für den Rückversicherer, so dass die Quote im Nutzenmodell Pareto-optimal ist. (12 Punkte)

Klausur Spezialwissen Schaden 2010 (neue PO)

Lösung zu Aufgabe 3 (Risikoteilung)

Lösung zu Aufgabe 3.1:

Zu 1:

Charakteristisch für die Sachversicherung sind

- inhomogene Versicherungssummen
- hohes Groß- und Totalschadenpotential (Feuer)
- hohes Kumulschadenpotential (Naturgefahren)

Häufig ist hierbei die Annahme plausibel, dass die Schadengrade (d.h. Schadenhöhe in % der Versicherungssumme) aller Risiken näherungsweise identisch verteilt sind. Summenexzedenten sind in der Sachversicherung üblich, da sie unter dieser Annahme das Portefeuille homogenisieren (idealerweise hat man im Selbstbehalt des Summenexzedenten lauter ähnliche Risiken).

Der XLs pro Risiko dient dem Schutz vor Großschäden (bzw. hier aufgrund des AADs dem Schutz vor Häufung von Großschäden), der XL pro Ereignis dem Schutz vor Kumulschäden (meist Naturkatastrophen).

In den Haftpflichtbranchen ist ein solches Rückversicherungsprogramm in der Regel nicht zielführend. Häufig ist die Annahme plausibel, dass alle Risiken ähnliche Schadenhöhenverteilungen haben, die durch unterschiedliche Versicherungssummen nach oben abgeschnitten werden. Unter dieser Annahme würde ein Summenexzedent eine Inhomogenisierung der Risiken im Selbstbehalt bewirken. Daher sind Summenexzedenten in den Haftpflichtbranchen eher unüblich.

Zu 2:

Der Selbstbehalt des Summenexzedenten stellt sich wie folgt dar:

Band Nr.	VS	Anzahl Risiken	Prämie	Schäden gesamt	Schäden aus Wanda	Schäden aus Zeno
1	300	10.000	3.300	1.700	500	100
2	750	5.000	4.000	2.400	1.000	400
3	1.000	1.200	1.000	750	100	50
4	1.000	290	100	150	25	5
5	2.000	10	100	0	0	0
Summe		16.500	8.500	5.000	1.625	555

Für die Abgabe des Summenexzedenten erhält man:

Band Nr.	VS	Anzahl Risiken	Prämie	Schäden gesamt	Schäden aus Wanda	Schäden aus Zeno
1	0	10.000	0	0	0	0
2	0	5.000	0	0	0	0
3	1.000	1.200	1.000	750	100	50
4	3.000	290	300	450	75	15
5	4.000	10	200	0	0	0
Summe		16.500	1.500	1.200	175	65

Die Provision beläuft sich auf $10\% \cdot 1.500 = 150$, der Gewinn nach Verwaltungskosten und Verlustvortrag auf $1.500 - 1.200 - 10\% \cdot 1.500 - 4\% \cdot 1.500 - 50 = 40$. Es ergibt sich ein Gewinnanteil von $30\% \cdot 40 = 12$. Die externen Kosten des Rückversicherers belaufen sich somit auf $150 + 12 = 162$ (Provision + Gewinnanteil).

Das GNPI für die XLs ist gleich der Selbstbehaltsprämie des Summenexzedenten, d.h. 8.500. Die RV-Prämie für den XL pro Risiko beläuft sich also auf $4\% \cdot 8.500 = 340$. Externe Kosten fallen beim XL pro Risiko nicht an. Einzelschäden im Summenexzedenten-Selbstbehalt (SX-SB) und Erstattung im XL pro Risiko:

Datum	VS im SX-SB	Schadenhöhe im SX-SB	Erstattung im XL pro Risiko	Bemerkung	
05.02	750	750	0	Wanda	AAD!
30.03	750	500	50	Feuer	AAD!
03.04	750	250	50	Zeno	
08.10	1.000	400	200	Feuer	
Summe		1.900	300		

Für den XL pro Ereignis beläuft sich die Upfront-Prämie auf $3\% \cdot 8.500 = 255$, externe Kosten für den Rückversicherer gibt es nicht. Der Schaden und die Wiederauffüllungsprämie im XL pro Ereignis berechnet sich wie folgt:

	SB-Schaden nach SX und XL pro Risiko	Erstattung im XL pro Ereignis	WA-Prämie (in % Upfront Prämie)
Wanda	1.625	800	50%
Zeno	505	105	0%
Summe	2.130	905	50%

Der Rückversicherer erhält eine Wiederauffüllungsprämie von $50\% \cdot 255$, die gesamte Rückversicherungsprämie für den XL pro Ereignis beläuft sich also auf $150\% \cdot 255 = 382{,}5$.

