Klausur Spezialwissen Schaden 2009 (neue PO)

Aufgabe 1 (Tarifierung, 50 Punkte)

Aufgabe 1.1 (Erfahrungstarifierung)

Verwenden Sie für die Gamma-Verteilung die Parametrisierung $f(\lambda) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}$

und für die Gamma-Funktion gilt $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$

a) (5 Punkte) Bestimmen Sie aus der beigefügten Schadenanzahlverteilung N Erwartungswert und Varianz.

Schadenanzahl	Anzahl Risiken
0	20.382
1	2.421
2	289
3	39
4	5
Gesamt	23.136

b) (4 Punkte) Prüfen Sie qualitativ, ob Poisson-Verteilung oder Negativ-Binomial-Verteilung hier adäquat sind.
Nennen Sie ein Testverfahren zur Überprüfung einer Verteilungshypothese.

c) (10 Punkte) Erläutern Sie die Struktur des Negativ-Binomial-Modells, stellen Sie dies formelmäßig dar und leiten Sie die Formeln für Erwartungswert und Varianz der Negativ-Binomial-Verteilung auf Basis dieser Modellstruktur für den 1-Jahres-Zeithorizont her.

d) (6 Punkte) Bei der Erfahrungstarifierung sind der a-priori-Erwartungswert und der a-posteriori-Erwartungswert wesentliche Größen. Im Negativ-Binomial-Modell ist der a-priori-Erwartungswert der Zufallsvariable Schadenanzahl N: $E(N) = \frac{\alpha}{\beta}$ und der a-posteriori-Erwartungswert $E(\Lambda | N = n) = \frac{\alpha + n}{\beta + t}$, wobei Λ die zum Poisson-Parameter gehörige Zufallsvariable und n die beobachtete Schadenanzahl der vergangenen t Jahre ist.

Erläutern Sie die Bedeutung dieser Größen hinsichtlich Aussage und Verwendung.

Aufgabe 1.2 (GLM)

a) (5 Punkte) Im Fall der klassischen linearen Regression lautet die Regressionsgleichung $y = \vec{x} \cdot \vec{\beta} + e$, dh die zu erklärende Variable y wird durch eine Linearkombination aus den erklärenden Variablen $\vec{x}$ mit Koeffizienten $\vec{\beta}$ approximiert, wobei e ein normalverteilter Störterm mit Erwartungswert 0 ist. Das Produkt $\vec{x} \cdot \vec{\beta}$ wird auch als sytematische Komponente μ bezeichnet. Somit ist $y = \mu + e$ und normalverteilt mit $E(y) = \mu$.
Nennen Sie die 3 wesentlichen Elemente, die bei der Verallgemeinerung dieses Ansatzes zu GLM zum Tragen kommen sowie ein Beispiel eines GLM (ungleich der klassischen linearen Regression).

b) (8 Punkte) Die Dichten der Verteilungen aus der Exponentialfamilie genügen der Darstellung $f(x;\vartheta,\Phi) = C(x,\Phi) \cdot \exp((x\vartheta - b(\vartheta))/a(\Phi))$
Beweisen oder widerlegen Sie, dass LogNormal- und Normalverteilung mit den Dichtefunktionen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp(-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2})$ *und* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$ zur Exponentialfamilie gehören.

c) (6 Punkte) Die Dichte der Poisson-Verteilung mit Gewichten w_i ist gegeben durch
$f(k_i) = \frac{(w_i\lambda)^{k_i}}{k_i!}\exp(-w_i\lambda)$
Leiten Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Poisson-Parameter λ aus der log-likelihood-Funktion her.

Begründen Sie im Rahmen der Tarifierung die besondere Relevanz des auf der Poisson-Verteilung basierenden GLM.

d) (6 Punkte) Die Devianz dient zur Modellbeurteilung. Im Fall der Gamma-Verteilung gilt die Darstellung $D(y,\mu) = 2\sum w_i(\frac{y_i-\mu_i}{\mu_i} - \log\frac{y_i}{\mu_i})$
Leiten Sie die Approximation durch die X^2-Statistik her.
Hinweis: $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ *für* $|x|<1$

Klausur Spezialwissen Schaden 2009 (neue PO)

Aufgabe 1 (Tarifierung, 50 Punkte): Musterlösungen

Aufgabe 1.1 (Erfahrungstarifierung)

a) (5Punkte) Für den Erwartungswert E(N) gilt:

$$E(N) = \frac{1}{Gesamtzahl\ \ Risiken} \sum_{i=0}^{4} Schadenanzahl_i \cdot Risikenanzahl_i = 0{,}1355$$

Damit folgt für die Varianz:

$$VarN\ = \frac{1}{Gesamtzahl\ Risiken} \sum_{i=0}^{4} Risikenanzahl_i \cdot (i - E(N))^2 = 0{,}1549$$

b) (4 Punkte) Im Falle der Poisson-Verteilung gilt E(N) = Var N. Dies ist hier nicht der Fall, daher ist die Annahme einer Poisson-Verteilung nicht adäquat.
Im Fall der Negativ-Binomial-Verteilung ist E(N) < Var N, so dass diese Verteilung hier zugrunde liegen könnte.
Eine Überprüfung einer solchen Verteilungshypothese ist mit dem Chi²-Test möglich.

c) (10 Punkte) Im Negativ-Binomial-Modell wird angenommen, dass das Einzelrisiko einer Poisson-Verteilung genügt. Der Poisson-Parameter wiederum folgt einer Gammaverteilung als Strukturfunktion.