Lösung zu Aufgabe 3.2:

Zu 1:

Nach dem Satz von Borch ist die Quote genau dann Pareto-optimal, wenn es ein $k > 0$ gibt, so dass

$$\hat{u}'(\hat{c} + \hat{N} - qS) = k \cdot \tilde{u}'(\tilde{c} + \tilde{N} - (1-q)S)$$

gilt.

Zu 2:

Nach 1. ist die Quote jedenfalls Pareto-optimal, falls

$$\hat{u}'(\hat{c} + \hat{N} - qx) = k \cdot \tilde{u}'(\tilde{c} + \tilde{N} - (1-q)x)$$

für ein $k > 0$ und alle x gilt. Mit $\tilde{u}'(x) = e^{-x}$ und $y := \hat{c} + \hat{N} - qx$ also

$$\hat{u}'(y) = k \cdot \tilde{u}'\left(\tilde{c} + \tilde{N} - \tfrac{1-q}{q}(\hat{c} + \hat{N} - y)\right) = k \cdot e^{-\tilde{c} - \tilde{N} + \frac{1-q}{q}(\hat{c}+\hat{N})} e^{-\frac{1-q}{q}y}.$$

Für $k := \frac{1-q}{q} \cdot e^{\tilde{c}+\tilde{N}-\frac{1-q}{q}(\hat{c}+\hat{N})}$ erhält man beispielsweise

$$\hat{u}'(x) = \tfrac{1-q}{q} \cdot e^{-\frac{1-q}{q}x}.$$

Eine mögliche Lösung ist daher

$$\hat{u}(x) = -e^{-\frac{1-q}{q}x}.$$

(Beachte: Dies ist auch wirklich eine Nutzenfunktion).

Klausur Spezialwissen Schaden 2010 (neue PO)

Aufgabe 4 (Modellierung 30 Punkte, davon Teile a), b) je 8 Punkte, Teil c) 14 Punkte)

Genereller Hinweis:

Aussagen aus dem Skript und bewiesene Aussagen aus den Vorbereitungsaufgaben dürfen ohne Beweis verwendet werden.

a) In einem mehrjährigen Risikomodell wird folgende Festlegung für den zweijährigen Risikokapitalbedarf vorgeschlagen: Es sei X_1 der Verlust des ersten und X_2 der Verlust des zweiten Jahres, und es sei

$$Z := \max\{X_1, X_1 + X_2\}$$

der maximale kumulierte Verlust. Dann wird der zweijährige Risikokapitalbedarf definiert als Expected Shortfall von Z zum fest vorgegebenen Niveau $\alpha \in (0;1)$, d.h.

$$\rho(Z) := ES_\alpha(Z).$$

   i) Begründen Sie:

      1) $ES_\alpha(X_1) \leq ES_\alpha(Z)$

      2) $ES_\alpha(Z) \leq ES_\alpha(X_1) + ES_\alpha(X_2^+)$ mit $X_2^+ := \max(X_2, 0)$.

      Welche Eigenschaften des Expected Shortfalls gehen hierbei ein?

   ii) Welche der Aussagen aus Teil i) bleibt bzw. bleiben in voller Allgemeinheit gültig, wenn anstelle des Expected Shortfalls generell der Value at Risk verwendet wird?

   iii) Zeigen Sie: Gilt $VaR_\alpha(X_2) > 0$, so folgt $ES_\alpha(X_2^+) = ES_\alpha(X_2)$.
   Welche Interpretation besitzen in diesem Fall die Aussagen aus Teil i)?

b) Zwischen zwei verlustbeschreibenden Zufallsgrößen X und Y bestehe der Zusammenhang

$$Y = \exp(-X).$$

Die Verteilungsfunktion F von X sei stetig.

   i) Zeigen Sie, dass die gemeinsame Verteilungsfunktion von (X, Y) gegeben ist durch die Funktion H auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ mit

$$H(x, y) = \max\{F(x) - F(-\ln(y)), 0\}.$$

   ii) Beweisen Sie, dass die zu H gehörige Copula eindeutig bestimmt ist als Antimonotonie-Copula C mit

$$C(u, v) := \max\{u + v - 1, 0\}.$$

c) Bei 8 Simulationen des gemeinsamen Risikos (X,Y) ergaben sich folgende Verluste in Mio. EUR:

Simulation	1	2	3	4	5	6	7	8
Verlust Risiko X	-4	-5	0	-5	2	3	4	5
Verlust Risiko Y	6	7	-8	1	-3	-2	-1	0

i) Schätzen Sie die Erwartungswerte der Einzelrisiken und des Gesamtrisikos.

ii) Schätzen Sie die Risikokapitalbedarfe der Einzelrisiken und des Gesamtrisikos, wenn als Risikomaß der Expected Shortfall zum Sicherheitsniveau 75% angesetzt wird.

iii) Berechnen Sie den allokierten Risikokapitalbedarf für die beiden Risiken X und Y unter Verwendung

- der proportionalen Allokation und
- der TailVaR-Allokation.

iv) Nennen Sie Vor- und Nachteile für jedes der beiden Allokationsverfahren (proportionale Allokation und TailVaR-Allokation).