Damit gilt für die bedingte Zufallsvariable Schadenzahl N:

$$P(N = n|\lambda) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Somit ergibt sich für die unbedingte Zufallsvariable N mit der Dichte der Gammaverteilung und Verwendung der Darstellung der Gamma-Funktion:

$$P(N = n) = \int_0^\infty P(N = n|\lambda)\, f(\lambda) d\lambda = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{n+\alpha-1} e^{-(\beta+1)\lambda} d\lambda = (Substitution\ x = (\beta+1)\lambda)$$

$$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty (\frac{x}{\beta+1})^{n+\alpha-1} e^{-x} \frac{dx}{\beta+1} = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)} (\frac{\beta}{\beta+1})^\alpha (\frac{1}{\beta+1})^n$$

Für Erwartungswert und Varianz der Negativ-Binomial-Verteilung gilt mit dem Poisson-Parameter λ und der zugehörigen Zufallsvariable Λ:

$$E(N) = E(E(N|\Lambda)) = E(\Lambda) = \int_0^\infty \lambda f(\lambda) d\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$VarN = E(Var\ N|\Lambda) + Var\ (E(N|\Lambda)) = E(\Lambda) + Var\ \Lambda = \frac{\alpha}{\beta} + \int_0^\infty \lambda^2 f(\lambda) d\lambda - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta}(1 + \frac{1}{\beta}) = E(N)(1 + \beta^{-1})$$

Hierbei wird jeweils analog zur Bestimmung der unbedingten Wahrscheinlichkeiten die Substitutionsregel und die Darstellung der Gamma-Funktion verwendet.

d) (6 Punkte) A priori, dh ohne Kenntnis einer Schadenerfahrung kann jedem Risiko nur der allgemeine Erwartungswert bzgl. der Schadenanzahl E(N) zugeordnet werden.

A posteriori, dh nach Kenntnis der Schadenerfahrung kann diese berücksichtigt werden. Damit ergibt sich für schadenfreie Risiken eine geringere erwartete Schadenanzahl, für schadenbehaftete Risiken eine höhere erwartete Schadenanzahl als der a-priori-Erwartungswert.

Der Quotient a-posteriori-Erwartungswert/a-priori-Erwartungswert liefert dann die Beitragssätze des zugehörigen Bonus/Malus-Systems.

<u>Aufgabe 1.2 (GLM)</u>

a) (5 Punkte) Im verallgemeinerten linearen Modell wird die Beziehung zwischen dem Erwartungswert der zu erklärenden Variablen y und der Linearkombination aus den erklärenden Variablen $\vec{x}$ mit Koeffizienten $\vec{\beta}$, der als <u>linearer Prädiktor</u> bezeichnet wird, durch eine <u>Link-Funktion</u> beschrieben:

$$g(\mu) = \vec{x} \cdot \vec{\beta} \quad bzw. \quad \mu = g^{-1}(\vec{x} \cdot \vec{\beta})$$

Die Verteilungen der Variablen y gehören zur <u>Exponentialfamilie</u>.

Ein Beispiel eines GLM ist der Logarithmus als Link-Funktion mit der Poisson-Verteilung.

b) (8 Punkte)
(i) LogNormal-Verteilung

Es gilt: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp(-\frac{(\log x)^2}{2\sigma^2}) \cdot \exp(\frac{\mu \log x - \frac{1}{2}\mu^2}{\sigma^2})$

Würde die LogNormal-Verteilung zur Exponentialfamilie gehören, müsste gelten:

$$\Rightarrow x\vartheta - b(\vartheta) = \mu \log x - \frac{1}{2}\mu^2$$

Diese Identität ist in x nicht erfüllbar. Zudem müsste dann als Ableitung der Funktion b der Erwartungswert der LogNormal-Verteilung μ sein, was ebenfalls nicht gegeben ist.
Daher gehört die LogNormal-Verteilung nicht zur Exponential-Familie.

(ii) Normal-Verteilung

Es gilt:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) \cdot \exp(\frac{x\mu - \frac{1}{2}\mu^2}{\sigma^2})$$

$$\Rightarrow \mu = \vartheta; b(\vartheta) = \frac{1}{2}\mu^2; a(\Phi) = \sigma^2; C(x,\Phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$$

Damit gehört die Normal-Verteilung zu Exponentialfamilie.

c) (6 Punkte) Es gilt:

$$\log \prod_{i=1}^{n} f(k_i) = \sum_{i=1}^{n} \log f(k_i) = \sum_{i=1}^{n} (k_i \log(w_i\lambda) - w_i\lambda - \log k_i!)$$

Ableitung nach λ und Nullsetzen ergibt:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{k_i}{\lambda} - w_i) \Leftrightarrow \lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

Zum Poisson-GLM gehört als kanonische Link-Funktion der Logarithmus, der dem multiplikativen Modell entspricht, das in der Tarifierung der Standardansatz ist.

d) (6 Punkte) Quadratische Approximation des Logarithmus gem. Hinweis ergibt:

$$D(y,\mu) = 2\sum w_i (\frac{y_i - \mu_i}{\mu_i} - (\frac{y_i}{\mu_i} - 1) + \frac{1}{2}(\frac{y_i}{\mu_i} - 1)^2) \approx \sum w_i \frac{(y_i - \mu_i)^2}{\mu_i^2}$$

Aufgabe zur Schadenreservierung (Spezialwissen 2009)
(neue PO: gesamt (50 Punkte), bzw. alte PO: nur bis incl. Aufgabe 2c (30 Punkte))

Sei C_{ik}, $1 \leq i, k \leq n$, der Schadenstand von Anfalljahr i nach k Abwicklungsjahren und $S_{ik} = C_{ik} - C_{i,k-1}$ der Zuwachs. Die Realisierungen für $i+k \leq n+1$ seien bekannt. Benutzen Sie diese Bezeichnungen bei der Beantwortung folgender Fragen:

a) Zum Chain-Ladder-Modell (CL):

aa) Nennen Sie die drei Modellannahmen des Chain-Ladder-Modells. (3 Punkte)

ab) Beweisen Sie, dass im CL-Modell die beiden aufeinander folgenden Einzel-Abwicklungsfaktoren $F_{ik} = C_{ik}/C_{i,k-1}$ und $F_{i,k+1} = C_{i,k+1}/C_{ik}$ unkorreliert sind. (7 Punkte)

ac) Wie und woran kann man mit Hilfe des CL-Modells einen Kalenderjahr-Effekt erkennen? (4 Punkte)

b) Zum Zuwachsquotenmodell (ZQ):

ba) Nennen Sie die drei Modellannahmen des Zuwachsquoten-Modells und erläutern Sie kurz die dabei benutzten zusätzlichen Bezeichnungen. (3 Punkte)

bb) Geben Sie die üblichen Schätzer für alle Modellparameter sowie für die Reserve $R_i = C_{in} - C_{i,n+1-i}$ an. (6 Punkte)

bc) Berechnen Sie den Schätzfehler $\mathrm{Var}(\hat{R}_i)$ als Funktion der Modellparameter. (7 Punkte)

bd) Wozu kann man den Schätzfehler (bzw. einen Schätzer dafür) verwenden? (3 Punkte)

be) Sind im ZQ-Modell die zwei aufeinander folgenden Einzel-Abwicklungsfaktoren $C_{ik}/C_{i,k-1}$ und $C_{i,k+1}/C_{ik}$ unkorreliert oder positiv korreliert oder negativ korreliert (ohne Beweis)? (3 Punkte)

bf) Welches sind die beiden Hauptunterschiede zwischen dem ZQ-Modell und dem Bornhuetter/Ferguson-Modell? (4 Punkte)

c) Zu anderen Modellen

ca) Für die Bornhuetter/Ferguson-Reserve $\hat{R}_i = \hat{U}_i(1 - \hat{z}_{n+1-i})$ braucht man einen Endstandsschätzer $\hat{U}_i$. Begründen Sie, wieso es gegen die Grundidee der Bornhuetter/Ferguson-Methode verstößt, wenn man als $\hat{U}_i$ den aus der letztjährigen Reserve $\hat{R}_i^{VJ}$ hergeleiteten Endstandsschätzer $C_{i,n-i} + \hat{R}_i^{VJ}$ nimmt. (5 Punkte)

cb) Wie und woran kann man an Hand der beobachteten Daten erkennen, ob der Einsatz der Munich Chain Ladder angezeigt ist (ohne die Parameter- oder Reserve-Schätzer auszurechnen)? (5 Punkte)

Lösung zur Schadenreservierung

aa) (i) Die Anfalljahre $\{C_{i1}, \ldots, C_{in}\}$, $1 \le i \le n$, sind unabhängig.

(ii) $E(C_{ik}| C_{i1}, \ldots, C_{i,k-1}) = C_{i,k-1} f_k$ mit unbekannten Parametern f_k .

(iii) $Var(C_{ik}| C_{i1}, \ldots, C_{i,k-1}) = C_{i,k-1} \sigma_k^2$ mit unbekannten Parametern σ_k^2 .

ab) Zu zeigen ist $E(F_{ik} \cdot F_{i,k+1}) = E(F_{ik}) \cdot E(F_{i,k+1})$. Mit $D_{ik} = \{C_{i1}, \ldots, C_{ik}\}$ gilt $E(F_{i,k+1}|D_{ik}) = f_{k+1}$ wegen (ii). Durch iterierte Erwartungswertbildung erhält man schließlich

$$E(F_{ik}F_{i,k+1}) = E\big(E(F_{ik}F_{i,k+1}|D_{ik})\big) = E\big(F_{ik}E(F_{i,k+1}|D_{ik})\big) = E(F_{ik}f_{k+1}) = E(F_{ik})E(F_{i,k+1}) .$$

ac) Man bildet die standardisierten Residuen $r_{ik} = \dfrac{C_{ik} - C_{i,k-1}\hat{f}_k}{\sqrt{C_{i,k-1}\hat{\sigma}_k^2}}$ (evtl. mit Korrekturterm), $2 \le i+k \le n+1$, und trägt sie gegen die Kalenderjahre i+k auf. Zeigt sich von einem bestimmten Kalenderjahr zum nächsten eine deutliche Verschiebung der Residuen nach oben oder unten, so spricht man von einem Kalenderjahreffekt.

ba) (i) Alle Zuwächse S_{ik} sind unabhängig.

(ii) $E(S_{ik}) = v_i m_k$ mit bekannten Volumina v_i und unbekannten Parametern m_k.