Lösung zu Aufgabe 4 (Modellierung)

a) Zweijähriges Risikokapital

i) Offensichtlich gilt $X_1 \leq \max\{X_1, X_1 + X_2\} = Z$. Aus der *Isotonie* des Expected Shortfalls folgt dann sofort

$$ES_\alpha(X_1) \leq ES_\alpha(Z).$$

Weiter gilt $Z = \max\{X_1, X_1 + X_2\} = X_1 + \max\{0, X_2\} = X_1 + X_2^+$. Aus der *Sub-Additivität* des Expected Shortfalls folgt dann sofort

$$ES_\alpha(Z) = ES_\alpha(X_1 + X_2^+) \leq ES_\alpha(X_1) + ES_\alpha(X_2^+).$$

ii) Da der Value at Risk generell isoton ist (Beweis wurde in den Vorbereitungsaufgaben geführt), bleibt Aussage 1) in voller Allgemeinheit gültig, wenn man den Expected Shortfall durch den Value at Risk ersetzt. Da der Value at Risk jedoch im Allgemeinen nicht sub-additiv ist (auch nicht bei positiven Zufallsgrößen, Gegenbeispiele wurden in den Vorbereitungsaufgaben diskutiert), bleibt Ungleichung 2) nicht in voller Allgemeinheit gültig.

iii) Gemäß Vorbereitungsaufgaben folgt aus $VaR_\alpha(X_2) > 0$ die Identität

$$VaR_u(X_2) = VaR_u(X_2^+) \text{ für alle } u \geq \alpha.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X_2) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(X_2) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(X_2^+) \\ &= ES_\alpha(X_2^+). \end{aligned}$$

Die Ungleichungen aus i) Besagen in diesem Fall, dass der zweijährige Risikokapitalbedarf bei Verwendung des Expected Shortfalls nach unten durch den Risikokapitalbedarf des ersten Jahres und nach oben durch die Summe aus Risikokapitalbedarf des ersten und Risikokapitalbedarf des zweiten Jahres beschränkt ist.

b) Copulas

i) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $y > 0$, dann gilt:

$$\begin{aligned} H(x,y) &= P(X \le x, Y \le y) \\ &= P(X \le x, \exp(-X) \le y) \\ &= P(X \le x, X \ge -\ln(y)). \end{aligned}$$

1. Fall: $x >= -\ln(y)$
Dann folgt (man beachte dass F stetig und isoton ist)

$$H(x,y) = P(-ln(y) \le X \le x) = F(x) - F(-\ln(y)) = (F(x) - F(-\ln(y)))^+$$

2. Fall: $x < -\ln(y)$
Dann folgt aus der Isotonie von F die Ungleichung $F(x) \le F(-\ln(y))$, damit also

$$H(x,y) = P(X \le x, X \ge -\ln(y)) = P(\emptyset) = 0 = (F(x) - F(-\ln(y)))^+.$$

ii) Die Randverteilung G von Y kann entweder unter Ausnutzung der Stetigkeit von F bestimmt werden durch

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \le y) \\ &= P(\exp(-X) \le y) \\ &= P(X \ge -\ln(y)) \\ &= 1 - P(X < -\ln(y)) \\ &= 1 - P(X \le -\ln(y)) \\ &= 1 - F(-\ln(y)) \text{ für alle } y > 0 \end{aligned}$$

oder alternativ unter Verwendung der Angabe aus b)i) durch

$$\begin{aligned} G(y) &= \lim_{x\to\infty} H(x,y) \\ &= \lim_{x\to\infty} (F(x) - F(-\ln(y)))^+ \\ &= (1 - F(-\ln(y)))^+ \\ &= 1 - F(-\ln(y)) \text{ für alle } y > 0. \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit von F folgt dann die Stetigkeit von G.