(iii) $Var(S_{ik}) = v_i s_k^2$ mit unbekannten Parametern s_k.

bb) $$\hat{m}_k = \sum\nolimits_{i=1}^{n+1-k} S_{ik} \Big/ \sum\nolimits_{i=1}^{n+1-k} v_i \ ,$$

$$\hat{s}_k^2 = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i\left(\frac{S_{ik}}{v_i} - \hat{m}_k\right)^2 , \qquad \hat{s}_n^2 = \min\left\{ \hat{s}_k^2 \mid 1 \le k \le n-1\right\} ,$$

$$\hat{R}_i = v_i\left(\hat{m}_{n+2-i} + \ldots + \hat{m}_n\right) .$$

bc) $$Var(\hat{R}_i) = v_i^2\left(Var(\hat{m}_{n+2-i}) + \ldots + Var(\hat{m}_n)\right) \quad \text{mit}$$

$$Var(\hat{m}_k) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} Var(S_{ik})}{\left(\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i\right)^2} = \frac{\sum_i v_i s_k^2}{\left(\sum_i v_i\right)^2} = \frac{s_k^2}{\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i} \ .$$

bd) Mit Hilfe des Schätzfehlers $Var(\hat{R}_i)$ kann man ein Konfidenzintervall für $E(R_i)$ angeben und so erkennen, ob andere Reserveschätzer signifikant verschieden sind oder nicht.

be) Man kann zeigen, dass $C_{ik}/C_{i,k-1}$ und $C_{i,k+1}/C_{ik}$ negativ korreliert sind, was anschaulich einleuchtet, weil C_{ik} beim ersten Term im Zähler, beim zweiten aber im Nenner steht. (Dieses Argument zieht bei 1b nicht, da die Zuwächse nicht unabhängig sind.)

bf) Beim BF-Modell tritt and die Stelle des bekannten Volumens v_i ein unbekannter Parameter x_i. Außerdem beinhaltet das BF-Modell nicht nur eine bestimmte Anzahl Entwicklungsjahre, sondern gleich den gesamten Tail bis zum Endstand.

ca) Die Grundidee von BF besagt, dass in jedem Anfalljahr die bisher bekannten Schäden nichts über die künftige Entwicklung aussagen. Der beim letztjährigen Reserving erhaltene Endstandsschätzer $C_{i,n-i} + \hat{R}_i^{VJ}$ beruht aber wesentlich auf den bisher bekannten Schäden

$C_{i,n-i}$, d.h. ist sehr nieder bzw. sehr hoch, wenn $C_{i,n-i}$ sehr nieder bzw. sehr hoch ist und ist daher kein guter a-priori-Schätzer $\hat{U}_i$, wie er in der BF-Reserveformel gebraucht wird. Z. B. würde ein in $C_{i,n-i}$ enthaltener Großschaden bewirken, dass auch die weitere Schadenentwicklung deutlich überdurchschnittlich eingeschätzt wird.

cb) Entsprechend den Modellannahmen der MCL plotte man für jedes Abwicklungsjahr die Einzel-Abwicklungsfaktoren $C_{i,k+1}/C_{ik}$ bzw. $D_{i,k+1}/D_{ik}$ des Zahlungs- bzw. Aufwandsdreiecks gegen die vorangehenden Quotienten D_{ik}/C_{ik} bzw. C_{ik}/D_{ik}. Ist hierbei nirgends ein von Null abweichender Trend zu sehen, so ist der Einsatz von MCL nicht angezeigt. Gibt es aber Abwicklungsjahre mit klarem (linearen) Trend, so sollte man die MCL anwenden.

Aufgabe zur Risikoteilung (Spezialwissen 2009, alte PO) (30 Punkte)

a) Drücken Sie die Entlastungseffektfunktion der Lognormalverteilung allgemein mit Hilfe der Verteilungsfunktion Φ der Standard-Normalverteilung aus und berechnen Sie damit den Entlastungseffekt für einen Selbstbehalt von 300 bei einer Lognormalverteilung mit Erwartungswert 1500 und Formparameter $\sigma = 1{,}6$. (20 Punkte)

b) Sei F die Verteilungsfunktion der Schadenhöhe X. Beweisen Sie die Identität

$$E\big(\min(X,a)\big) = \int_0^a \big(1 - F(x)\big)dx \quad \text{für beliebiges } a > 0. \quad \text{(10 Punkte)}$$

Lösung zur Risikoteilung

a) Sei X die zur Lognormalverteilung F gehörende Zufallsvariable, dann ist die Entlastungseffektfunktion r(a) bei Selbstbehalt a gegeben durch

$$r(a) = \frac{E(\min(X,a))}{E(X)} = \frac{1}{E(X)}\left(\int_0^a x\,dF(x) + a(1-F(a))\right).$$

Für die Lognormalverteilung gilt laut Formelsammlung

$$F(a) = \Phi\left(\frac{\ln(a)-\mu}{\sigma}\right),$$

$$\int_0^a x\,dF(x) = E(X) - \int_a^\infty x\,dF(x) = E(X) - E(X \mid X > a)(1-F(a)) =$$

$$= E(X) - E(X)\left(1-\Phi\left(\frac{\ln(a)-\mu}{\sigma}-\sigma\right)\right) = E(X)\Phi\left(\frac{\ln(a)-\mu}{\sigma}-\sigma\right),$$

$$E(X) = \exp(\mu + \sigma^2/2).$$

Damit wird

$$r(a) = \Phi\left(\frac{\ln(a)-\mu}{\sigma}-\sigma\right) + \frac{a}{E(X)}\left(1-\Phi\left(\frac{\ln(a)-\mu}{\sigma}\right)\right).$$

Im Falle a = 300, E(X) = 1500, σ = 1,6 ergibt sich

$$\mu = \ln(E(X)) - \sigma^2/2 = 6{,}033,$$

$$\frac{\ln(a)-\mu}{\sigma} = -0{,}206, \qquad \Phi\left(\frac{\ln(a)-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}418,$$

$$\frac{\ln(a)-\mu}{\sigma} - \sigma = -1{,}806, \qquad \Phi\left(\frac{\ln(a)-\mu}{\sigma}-\sigma\right) = 0{,}0355,$$

$$r(300) = 0{,}0355 + 0{,}582/5 = 15{,}2\ \%.$$

b)
$$E(\min(X,a)) = \int_0^\infty \min(x,a)\,dF(x)$$

$$= \int_0^a x\,dF(x) + \int_a^\infty a\,dF(x)$$

$$= [x\,F(x)]_0^a - \int_0^a F(x)\,dx + a(1-F(a))$$

$$= a - \int_0^a F(x)\,dx = \int_0^a (1-F(x))\,dx.$$

Dabei wurde die partielle Integrationsformel

$$\int u\,v' = [u\,v] - \int u'\,v$$

benutzt, die man sich leicht aus der Produktregel $[uv]' = u\,v' + u'\,v$ herleitet.

Klausur Spezialwissen Schaden 2009 (neue PO)

Aufgabe 3 (Risikoteilung, 50 Punkte)

Aufgabe 3.1: (20 Punkte)

Es sei S der Jahresgesamtschaden und N die Nettoprämie eines Erstversicherers vor Rückversicherung. Für einen Rückversicherungsvertrag τ bezeichne $\tilde{S}_\tau$ den im Eigenbehalt des Erstversicherers verbleibende Teil des Jahresschadens und $\hat{S}_\tau := S - \tilde{S}_\tau$ den Jahresschaden des Rückversicherers. Ferner sei $N = \tilde{N}_\tau + \hat{N}_\tau$ die Aufteilung der Nettoprämie auf Erst- und Rückversicherer.

1. Nennen und beschreiben Sie drei verschiedene Modelle, die der Erstversicherer zur Bewertung eines Rückversicherungsvertrages heranziehen kann. (12 Punkte)

2. Zeigen Sie: Zu jedem Rückversicherungsvertrag τ gibt es eine Funktion g, so dass für den durch $\tilde{S}_\theta := g(S)$, $\hat{S}_\theta := S - g(S)$ definierten Rückversicherungsvertrag θ

$$\mathrm{Var}(\tilde{S}_\theta) \leq \mathrm{Var}(\tilde{S}_\tau) \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(\hat{S}_\theta) \leq \mathrm{Var}(\hat{S}_\tau)$$

gilt. (8 Punkte)

Aufgabe 3.2: (30 Punkte)

1. Erläutern Sie, weshalb der Rückversicherer bei Schadenexzedenten i.d. Regel überproportional an der Inflation partizipiert. Argumentieren Sie hierzu beispielsweise mit der Entlastungseffektfunktion und einem unlimitierten XL. (6 Punkte)

2. Um diesen Effekt abzumildern, werden in den sog. „Longtail-Sparten“ üblicherweise Stabilisierungsklauseln vereinbart. Was ist die grundlegende Idee hinter diesen Klauseln? (4 Punkte)

3. Wir betrachten nun einen Schadenexzedenten 2 000 xs 1 000 für das Anfalljahr 2004. Es sei eine APK10 mit Indexbasis 2003 vereinbart. Zur Stabilisierung wird hierbei folgender Index verwendet:

I_{2003}	I_{2004}	I_{2005}	I_{2006}	I_{2007}	I_{2008}
100	105	109	115	120	125

Berechnen Sie für folgenden Schaden aus 2004 die stabilisierten Deckungen sowie kumulierte Schadenzahlungen und Reserve im XL für die Jahre 2004 bis 2008:

	2004	2005	2006	2007	2008
kumulierte Zahlungen	1 000	2 000	2 000	2 000	4 000
Reserve	2 000	1 000	1 000	2 000	0
Schadenaufwand	3 000	3 000	3 000	4 000	4 000

(20 Punkte)

Klausur Spezialwissen Schaden 2009 (neue PO)

Lösung zu Aufgabe 3 (Risikoteilung)

Lösung zu Aufgabe 3.1:

Zu 1:

Varianzmodell:
Wähle τ so, dass $\mathrm{Var}(\tilde{S}_\tau)$ das angestrebte Niveau nicht überschreitet und das erwartete Selbstbehaltsergebnis $\mathrm{E}(\tilde{N}_\tau - \tilde{S}_\tau)$ maximal ist.

Ruinmodell:
Wähle τ so, dass die Ruinwahrscheinlichkeit

$$P\left[\bigcup_{t=1}^{T}\left(c+\sum_{i=1}^{t}(\tilde{N}_{i,\tau}-\tilde{S}_{i,\tau})<0\right)\right]$$

das angestrebte Niveau nicht überschreitet und das erwartete Selbstbehaltsergebnis $\mathrm{E}(\tilde{N}_\tau - \tilde{S}_\tau)$ maximal ist. Hierbei sind T der Planungshorizont, c das verfügbare Sicherheitskapital und $\tilde{N}_{i,\tau}$ bzw. $\tilde{S}_{i,\tau}$ unabhängige Kopien von $\tilde{N}_\tau$ bzw. $\tilde{S}_\tau$.