Weiter gilt für $x \in \mathbb{R}$ und $y > 0$

$$\begin{aligned} C(F(x), G(y)) &= \max\{F(x) + G(y) - 1, 0\} \\ &= \max\{(F(x) + 1 - F(-\ln(y)) - 1, 0\} \\ &= \max\{F(x) - F(-\ln(y)), 0\} \\ &= H(x,y). \end{aligned}$$

Damit ist C als Antimonotonie-Copule eine zu H gehörige Copula, und aus der Stetigkeit der Randverteilungen F und G folgt zusammen mit dem Theorem von Sklar, dass C eindeutig bestimmt ist.

c) Risikokapital und Kapitalallokation

i) Erwartungswert des Risikos X:

$EX = (-4 - 5 + 0 - 5 + 2 + 3 + 4 + 5) / 8 = 0$

Erwartungswert des Risikos Y:

$EY = (6 + 7 - 8 + 1 - 3 - 2 - 1 + 0) / 8 = 0$

Erwartungswert des Gesamtrisikos X+Y:

$E(X+Y) = EX + EY = 0 + 0 = 0$

ii) Gemäß Skript ist der Schätzer für den Expected Shortfall zum Sicherheitsniveau 75% der mittlere Verlust der $m = 8 \cdot (1 - 0{,}75) = 2$ schlechtesten Simulationen. Für Risiko X ergibt sich der Schätzer für den Expected Shortfall und damit der Schätzer für den Risikokapitalbedarf von X gemäß:

$R_X = ES_{75\%}(X) = (4 + 5) / 2 = 4{,}5.$

Für Risiko Y enthält man entsprechend als Schätzer für den Expected Shortfall und damit als Schätzer für den Risikokapitalbedarf von Y:

$R_Y = ES_{75\%}(Y) = (6 + 7) / 2 = 6{,}5.$

Der Gesamtverlust X + Y ergibt sich wie folgt:

Szenario	1	2	3	4	5	6	7	8
Verlust Risiko X	-4	-5	0	-5	2	3	4	5
Verlust Risiko Y	6	7	-8	1	-3	-2	-1	0
Verlust Gesamtrisiko X+Y	2	2	-8	-4	-1	1	3	5

Der Expected Shortfall und damit der Gesamt-Risikokapitalbedarf für X+Y wird geschätzt zu

$R_{X+Y} = ES_{75\%}(X + Y) = (3 + 5) / 2 = 4.$

iii) Unter Verwendung der proportionalen Allokationsmethode ergibt sich für das Risiko X ein allokierter Kapitalbedarf von

$$\Re_{\text{Pr}}(X) = \frac{R_X}{R_X + R_Y} \cdot R_{X+Y} = \frac{4{,}5}{4{,}5 + 6{,}5} \cdot 4 = \frac{18}{11} \approx 1{,}64$$

und für das Risiko Y ein allokierter Kapitalbedarf von

$$\Re_{\text{Pr}}(Y) = \frac{R_Y}{R_X + R_Y} \cdot R_{X+Y} = \frac{6{,}5}{4{,}5 + 6{,}5} \cdot 4 = \frac{26}{11} \approx 2{,}36.$$

Unter Verwendung der TailVaR-Allokation ergibt sich für das Risiko X ein allokierter Kapitalbedarf von

$$\Re_T(X) = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$$

und für das Y ein allokierter Kapitalbedarf von

$$\Re_T(Y) = \frac{-1+0}{2} = -0{,}5.$$

iv) Vorteile des proportionalen Allokationsprinzips sind die einfache Berechenbarkeit und die einfache Nachvollziehbarkeit. Des Weiteren addieren sich die allokierten Kapitalbedarfe zum Gesamtkapital auf (vollständige Kapitalallokation). Ein wesentlicher Nachteil des proportionalen Allokationsprinzips ist die Tatsache, dass keine Abhängigkeiten der Risiken untereinander berücksichtigt werden und so Segmente, die positiv zur Diversifikation des Unternehmens beitragen, „nicht belohnt“ werden, weshalb das Verfahren als nicht risikogerecht erscheint.

Vorteile der TailVaR-Allokation: Dieses Verfahren misst den tatsächlichen Einfluss eines Risikosegmentes auf den Gesamt-Risikokapitalbedarf. Aus Risikosicht ist dieses Verfahren deshalb adäquat. Es ist transparent und damit gut nachvollziehbar. Die vier Kohärenzeigenschaften sind laut Literatur erfüllt.
Nachteile der TailVaR-Allokation: Negative Risikokapitalien entstehen, wenn das Segment im Mittel nur Gewinne zu den schlechtesten Gesamtszenarien beisteuert. Dies kann im Extremfall dazu führen, dass das Segment, das den größten Risikokapitalbedarf (standalone) benötigt, in der allokierten Sicht ein negatives Risikokapital zugewiesen bekommt (siehe Segment Y, Aufgabe iii). Aus Steuerungssicht könnte dies ein Nachteil sein.