Nutzenmodell:
Es sei u eine Nutzenfunktion und c das verfügbare Sicherheitskapital. Wähle τ so, dass $\mathrm{E}(u(c+\tilde{N}_\tau - \tilde{S}_\tau))$ maximal ist.

Zu 2:

Wähle $\tilde{S}_\theta := g(S) := \mathrm{E}(\tilde{S}_\tau \,|\, S)$. Dann gilt

$$\mathrm{Var}(\tilde{S}_\theta) = \mathrm{Var}(\mathrm{E}(\tilde{S}_\tau \,|\, S)) \le \mathrm{Var}(\mathrm{E}(\tilde{S}_\tau \,|\, S)) + \mathrm{E}(\mathrm{Var}(\tilde{S}_\tau \,|\, S)) = \mathrm{Var}(\tilde{S}_\tau).$$

Wegen $\hat{S}_\theta = S - \mathrm{E}(\tilde{S}_\tau \,|\, S) = \mathrm{E}(S - \tilde{S}_\tau \,|\, S) = \mathrm{E}(\hat{S}_\tau \,|\, S)$ folgt analog

$$\mathrm{Var}(\hat{S}_\theta) = \mathrm{Var}(\mathrm{E}(\hat{S}_\tau \,|\, S)) \le \mathrm{Var}(\mathrm{E}(\hat{S}_\tau \,|\, S)) + \mathrm{E}(\mathrm{Var}(\hat{S}_\tau \,|\, S)) = \mathrm{Var}(\hat{S}_\tau).$$

□

Lösung zu Aufgabe 3.2:

Zu 1:

Seien X die Schadenhöhe ohne Inflation im kollektiven Modell und

$$r_X(x) := \frac{E(\min(x,X))}{E(X)}$$

die zugehörige Entlastungseffektfunktion. Bezeichne $\tilde{X} := (1+i)X$ die Schadenhöhe mit Inflation $i > 0$ und D die Priorität eines unlimitierten XLs. Ist dann $P(\tilde{X} > D) > 0$, so gilt

$$r_{\tilde{X}}(D) = \frac{E(\min(D,(1+i)X)}{E((1+i)X)} = \frac{E(\min(\frac{D}{1+i}, X))}{E(X)} = r_X\left(\frac{D}{1+i}\right) < r_X(D),$$

d.h. der prozentuale Entlastungseffekt durch den XL ist mit Inflation höher als ohne Inflation.

Zu 2:

Grundlegende Idee hinter Stabilisierungsklauseln ist es, die inflationsbedingte Teuerung bei einem Schaden im gleichen Verhältnis aufzuteilen, wie der Schaden ohne Inflation auf Erst- und Rückversicherer aufgeteilt worden wäre. Hierdurch wird vermieden, dass der Rückversicherer überproportional an der Inflation partizipiert.

Zu 3:

Seien $C := 2\,000$ und $D := 1\,000$. Es bezeichne z_i die dekumulierte Zahlung im Jahr i und r_i die Reserve am Ende des Jahres i, also

i	2004	2005	2006	2007	2008
z_i	1 000	1 000	0	0	2 000
r_i	2 000	1 000	1 000	2 000	0

Mit

$$f_i := \begin{cases} 1 & \text{falls } \frac{I_i}{I_{2003}} < 1,1 \\ \frac{I_{2003}}{I_i} & \text{falls } \frac{I_i}{I_{2003}} \geq 1,1 \end{cases} \quad \text{und} \quad F_i := \frac{z_{2004} + \cdots + z_i + r_i}{f_{2004} z_{2004} + \cdots + f_i z_i + f_i r_i}$$

sind dann $C_i^{\text{stab}} := F_i C$ die stabilisierte Haftung und $D_i^{\text{stab}} := F_i D$ die stabilisierte Priorität im Jahr i. Einsetzen liefert

i	2004	2005	2006	2007	2008
f_i	1,000	1,000	0,870	0,833	0,800
F_i	1,000	1,000	1,045	1,091	1,111
C_i^{stab}	2 000	2 000	2 091	2 182	2 222
D_i^{stab}	1 000	1 000	1 045	1 091	1 111

Bringt man kumulierte Zahlungen und Schadenaufwand des Jahres i in die Deckung C_i^{stab} xs D_i^{stab} ein, so erhält man folgende Zahlen für den XL:

	2004	2005	2006	2007	2008
kumulierte xs-Zahlungen	0	1 000	955	909	2 222
xs-Reserve	2 000	1 000	1 000	1 273	0
xs-Schadenaufwand	2 000	2 000	1 955	2 182	2 222

.

Klausur Spezialwissen Schaden 2009 (neue PO)

Aufgabe 4 (Modellierung, 30 Punkte)

a) (16 Punkte)

Die gemeinsame Verteilung zweier nicht-negativer Risiken X und Y sei gegeben durch die Verteilungsfunktion

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - \max\left[\exp(-\frac{1}{2}x^2), \left(\frac{2}{2+y}\right)^2\right], & (x,y) \in (0,\infty)^2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

i) Bestimmen Sie die Randverteilungen F_1 und F_2 von F.

ii) Zeigen Sie, dass F die eindeutig bestimmte Copula $C(u,v) = \min(u,v)$ besitzt.

iii) Welche asymptotische Tailabhängigkeit besitzen die Risiken X und Y? Welche anschauliche Bedeutung besitzt dieser Wert?

iv) Zeigen Sie, dass die Verteilung von (X,Y) mittels einer einzigen rechteckverteilten Zufallsgröße U simuliert werden kann. Betrachten Sie hierzu zum Beispiel

$$(F_1^{-1} \circ U, F_2^{-1} \circ U).$$

b) (14 Punkte)

Bei 5 Simulationen des gemeinsamen Risikos (X,Y) ergaben sich folgende Verluste in Mio. EUR:

Szenario	1	2	3	4	5
Verlust Risiko X	2,12	1,58	1,18	0,86	0,46
Verlust Risiko Y	4,25	1,75	0,83	0,40	0,17

i) Schätzen Sie aus den Simulationen den Risikokapitalbedarf R_X und R_Y der Einzelrisiken und den Gesamtrisikokapitalbedarf, wenn als Risikomaß die Differenz aus Expected Shortfall zum Niveau 60% und Erwartungswert angesetzt wird.

ii) Ermitteln Sie den Gesamtrisikokapitalbedarf alternativ aus R_X und R_Y aus b) i) unter Verwendung der Wurzelaggregationsformel mit Annahme eines Korrelationskoeffizienten von $\rho_{X,Y} = 0,8$. Welcher Diversifikationseffekt ergibt sich hierbei?

iii) Welche Anforderungen an das Risikomaß aus der Herleitung der Wurzelaggregationsformel erfüllt der Expected Shortfall? Welche Ursache könnte der unterschiedliche Gesamtrisikokapitalbedarf in b) i) und b) ii) haben?

Klausur Spezialwissen Schaden 2009 (neue PO)

Aufgabe 4 (Modellierung, 30 Punkte)

a) (16 Punkte)

i) Randverteilungen:

$$F_1(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y),\ \ F_2(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y).$$

Für $x \le 0$ folgt sofort $F(x,y) = 0$ für alle y und damit $F_1(x) = 0$.
Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \lim_{y\to\infty}\left(1 - \max\left[\exp(-\frac{1}{2}x^2), \left(\frac{2}{2+y}\right)^2\right]\right) \\ &= 1 - \max\left[\exp(-\frac{1}{2}x^2), 0\right] \\ &= 1 - \exp(-\frac{1}{2}x^2). \end{aligned}$$

F_1 gehört zu einer Weibull-Verteilung mit Parametern $a = \frac{1}{2}$ und $b = 2$.

Für $y \le 0$ folgt sofort $F(x,y) = 0$ für alle x und damit $F_2(y) = 0$.
Für $y > 0$ gilt

$$\begin{aligned} F_2(y) &= \lim_{x\to\infty}\left(1 - \max\left[\exp(-\frac{1}{2}x^2), \left(\frac{2}{2+y}\right)^2\right]\right) \\ &= 1 - \max\left[0, \left(\frac{2}{2+y}\right)^2\right] \\ &= 1 - \left(\frac{2}{2+y}\right)^2. \end{aligned}$$

F_2 gehört zu einer verschobenen Pareto-Verteilung mit Parametern $a = 2$ und $b = 2$.

ii) F besitzt die Copula $C(u,v) = \min(u,v)$:
Für $x, y > 0$ gilt

$$\begin{aligned} C(F_1(x), F_2(y)) &= \min\left[1 - \exp(-\frac{1}{2}x^2), 1 - \left(\frac{2}{2+y}\right)^2\right] \\ &= 1 - \max\left[\exp(-\frac{1}{2}x^2), \left(\frac{2}{2+y}\right)^2\right] \\ &= F(x,y). \end{aligned}$$

Für $x < 0$ oder $y < 0$ gilt $F_1(x) = 0$ oder $F_2(x) = 0$, damit ebenfalls

$$C(F_1(x), F_2(x)) = 0 = F(x,y).$$

Folglich ist C eine Copula zu F, und da die Randverteilungen F_1 und F_2 von F stetig sind, folgt aus dem Theorem von Sklar, dass C eindeutig bestimmt ist.

iii) Die asymptotische Tailabhängigkeit $\lim_{u\to 1} P(Y > F_2^{-1}(u)|X > F_1^{-1}(u))$ von X und Y kann gemäß Skript anhand der Copula $C(u,v) = \min(u,v)$ mittels

$$2 + \lim_{u\to 1} \frac{C(u,u)-1}{1-u}$$

berechnet werden. Sie nimmt folglich den Wert

$$2 + \lim_{u\to 1} \frac{\min(u,u)-1}{1-u} = 2 + \lim_{u\to 1} \frac{u-1}{1-u} = 2-1 = 1$$

an; X und Y sind damit (maximal) asymptotisch tailabhängig.

Alternativlösung: Es gilt gemäß Skript, dass die Copula $C(u,v) = \min(u,v)$ als Komonotonie-Copula die (maximal mögliche) asymptotische Tailabhängigkeit 1 besitzt.

Interpretation: Risiken mit asymptotischer Tailabhängigkeit von 1 manifestieren sich im Tail zusammen, d.h. extremale Verluste bei Risiko X treten gepaart mit extremalen Verlusten bei Risiko Y auf. Im Tail findet daher keine Diversifikation zwischen diesen beiden Risiken statt.

iv) Die Behauptung folgt, wenn gezeigt wird, dass $(F_1^{-1}\circ U, F_2^{-1}\circ U)$ dieselbe Verteilung wie (X,Y) besitzt; dann kann die gemeinsame Verteilung der Risiken X und Y mittels der rechteckverteilten Zufallsgröße U erzeugt und damit auch durch diese simuliert werden.

Variante 1: Direktes Nachrechnen:
Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und G die Verteilungsfunktion von $(F_1^{-1}\circ U, F_2^{-1}\circ U)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
G(x,y) &= P(F_1^{-1}\circ U \le x, F_2^{-1}\circ U \le y) \\
&= P(U \le F_1(x), U \le F_2(y)) \\
&= P(U \le \min(F_1(x), F_2(y))) \\
&= \min(F_1(x), F_2(y)) \\
&= C(F_1(x), F_2(y)) = F(x,y).
\end{aligned}$$

Variante 2: Über High-Level-Argumentation:
(U,U) besitzt gemäß Skript die Copula $C(u,v) = \min(u,v)$, und da F_1^{-1} und F_2^{-1} genauso wie F_1 und F_2 stetig und streng isoton sind, besitzt auch $(F_1^{-1}\circ U, F_2^{-1}\circ U)$ gemäß Skript die Copula C. Da die Randverteilungen von $(F_1^{-1}\circ U, F_2^{-1}\circ U)$ durch F_1 und F_2 gegeben sind, stimmen sowohl die Randverteilungen als auch die Copula von $(F_1^{-1}\circ U, F_2^{-1}\circ U)$ und von F überein. Da Randverteilungen und Copula die Verteilung zusammen eindeutig bestimmen, besitzt $(F_1^{-1}\circ U, F_2^{-1}\circ U)$ die Verteilungsfunktion F.

b) (14 Punkte)

i) Erwartungswert von Risiko X:

$$EX = (2,12 + 1,58 + 1,18 + 0,86 + 0,46)/5 = 1,24.$$

Erwartungswert von Risiko Y:

$$EY = (4,25 + 1,75 + 0,83 + 0,40 + 0,17)/5 = 1,48.$$

Gemäß Skript ist der Schätzer für den Expected Shortfall zum Sicherheitsniveau 60% der Quotient aus der Summe der Verluste der $m = 5 * (1 - 60\%) = 2$ schlechtesten Szenarien und m. Für Risiko X ergibt sich der Schätzer für den Expected Shortfall zu

$$\widehat{ES}_{60\%,5}(X) = (2,12 + 1,58)/2 = 1,85$$

und damit als Schätzer für den Risikokapitalbedarf von X

$$R_X = \widehat{ES}_{60\%,5}(X) - EX = 1,85 - 1,24 = 0,61.$$

Für Risiko Y erhält man entsprechend als Schätzer für den Expected Shortfall

$$\widehat{ES}_{60\%,5}(Y) = (4,25 + 1,75)/2 = 3$$

und damit als Schätzer für den Risikokapitalbedarf von Y

$$R_Y = \widehat{ES}_{60\%,5}(Y) - EY = 3 - 1,48 = 1,52.$$

Der Gesamtverlust $X + Y$ ergibt sich wie folgt:

Szenario	1	2	3	4	5
Verlust Risiko X	2,12	1,58	1,18	0,86	0,46
Verlust Risiko Y	4,25	1,75	0,83	0,40	0,17
Verlust Gesamtrisiko X+Y	6,37	3,33	2,01	1,26	0,63

Der erwartete Verlust von $X + Y$ ergibt sich sofort aus $EX + EY = 1,24 + 1,48 = 2,72$, der Expected Shortfall wird geschätzt zu

$$\widehat{ES}_{60\%,5}(X + Y) = (6,37 + 3,33)/2 = 4,85,$$

so dass der Gesamtrisikokapitalbedarf geschätzt wird durch

$$R_{X+Y} = \widehat{ES}_{60\%,5}(X + Y) - E(X + Y) = 4,85 - 2,72 = 2,13 = R_X + R_Y.$$

ii) Aus der Wurzelaggregationsformel ergibt sich der Gesamtrisikokapitalbedarf R^{WA}_{X+Y} zu

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sum_{i,j} R_i R_j \rho_{i,j}} &= \sqrt{R_X^2 \rho_{X,X} + R_Y^2 \rho_{Y,Y} + R_X R_Y \rho_{X,Y} + R_Y R_X \rho_{Y,X}} \\
&= \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + 2 R_X R_Y \rho_{X,Y}} \\
&= \sqrt{0,61^2 + 1,52^2 + 2 * 0,61 * 1,52 * 0,8} \\
&= \sqrt{4,16602} \approx 2,04.
\end{aligned}$$

Der Diversifikationseffekt beträgt bei dieser Berechnung

$$R_X + R_Y - R_{X+Y}^{WA} \approx 2,13 - 2,04 = 0,09,$$

es wird also ein positiver Diversifikationseffekt errechnet.

iii) Der Expected Shortfall ist positiv homogen und translationsinvariant und erfüllt damit alle Voraussetzungen an das Risikomaß aus der Herleitung der Wurzelaggregationsformel. Der Unterschied bei der Berechnung des Gesamtrisikokapitalbedarfs (Unterschätzung bei der Wurzelaggregationsformel!) könnte zum einen daran liegen, dass die Korrelationsannahme von 0,8 zu klein gewählt ist (was allerdings im vorliegenden Beispiel eher nicht der Fall ist; nur bei einer Korrelationsannahme von 1 würde die Wurzelaggregationsformel den korrekten Wert liefern, diese Annahme ist aber bei der Verteilungsannahme nicht gerechtfertigt), und zum anderen daran, dass die Verteilungsannahmen aus der Herleitung der Formel nicht erfüllt sind.